АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ ПРИ ГЕТЕРОГЕННЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЯХ С УЧЕТОМ ТЕРМОДИФФУЗИОННОГО ЭФФЕКТА

А. М. Супоницкий (Москва)

Задаче исследования влияния градиента температур на перенос вещества в вынужденном потоке вязкой жидкости посвящен ряд работ. Рассмотрены вопросы учета термодиффузионного эффекта при обтекании тел [1–4], при течении в каналах [5], в струйных течениях [6,7].

В последнее время, наряду с изучением термодиффузионного разделения, внимание исследователей привлекла задача учета термодиффузионного эффекта на перенос вещества в конвективном потоке при наличии на обтекаемых поверхностях химических реакций [4][1].

1. Пусть ламинарный поток вязкой несжимаемой жидкости, содержащий некоторое вещество А, обтекает тело с химически активной поверхностью, на которой происходит гетерогенная химическая реакция вещества А с веществом поверхности [8]. Если температура потока T_0 и температура поверхности тела T_1 различны, то будет иметь место термодиффузионный перенос вещества.

Рассмотрим задачу учета термодиффузионного эффекта при гетерогенных химических реакциях со смешанной кинетикой. Для течений, у которых нормальная к поверхности компонента скорости зависит только от нормальной к поверхности координаты, эта задача имеет автомодельное решение. Введем связанную с телом ортогональную систему координат, причем пусть координатная поверхность $y = 0$ совпадает с поверхностью тела. Исследуемая автомодельная задача описывается следующей системой уравнений и граничных условий:

$$
\begin{gathered}
-M\varphi\left(\frac{y}{N}\right) c_y' = D\,\{c_{yy}'' + [\sigma c(1-c)\,T_y']_y'\}, \qquad -M\varphi\left(\frac{y}{N}\right) T_y' = \chi T_{yy}'' \\
c(y) = c_0, \quad T(y) = T_0 \quad \text{при } y = \infty \\
D\left[\frac{\partial c}{\partial y} + \sigma c(1-c)\frac{\partial T}{\partial y}\right] = kc^n, \qquad T(y) = T_1 \quad \text{при } y = 0
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь $c(y)$, $T(y)$ — температура и концентрация вещества в данной точке потока; D, χ — коэффициенты диффузии и температуропроводности; c_0 — концентрация вещества вдали от тела; k — константа скорости химической реакции ($k = k_0 \exp(-S_*/T)$), причем постоянные k_0 и S_* определяются конкретным видом химической реакции; σ — коэффициент Соре. Функция $\varphi(y/N)$ и константы M и N определяются из решения соответствующей задачи гидродинамики вязкой жидкости. Для случая вращения диска с постоянной угловой скоростью ω (задача Кармана) имеем $M = (\omega\nu)^{1/2}$, $N = (\nu/w)^{1/2}$. Нормальная к поверхности диска компонента скорости имеет вид $v_y = -M\varphi(y/N)$. Функция $\varphi(y/N)$ находится путем численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [8].

При изучении задачи термодиффузионного разделения на непроницаемых для потока вещества поверхностях было дано сравнение методов малого параметра и метода аппроксимации распределения температуры линейной функции [2,3]. В данной задаче представляется целесообразным применить метод линейной аппроксимации распределения температуры. В жидкостях тепловое число Прандтля обычно значительно меньше диффузионного, поэтому предположение о значительно большей толщине теплового слоя, по сравнению с диффузионным, является естественным.

Уравнение теплопередачи системы (1.1) интегрируется в квадратурах. Разложим найденное решение для распределения температуры в ряд Маклорена и ограничимся первыми двумя членами. После подстановки этой линейной функции в диффузионную часть задачи (1.1) получим для растворов слабой концентрации $[c(1-c) \approx c]$

$$
\begin{gathered}
-S\varphi(\eta)\, c_\eta' = c_{\eta\eta}'' + qc_\eta'; \qquad c_\eta' + qc = pc^n \quad \text{при } \eta = 0, \qquad c(\eta) = c_0 \quad \text{при } \eta = \infty \\
\left(S = \frac{MN}{D},\quad \eta = \frac{y}{N},\quad q = \sigma(T_0 - T_1)\,\alpha(Q)\right) \\
Q = \frac{MN}{\chi}, \qquad p = \frac{kN}{D}, \qquad \alpha(Q) = \left[\int_0^\infty \exp\left(-Q\int_0^\xi \varphi(h)\,dh\right) d\xi\right]^{-1}
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

[1] Близкие задачи рассматривались в диссертации автора (Москва, МГУ, 1964).

Интегрируя (1.2), имеем

$$c(\eta)=c_0\left[A\int\limits_0^\eta \exp\left(-S\int\limits_0^\xi \varphi(h)\,dh-q\zeta\right)d\zeta+B\right] \tag{1.3}$$

где постоянные A и B определяются соотношениями

$$A=(1-B)\,\beta\,(S,\,q),\qquad \lambda B^n=B\,[q-\beta\,(S,\,q)]+\beta\,(S,\,q)$$

$$\left(\beta\,(S,\,q)=\left[\int\limits_0^\infty \exp\left(-S\int\limits_0^\eta \varphi(\zeta)\,d\zeta-q\eta\right)d\eta\right]^{-1},\ \lambda=pc_0^{\,n-1}\right)$$

Алгебраическое уравнение, определяющее B, можно решить графически.
Поток вещества на поверхности определяется формулой

$$j=kc^n\,|_{y=0}=kc_0^{\,n}B^n \tag{1.5}$$

При больших значениях теплового и диффузионного чисел Прандтля, полагая $\varphi\,(\eta)=E\eta^2$ и учитывая малость величины q, получим

$$\alpha\ (Q)=\frac{QE^{1/3}}{3^{1/3}\Gamma(4/3),}\qquad \beta\,(S,\,Q)=\frac{(SE)^{1/3}}{3^{1/3}\Gamma\,(4/3)}\left[1+\frac{3^{1/3}\Gamma\,(5/3)\,q}{2\Gamma\,(4/3)\,(SE)^{1/3}}\right] \tag{1.6}$$

Рассмотрим в качестве примера использования полученных выше результатов задачу об учете термодиффузионного эффекта при гетерогенных химических реакциях первого порядка ($n=1$). Из соотношений (1.4) и (1.5) вытекает, что

$$j=kc\,|_{y=0}=\frac{kc_0\beta\,(S,\,q)}{\lambda-q+\beta\,(S,\,q)} \tag{1.7}$$

Для больших тепловых и диффузионных чисел Прандтля, учитывая малость величины q, получим в случае малых λ

$$\frac{j-j_0}{j_0}=\sigma\,(T_0-T_1)\,\gamma^{1/3}\qquad \left(\gamma=\frac{D}{\chi}\right) \tag{1.8}$$

где j_0 — поток вещества на поверхности при изотермических условиях.
Для больших значений λ из (1.7) имеем

$$\frac{j-j_0}{j_0}=\frac{\sigma\,(T_0-T_1)\,\gamma^{1/3}\Gamma\,(5/3)}{2\Gamma^2\,(4/3)} \tag{1.9}$$

Сравнение соотношений (1.8) и (1.9) показывает, что относительное влияние термодиффузии на поток вещества сильнее проявляется при малых значениях параметра λ, т. е. при режимах, близких к чисто кинетическому. Соотношения (1.8) и (1.9) показывают, что при больших значениях теплового и диффузионного чисел Прандтля для случаев чисто диффузионной и чисто химической кинетики относительное изменение потока вещества на поверхности не зависит от формы поверхности и гидродинамических характеристик течения. Случай непроницаемых поверхностей, являющийся предельным для малых λ, был рассмотрен в работах [2,3]. Ниже рассмотрен случай чисто диффузионной кинетики, являющийся предельным для больших λ.

2. Рассмо рим задачу переноса вещества в плоском ламинарном пограничном слое при наличии термодиффузионного эффекта. Диффузионное и тепловое числа Прандтля будем считать большими. Введем связанную с телом ортогональную систему координат xy, причем пусть линия $y=0$ совпадает с контуром обтекаемого тела. Исследуемая задача описывается уравнениями

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
$$u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{D\left[\frac{\partial c}{\partial y}+\sigma c\,(1-c)\frac{\partial T}{\partial y}\right]\right\} \tag{2.1}$$

соотношениями

$$u\,(x,\,y)=\tau\,(x)\,y\,/\,\mu,\qquad v=-\tau'\,(x)y^2\,/\,2\mu \tag{2.2}$$

и граничными условиями

$$\begin{array}{ll} T\,(x,\,0)=T_1, & c\,(x,\,0)=0 \\ c\,(x,\,\infty)=T_0, & c\,(x,\,\infty)=c_0 \\ T\,(0,\,y)=T_0, & c\,(0,\,y)=c_0 \end{array} \tag{2.3}$$

Здесь $u(x, y)$, $v(x, y)$ — компоненты скорости, $T(x, y)$ — температура, $c(x, y)$ — концентрация, $\tau(x)$ — напряжение трения на поверхности, μ — коэффициент динамической вязкости. Задача (2.1)—(2.3) является автомодельной. Полагая

$$T = T(\eta), \qquad c = c(\eta), \ \eta = \varphi t^{-1/3}, \qquad \varphi = \frac{\tau^{1/2}(x)\, y}{2^{1/2}\mu^{1/2}}, \qquad t = (8\mu)^{-1/2}\int_0^x \tau^{1/2}(\xi)\, d\xi \tag{2.4}$$

$$M = (3D)^{-1}, \qquad N = (3\chi)^{-1}$$

получим следующую систему:

$$-M\eta^2 c_\eta' = [c_\eta' + \sigma c(1-c) T_\eta']_\eta', \qquad -N\eta^2 T_\eta' = T_{\eta\eta}'' \tag{2.5}$$

$$c(0) = 0, \qquad T(0) = T_1; \qquad c(\infty) = c_0, \quad T(\infty) = T_0$$

При малых концентрациях вещества в потоке можно считать, что $c(1-c) \approx c$.

Введем новую переменную $z = N^{1/3}\eta$; разложим функцию $T(z)$, дающую решение тепловой части задачи (2.5), в ряд Маклорена и ограничимся двумя первыми членами. После подстановки определенной таким образом линейной аппроксимации функции распределения температуры в диффузионную часть задачи (2.5) получим

$$\gamma^{-1} z^2 c_z' = c_{zz}'' + q c_z', \qquad c(0) = 0, \quad c(\infty) = c_0$$

$$\left(\gamma = \frac{H}{M} = \frac{D}{\chi}, \quad q = \frac{\sigma(T_0 - T_1)}{3^{1/3}\Gamma(4/3)}\right) \tag{2.6}$$

Интегрируя (2.6), найдем

$$c(z) = c_0 \delta(\gamma, q)\int_0^z \exp\left(-\frac{\xi^3}{3\gamma} - q\xi\right) d\zeta, \qquad \delta(\gamma, q) = \left[\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\zeta^3}{3\gamma} - q\zeta\right) d\zeta\right]^{-1} \tag{2.7}$$

Поток вещества на поверхности

$$j = \frac{Dc_0\delta(\gamma, q)\sqrt{\tau(x)}}{\sqrt{2\mu}\,(3\chi)^{1/3}}\left(\frac{1}{\sqrt{8\mu}}\int_0^x \sqrt{\tau(\xi)}\, d\xi\right)^{-1/3} \tag{2.8}$$

Составим отношение потока вещества на поверхности при учете термодиффузии к потоку вещества при изотермических условиях. Из (2.8) имеем

$$j / j_0 = \delta(\gamma, q) / \delta(\gamma, 0) \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, что отношение j / j_0 не зависит от формы поверхности и гидродинамических характеристик течения. Учитывая малость величины q, получим

$$\frac{j - j_0}{j_0} = \frac{\sigma(T_0 - T_1)\,\gamma^{1/3}\Gamma(5/3)}{2\Gamma^2(4/3)} \tag{2.10}$$

Таким образом, соотношение (1.9) справедливо в довольно широком диапазоне течений.

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за внимание и советы.

Поступила 9 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Liu V. C. On the separation of gas muxtures by suction of thermal-diffusion boundary layer. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, vol. 12, Part 1.
2. Супоницкий А. М. О расчете термической диффузии в ламинарном потоке несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Прандтля. ПМТФ, 1962, № 2.
3. Супоницкий А. М. О расчете термической диффузии в ламинарном потоке вязкой жидкости при умеренных значениях теплового и диффузионного числа Прандтля. ПМТФ, 1963, № 5.
4. Левич В. Г., Маркин В. С., Чирков Ю. С. Термодиффузия в жидкостях у поверхности вращающегося диска. Электрохимия, 1965, т. 1, № 12.
5. Turner J. C. R. Thermal diffusion with laminar flow in a duct. A theoretical solution and practical results. Chem. Engng Sci., 1962, vol. 17, Febr.
6. Кашкаров В. П. О диффузионном пограничном слое в полуограниченной струе. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 6.
7. Thomann H., Baron J. R. Experimental investigation of thermal diffusion effects in laminar and turbulent shear flow. Heat and Mass Transfer., 1965, vol. 8
8. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.