

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
2. Волчков Э. П., Кислых В. И., Смутьский И. И. Экспериментальное исследование аэродинамики вихревой камеры с торцевым вдувом. — В кн.: Структура пристенного пограничного слоя. Новосибирск: изд. Ин-та теплофизики, 1978.
3. Луговцев Б. А. Турбулентные вихревые кольца. — В кн.: Нестационарные проблемы гидродинамики. Вып. 38. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
4. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981.
5. Владимиров В. А. Устойчивость течений типа смерча. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 37. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1978.
6. Никулин В. В. Моделирование торнадо-подобных вихрей. — В кн.: Математические проблемы механики сплошных сред. Вып. 47. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1980.
7. Davies-Jones R. Laboratory simulated tornadoes. — In: Proc. Symp. on Tornadoes, Texas, Techol. Univ. Lubbock, Tex., 1976, p. 151.
8. Turner J. S. The constraints imposed on tornadolike vortices by the top and bottom boundary conditions. — J. Fluid Mech., 1966, vol. 25, N 2.
9. Granger R. A. Laboratory simulation of weak strength tornados. — J. Fluid Mech., 1975, vol. 3, N 4.
10. Wang C. A., Chang C. C. Measurement of the velocity field a simulated tornadolike vortex using a three-dimensional velocity probe. — J. Atm. Sci., 1972, vol. 29, N 1.
11. Ward N. B. Exploration of certain features of tornado dynamic using a laboratory model. — J. Atm. Sci., 1972, vol. 29, N 6.

УДК 532.526.013

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ТОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ СТРЕЛОВИДНОГО КРЫЛА БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА

А. М. Тумин

(Москва)

В настоящее время в связи с решением проблемы предсказания точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный широко обсуждается задача о возбуждении волн неустойчивости (волн Толлмина — Шлихтинга) [1, 2]. В [3] рассмотрена задача о возбуждении волны Толлмина — Шлихтинга в случае двумерного пограничного слоя на вибрирующей поверхности. Данная работа посвящена решению задачи [3] в случае пространственных возмущений в пограничном слое на вибрирующей поверхности стреловидного крыла бесконечного размаха.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение в пограничном слое на стреловидном крыле бесконечного размаха. Выберем в качестве системы координат: x — расстояние от передней кромки вдоль обтекаемой поверхности; y — расстояние по нормали от нее; ось Oz направлена вдоль передней кромки крыла. Уравнения Навье — Стокса запишем в безразмерном виде с помощью некоторого масштаба длины l , скорости набегающего потока U_0 . Время будем измерять в единицах l/U_0 , давление отнесено к $\rho_0 U_0^2$ (ρ_0 — плотность в набегающем потоке). Температура, коэффициент вязкости также измеряются в единицах соответствующих величин в набегающем потоке. Как и в [4], предполагаем, что основное течение в отсутствие возмущений является слабонеоднородным. Для компонент скорости (U, V, W), давления и температуры (p, T) предполагается следующая зависимость от координат:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} U &= U(x_1, y), \quad V = \varepsilon V_*(x_1, y), \quad W = W(x_1, y), \\ p &= p(x_1), \quad T = T(x_1, y), \quad x_1 = \varepsilon x, \quad \varepsilon \ll 1. \end{aligned}$$

Коэффициент вязкости будем полагать зависящим только от температуры. Запишем линеаризованные уравнения Навье — Стокса с учетом

уравнения состояния после преобразования Фурье по времени в виде

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(L_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + L_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = H_1 \mathbf{A} + H_2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + H_3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} + \varepsilon H_4 \mathbf{A},$$

где $L_0, L_1, H_1, H_2, H_3, H_4$ — матрицы 16×16 , причем L_1 не зависит от y . Все слагаемые, содержащие производные по x_1 от функций основного течения и компоненту скорости $\tilde{v}_*$ из (1.1), выделены в матрицу H_4 . Вектор-функция $\mathbf{A}$ в (1.2) определяется следующим образом через возмущения: A_1 — x -компонента скорости; $A_2 = \partial A_1 / \partial y$; A_3 — y -компонента скорости; A_4 — давление; A_5 — температура; $A_6 = \partial A_5 / \partial y$; A_7 — z -компонента скорости; $A_8 = \partial A_7 / \partial y$; $A_9 = \partial A_1 / \partial x$; $A_{10} = \partial A_3 / \partial x$; $A_{11} = \partial A_5 / \partial x$; $A_{12} = \partial A_7 / \partial x$; $A_{13} = \partial A_1 / \partial z$; $A_{14} = \partial A_3 / \partial z$; $A_{15} = \partial A_5 / \partial z$; $A_{16} = \partial A_7 / \partial z$. Предположим, что в некотором сечении $x = x_0$ заданы начальные данные в виде вектор-функции

$$(1.3) \quad \mathbf{A}(x_0, y, z) = \mathbf{A}_0(y) \exp(i\beta z).$$

Вибрацию обтекаемой поверхности на анализируемом участке будем моделировать в виде бегущей волны с малой амплитудой. Для рассматриваемой фурье-гармоники по времени с частотой ω уравнение поверхности $y(x, z)$ представим в виде

$$y = a \exp[i\alpha_0(x - x_0) + i\beta z].$$

Аналогично [3] приходим к следующим граничным условиям при $y = 0$:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} A_1(x, 0, z) &= -aU'_w \exp[i\alpha_0(x - x_0) + i\beta z], \\ A_3(x, 0, z) &= -i\omega a \exp[i\alpha_0(x - x_0) + i\beta z], \\ A_5(x, 0, z) &= 0, \quad A_7(x, 0, z) = -aW'_w \exp[i\alpha_0(x - x_0) + i\beta z], \end{aligned}$$

где U'_w, W'_w — значения производных от U и W по y , вычисленные при $y = 0$. В (1.4) отброшены слагаемые $O(a^2)$. При $y \rightarrow \infty$ предполагается ограниченность решения:

$$(1.5) \quad |A_j| < \infty \quad (j = 1, \dots, 16).$$

Задача (1.2)—(1.5) некорректна. Поэтому на начальные данные накладываем условие, что они допускают решение с конечным показателем роста [3].

2. Биортогональная система векторов. Решение задачи (1.2)—(1.5) для случая, когда основное течение является слабонеоднородным по координате x , представлено в виде разложения по биортогональной системе векторов локально-однородной задачи $\{\mathbf{A}_{\alpha\beta}(x_1, y), \mathbf{B}_{\alpha\beta}(x_1, y)\}$ [3]. Общие принципы для построения биортогональной системы для трехмерных пограничных слоев сформулированы в [1]. Ниже дана конкретизация уравнений [1]:

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(L_0 \frac{\partial \mathbf{A}_{\alpha\beta}}{\partial y} \right) + L_1 \frac{\partial \mathbf{A}_{\alpha\beta}}{\partial y} = H_1 \mathbf{A}_{\alpha\beta} + i\alpha H_2 \mathbf{A}_{\alpha\beta} + i\beta H_3 \mathbf{A}_{\alpha\beta},$$

$$A_{\alpha\beta 1} = A_{\alpha\beta 3} = A_{\alpha\beta 5} = A_{\alpha\beta 7} = 0 \text{ при } y = 0,$$

$$|A_{\alpha\beta j}| < \infty \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, 16);$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(L_0^* \frac{\partial \mathbf{B}_{\alpha\beta}}{\partial y} \right) - L_1^* \frac{\partial \mathbf{B}_{\alpha\beta}}{\partial y} = H_1^* \mathbf{B}_{\alpha\beta} - i\bar{\alpha} H_2^* \mathbf{B}_{\alpha\beta} - i\bar{\beta} H_3^* \mathbf{B}_{\alpha\beta},$$

$$B_{\alpha\beta 2} = B_{\alpha\beta 4} = B_{\alpha\beta 6} = B_{\alpha\beta 8} = 0 \text{ при } y = 0,$$

$$|B_{\alpha\beta j}| < \infty \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, 16),$$

где * означает сопряженную матрицу; черта сверху — комплексное сопряжение; индексы α и β — принадлежность вектор-функции решению задач (2.1), (2.2) при заданных параметрах α и β . Системы (2.1), (2.2) зависят от «медленной» координаты x_1 как от параметра. Уравнения для первых восьми компонент в (2.1), (2.2) отщепляются. Остальные опреде-

ляются по ним однозначно. Задачи (2.1), (2.2) при заданном значении частоты ω и параметра β имеют дискретный и непрерывный спектр допустимых значений параметра α . Этот анализ аналогичен [5] для двумерных пограничных слоев. Трехмерность основного течения и возмущений не дает принципиальных отличий от [5]. Имеют место следующие условия ортогональности [1]:

$$\langle H_2 A_{\alpha\beta}, B_{\gamma\beta} \rangle = \Delta_{\alpha\gamma}, \quad \langle A, B \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{16} \int_0^{\infty} e^{-\tau y} A_j \bar{B}_j dy,$$

где $\tau > 0$; $\Delta_{\alpha\gamma}$ — символ Кронекера, если одно из чисел α, γ относится к дискретному спектру; $\Delta_{\alpha\gamma} = \delta(\alpha - \gamma)$ — дельта-функция, если оба числа α, γ относятся к непрерывному спектру.

Если обозначить через $z(x_1, y)$ вектор, состоящий из первых восьми компонент вектора $A_{\alpha\beta}$, то задачу (2.1) можно свести к хорошо известной системе типа Лиза — Линя [4]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} dz/dy &= H_0 z, \quad z_1 = z_3 = z_5 = z_7 = 0 \text{ при } y = 0, \\ |z_j| &< \infty \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, 8), \end{aligned}$$

где H_0 — матрица 8×8 . Конкретный вид H_0 приведен, например, в [4]. Система уравнений (2.3) имеет восемь линейно-независимых решений. Полагая вне пограничного слоя производные от функций основного течения по координате y равными нулю, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [6]. Отыскивая ее решение $\sim \exp(\lambda y)$, получаем характеристическое уравнение для λ :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} (b_{11} - \lambda^2)^2 [(b_{22} - \lambda^2)(b_{33} - \lambda^2) - b_{23}b_{32}] &= 0, \\ b_{11} &= H_0^{21}, \quad b_{22} = H_0^{42}H_0^{24} + H_0^{43}H_0^{34} + H_0^{46}H_0^{64} + H_0^{48}H_0^{84}, \\ b_{23} &= H_0^{42}H_0^{25} + H_0^{43}H_0^{35} + H_0^{46}H_0^{65} + H_0^{48}H_0^{85}, \quad b_{32} = H_0^{64}, \quad b_{33} = H_0^{65}, \end{aligned}$$

где H_0^{ij} — элементы матрицы H_0 , вычисляемые вне пограничного слоя. Уравнение (2.4) имеет два двукратно вырожденных корня: $\lambda_1 = \sqrt{b_{11}}$, $\lambda_2 = -\sqrt{b_{11}}$. Обозначим два линейно-независимых вектора, соответствующих λ_1 через $\bar{V}_1$ и V_7 . Их отличные от нуля компоненты равны

$$\begin{aligned} V_{11} &= e^{\lambda_1 y}, \quad \bar{V}_{21} = \lambda_1 e^{\lambda_1 y}, \quad V_{31} = (H_0^{37}/\lambda_1) e^{\lambda_1 y}, \\ V_{37} &= (H_0^{37}/\lambda_1) e^{\lambda_1 y}, \quad \bar{V}_{77} = e^{\lambda_1 y}, \quad V_{87} = \lambda_1 e^{\lambda_1 y}, \end{aligned}$$

где V_{ij} означает i -ю компоненту j -го вектора. Два линейно-независимых решения, соответствующих λ_2 , обозначим как V_2, V_8 . Кроме того, (2.4) имеет два корня λ_3, λ_4 :

$$\lambda_{3,4} = \pm \{(1/2)(b_{22} + b_{33}) + \sqrt{(1/4)(b_{22} - b_{33})^2 + b_{23}b_{32}}\}^{1/2}.$$

Соответствующие им линейно-независимые решения обозначим через V_3 и V_4 . Оставшиеся корни λ_5, λ_6 определяются равенством

$$\lambda_{5,6} = \pm \{(1/2)(b_{22} + b_{33}) - \sqrt{(1/4)(b_{22} - b_{33})^2 + b_{23}b_{32}}\}^{1/2}.$$

Им будут соответствовать линейно-независимые решения V_5 и V_6 . Для определенности выберем ветви $\text{Real } \lambda_1 < 0$, $\text{Real } \lambda_3 < 0$, $\text{Real } \lambda_5 < 0$. Решениям дискретного спектра соответствуют волны Толлмина — Шлихтинга. Для них решение (2.3) обозначим через z_{TS} :

$$(2.5) \quad z_{TS} = c_1 V_1 + c_3 V_3 + c_5 V_5 + c_7 V_7.$$

Один из коэффициентов в (2.5) произволен в силу линейности задачи. Остальные определяются из граничных условий при $y = 0$. При этом α_{TS} определяется из дисперсионного соотношения (индекс TS означает принадлежность дискретному спектру):

$$E_{1357}(\alpha_{TS}) = \det \begin{vmatrix} V_{11} & V_{13} & V_{15} & V_{17} \\ V_{31} & V_{33} & V_{35} & V_{37} \\ V_{51} & V_{53} & V_{55} & V_{57} \\ V_{71} & V_{73} & V_{75} & V_{77} \end{vmatrix}_{j=0} = 0.$$

Чтобы построить в дальнейшем решение задачи (1.2)–(1.5) в виде разложения по собственным векторам $A_{\alpha\beta}$, построим вектор $A_v(x_1, y)$ аналогично [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(L_0 \frac{\partial A_v}{\partial y} \right) + L_1 \frac{\partial A_v}{\partial y} &= H_1 A_v + i\alpha_0 H_2 A_v + i\beta H_3 A_v, \\ A_{v1} &= -aU'_w, \quad A_{v3} = -ia\omega, \quad A_{v5} = 0, \quad A_{v7} = -aW'_w \text{ при } y = 0, \\ |A_{vj}| &\rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, 16). \end{aligned}$$

Обозначим через z_v вектор, состоящий из первых восьми компонент A_v . Его можно записать в виде

$$z_v = a(d_1 V_1 + d_3 V_3 + d_5 V_5 + d_7 V_7) / E_{1357}(\alpha_0),$$

где коэффициенты d_j определяются из граничных условий при $y = 0$. Вектор z_v зависит от x_1 как от параметра. Заметим, что если имеется резонансная точка $x_1 = x_*$, в которой $\alpha_{TS} = \alpha_0$, то z_v имеет полюс.

3. Генерация волны Толлмина — Шлихтинга. Ищем решение задачи (1.2)–(1.5) в виде

$$\begin{aligned} (3.1) \quad A(x, y, z) &= \sum' c_\alpha(x_1) A_{\alpha\beta}(x_1, y) \exp \left\{ i \int_{x_0}^x \alpha dx + i\beta z \right\} + \\ &+ A_v(x_1, y) \exp \{ i\alpha_0(x - x_0) + i\beta z \}, \end{aligned}$$

где $\sum'$ означает суммирование по дискретному и интегрирование по непрерывному спектру. Ограничиваясь рассмотрением в (3.1) только слагаемых с A_v и A_{TS} и повторяя вычисления [3], находим коэффициент $c_{TS}(x_1)$ и убеждаемся в равномерной пригодности по x решения (3.1). При этом, используя метод перевала [7], находим амплитуду волны Толлмина — Шлихтинга, возбужденную в окрестности точки резонанса $x_1 = x_*$, где $\alpha_{TS}(x_*) = \alpha_0$. Если нас интересует конкретная физическая величина q (амплитуда пульсации скорости, температуры или массового расхода и т. д.) в возбужденной волне, то ее значение c_q имеет вид

$$(3.2) \quad \frac{|c_q|}{a} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{2\pi \left| \frac{d\alpha_{TS}(x_*)}{dx_1} \right|} |q| \langle H_2 A_{TS}, B_{TS} \rangle_{x_1=x_*},$$

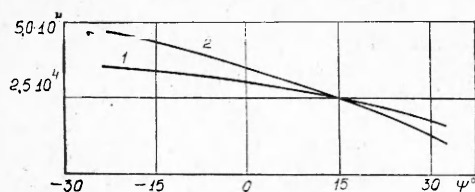
где величина q определяется через компоненты вектора A_{TS} . Векторы A_{TS} , B_{TS} в (3.2) определяются из (2.1), (2.2) при β из (1.3). Путем весьма громоздких вычислений можно показать, что

$$\langle H_2 A_{TS}, B_{TS} \rangle = -i \left\langle \frac{\partial H_0}{\partial \alpha_{TS}} z_{TS}, \chi_{TS} \right\rangle + O(\text{Re}^{-1}),$$

где Re — число Рейнольдса; χ_{TS} — решение сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} (3.3) \quad d\chi/dy &= -H_0^* \chi, \quad \chi_2 = \chi_4 = \chi_6 = \chi_8 = 0 \text{ при } y = 0, \\ |\chi_j| &\rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (j = 1, \dots, 8), \quad \alpha = \alpha_{TS}. \end{aligned}$$

4. Пример численного расчета. В данной работе в качестве примера рассматривался симметричный профиль NASA 0012 под нулевым углом атаки, для которого задавался угол стреловидности $\psi_c = 30^\circ$. Длина хорды выбиралась 1,5 м, давление и температура в набегающем потоке 10^4 Н/м^2 и 300 К соответственно, число Маха $M = 0,28$. Коэффициент вязкости предполагался зависящим от температуры по формуле Сазерленда. Число Прандтля равнялось 0,72. Расчет пограничного слоя вы-



ре представлена зависимость амплитуд максимального значения массового расхода для x - и z -компонент волны Толлмина — Шлихтинга (кривые 1 и 2 соответственно) в зависимости от угла $\psi = \arctg(\beta/\alpha)$ в случае резонансного режима возбуждения при частоте возмущения 500 Гц. Численные значения приведены в размерном виде на 1 м амплитуды вибрации поверхности. Из результатов, представленных на фигуре, следует, что в случае резонансного режима возбуждения волны Толлмина — Шлихтинга значение амплитуды вибрации $\sim 10^{-6}$ м дает амплитуду пульсаций в неустойчивой волне $\sim 1\%$.

Поступила 30 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н. Проблема определения критических чисел Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. — В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1981.
2. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Тумин А. М., Федоров А. В. Возбуждение волн неустойчивости в пограничном слое на вибрирующей поверхности. — ПМТФ, 1983, № 3.
4. Nayfeh A. H. Stability of three-dimensional boundary layers. — AIAA J., 1980, vol. 18, N 4.
5. Сидоренко Н. В., Тумин А. М. Гидродинамическая устойчивость течений в пограничном слое сжимаемого газа. — В кн.: Механика неоднородных сред. Новосибирск: изд. ИТПМ СО АН СССР, 1981.
6. Ганонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
7. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962.
8. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962.
9. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — УМН, 1961, т. 16, вып. 3.

УДК 532.517.4

СТРУКТУРЫ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ СДВИГОВОМ СЛОЕ

Г. А. Кузьмин, О. А. Лихачев, А. З. Паташинский

(Новосибирск)

1. Введение. С математической точки зрения турбулентное движение жидкости представляется результатом возбуждения многих сильно взаимодействующих степеней свободы. При этом в движении этих степеней свободы нет ни полного хаоса (что позволило бы использовать простые статистические модели), ни полной когерентности. Исследования последнего времени (см., например, [1—3]) делают все более правдоподобной идею, что многие турбулентные течения представляют собой систему взаимодействующих и весьма устойчивых волновых пакетов — вихревых структур. Часто наблюдаемая пространственная разделенность структур свидетельствует, что их взаимодействие не уничтожает возможности рассматривать структуру как некоторую «единицу» турбулентности.

По-видимому, нет единого механизма образования структур в различных турбулентных течениях. Широко известные диссипативные структуры представляются совместным продуктом нелинейности и диссипации. Например, ячейки Бенара в конвективных течениях и вихри Тейлора в круговом течении Куэтта возникают и существуют в ограниченном диапазоне отношений нелинейности к диссипации. В свободных турбулентных течениях — струях, следах и в слоях смешения диссипация не играет видимой роли в образовании структур. Можно полагать, что за существование структур в этих, эффективно невязких течениях ответственны некоторые локальные