

мость $\varepsilon_0(R)$ в координатах Лагранжа. Воспользовавшись законом сохранения массы, получим

$$R_0^3 = 1 + 3 \int_{R_1}^R \frac{\eta^2 d\eta}{1 - \varepsilon_0(\eta)}, \quad R_1 = \frac{r_1}{R_0} \quad (2.4)$$

Здесь r_1 — радиус каверны после взрыва.

Кривые 2 на фиг. 1—2, построенные согласно (2.4), соответствуют распределению остаточных деформаций $\varepsilon_0(R_0)$ в координатах Лагранжа. Сравнение кривых 2, 3 фиг. 1, 2 и аналогичных данных для суглинков (2) показывает, что остаточные деформации $\varepsilon_0(R_0)$ оказались значительно больше деформаций на фронте ударной волны $\varepsilon_*(R_0)$ при $R_0 = 10—15$ в лёссовом грунте и в глине в 2 раза, в суглинке — в 1.3 раза. Следует заметить, что с увеличением расстояния R_0 и, следовательно, с уменьшением напряжений это различие уменьшается.

Для случая лёссовидного суглинка (фиг. 1), для которого имеются данные статических испытаний [1], можно также утверждать, что остаточные деформации после взрыва не превышали деформаций, соответствующих статической нагрузке, равной по величине максимальному напряжению на фронте ударной волны.

Полученные результаты не могут быть объяснены в рамках упруго-пластической модели [6]. Они свидетельствуют о том, что деформации в грунте при взрывах продолжают нарастать при выполнении условий разгрузки по напряжениям $\partial\sigma/\partial t < 0$ и подтверждают полученный ранее в [1] вывод о существенности влияния временных эффектов, в частности скорости деформирования, на объемную сжимаемость глинистых грунтов при кратковременных нагрузках. Автор благодарит С. С. Григоряна за полезные советы и В. В. Мельникова, принимавшего участие в экспериментах.

Поступила 17 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В. В., Рыков Г. В. О влиянии скорости деформирования на сжимаемость лёссовых грунтов. ПМТФ, 1965, № 2.
2. Рыков Г. В. Экспериментальное исследование поля напряжений при взрыве в песчаном грунте. ПМТФ, 1964, № 1.
3. Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Кошелев Л. И., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В. Измерение волн напряжений в мягких грунтах. ПМТФ, 1963, № 2.
4. Григорян С. С., Ляхов Г. М., Мельников В. В., Рыков Г. В., Взрывные волны в лёссовидном грунте. ПМТФ, 1963, № 4.
5. Ляхов Г. М. Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах. Изд. «Недра», 1964.
6. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ДАВЛЕНИЯ И РАСХОДА В СКВАЖИНАХ ПОРИСТО-ТРЕЩИНОВАТОГО КОЛЛЕКТОРА

Р. И. Медведский

(Баку)

В работе строятся двусторонние оценки для изменения давления при пуске скважины с постоянным дебитом и дебита при пуске с постоянным забойным давлением. Приводится также решение задачи методом осреднения. Содержатся графики характерных теоретических кривых изменения давления и экспериментальные кривые, относящиеся к месторождению Кюровдаг.

1. Разработка гидродинамических методов исследования скважин, вскрывающих пористо-трещиноватые коллекторы, упирается в решение следующих двух основных задач: 1) найти изменение забойного давления $\Delta p(t)$ при возмущении стационарного состояния пласта резким изменением расхода скважины на постоянную величину Δq_0 , 2) найти изменение расхода скважины $\Delta q(t)$ при возмущении стационарного состояния пласта резким изменением забойного давления на постоянную величину Δp_0 .

Пусть функция $U(r, t)$ означает отклонение давления в трещинах возмущенного пласта над стационарным. В пористо-трещиноватых средах с пренебрежимо малой

сжимаемостью трещин функция $U(r, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\kappa \nabla^2 U - \kappa \tau \frac{\partial \nabla^2 U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (1.1)$$

выведенному в работе [1]. Здесь $\nabla^2 U = 1/r \partial/\partial r (r \partial U/\partial r)$, r — расстояние по радиусу от скважины в глубь пласта, t — время, κ — коэффициент пьезопроводности, τ — характерный для пористо-трещиноватой среды параметр, имеющий размерность времени и названный временем запаздывания. С проницаемостью трещин k и коэффициентом массообмена трещин и блоков α время запаздывания связано зависимостью $\tau = k/\alpha$.

Задача (1) математически может быть сформулирована следующим образом: решить уравнение (1.1) при начальном и граничных условиях [2]

$$U(r, t=0) = 0, -\frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_1} = \Delta q_0, \quad U(r=\infty, t) = 0$$

Здесь kh/μ — гидропроводность пласта, r_1 — радиус скважины. Второе граничное условие введено в таком виде потому, что рассматривается первая фаза фильтрации.

Подвергая поставленную задачу преобразованию Лапласа, получаем для трансформанты изменения забойного давления

$$\Delta p(s) = \frac{\mu}{2\pi kh} \Delta q_0 \left[\frac{K_0[\zeta(\tau)]}{s\zeta(\tau) K_1[\zeta(\tau)]} \right] \quad \left(\zeta(\tau) = \left[\frac{1}{m} \frac{s}{1+\tau s} \right]^{1/2}, m = \frac{\kappa}{\zeta^2} \right) \quad (1.2)$$

Здесь s — параметр преобразования Лапласа K_0 и K_1 — стандартные обозначения функций Макдональда нулевого и первого порядка соответственно.

Пусть $F(m\tau, mt)$ означает оригинал выражения в квадратных скобках (1.2). Наличие множителя m перед τ и t в выражении этой функции диктуется теоремой подобия операционного исчисления Лапласа [3]. В дальнейшем она называется функцией давления пористо-трещинового пласта и для простоты записи обозначается $F_\tau(mt)$. Как следует из (1.1) или (1.2), при $\tau = 0$ функция $F_0(mt)$ есть не что иное, как функция давления пористого пласта [4], явное выражение которой от времени хорошо известно.

Задача (2) математически формулируются таким образом: решить уравнение (1.1) при начальном и граничных условиях

$$U(r, t=0) = 0, \quad U(r=r_1, t) = \Delta p_0, \quad U(r=\infty, t) = 0$$

Здесь опять-таки вид второго граничного условия определяется тем, что рассматривается первая фаза фильтрации.

Изменение расхода жидкости скважины $\Delta q(t)$ в лапласовых изображениях представляется выражением

$$\Delta q(s) = \frac{2\pi kh}{\mu} \Delta p_0 \left[\frac{\zeta(\tau) K_1[\zeta(\tau)]}{s K_0[\zeta(\tau)]} \right] \quad (1.3)$$

Пусть $\Phi(m\tau, mt)$ означает оригинал выражения в квадратных скобках (1.3) и здесь наличие множителя m перед τ и t вытекает из той же теоремы подобия. В дальнейшем эта функция называется функцией расхода скважины пористо-трещинового пласта и обозначается как $\Phi_\tau(mt)$. Очевидно, $\Phi_0(mt)$ означает не что иное, как функцию расхода пористого пласта, достаточно хорошо изученную.

Согласно определению $F_\tau(mt)$, из (1.2) при $\tau = 0$ вытекает

$$\frac{K_0[\zeta(0)]}{s\zeta(0) K_1[\zeta(0)]} = \int_0^\infty e^{-s\sigma} F_0(m\sigma) d\sigma = \int_0^\infty e^{-\zeta^2(0)m\sigma} F_0(m\sigma) d\sigma \quad (1.4)$$

Полагая здесь $\zeta(\tau)$ вместо $\zeta(0)$, получим после простых преобразований

$$\frac{K_0[\zeta(\tau)]}{s\zeta(\tau) K_1[\zeta(\tau)]} = \int_0^\infty \frac{m\zeta^2(\tau)}{s} e^{-\zeta^2(\tau)m\sigma} F_0(m\sigma) d\sigma \quad (1.5)$$

Пусть оригиналом $ms^{-1} \zeta^2(\tau) \exp[-\zeta^2(\tau)m\sigma]$ служит $P(t, \sigma)$.

Пользуясь правилами и таблицей соответствия операционного исчисления из работы [3], находим оригинал

$$P(t, \sigma) = \tau^{-1} \exp [-(t + \sigma) \tau^{-1}] I_0(2 \sqrt{i\sigma/\tau^2}) \quad (1.6)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Переходя к оригиналам в обеих частях равенства (1.5), получаем такое интегральное представление функции давления пористо-трещиноватого пластика

$$F_\tau(mt) = \int_0^\infty P(t, \sigma) F_0(m\sigma) d\sigma \quad (1.7)$$

Совершенно аналогично будем иметь следующее:

$$\Phi_\tau(mt) = \int_0^\infty P(t, \sigma) \Phi_0(m\sigma) d\sigma \quad (1.8)$$

Интегральные представления (1.7) и (1.8) позволяют благодаря возможности применения к ним неравенств Йенсена [6] найти двусторонние оценки функций давления и расхода пористо-трещиноватого пластика. Как будет показано ниже, получаемые таким образом верхние и нижние оценки отличаются одна от другой незначительно, особенно при больших значениях времени. Сам способ их получения полезно назвать методом двусторонних оценок, который может быть применен к решению довольно широкого круга задач подземной гидравлики.

2. В настоящем разделе устанавливается несколько необходимых для дальнейших построений результатов, составляющих сущность метода двусторонних оценок.

Функция $F_0(t_0)$ может быть приближенно представлена формулой

$$F_0(t_0) \approx \ln(1 + \sqrt[4]{t_0/\pi}) + \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{\gamma} \left(\frac{\sqrt[4]{t_0/\pi}}{1 + \sqrt[4]{t_0/\pi}} \right)^3 \quad (2.1)$$

$t_0 = mt$; $\gamma = 1.781\dots$ постоянная Эйлера.

Поскольку главные члены асимптотического разложения функции $F_0(t_0)$ и приближения (2.1) совпадают как при малых, так и при больших значениях безразмерного параметра t_0 , то для этих значений t_0 погрешность формулы (2.1) ничтожна. Как видно из таблицы 1, для остальных значений параметра t_0 погрешность этой формулы также мала и не превосходит 0.5%.

В работе [4] показано, что $\Phi_0(t_0)$ с погрешностью не более 1,2% во всем диапазоне изменения безразмерного параметра представляется формулой

$$\Phi_0(t_0) = [\ln(1 + \sqrt{\pi t_0})]^{-1} \quad (2.2)$$

Благодаря ничтожной погрешности приближений (2.1) и (2.2) в прикладных задачах полезно не делать различий между ними и точными выражениями функций давления и расхода пористого пластика, которые неудобны ни для вычислений, ни для исследования.

Рассмотрим функции

$$f(x) = \ln(1 + ax) + \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{\gamma} \left(\frac{ax}{1 + ax} \right)^3, \quad a = \sqrt{\frac{4m}{\pi}}$$

$$\varphi(x) = \ln^{-1}(1 + bx), \quad b = \sqrt{\pi m}$$
(2.3)

Непосредственно проверяются утверждения: $f(x)$ и $\varphi(x^{-1})$ — выпуклы вверх при всех $x \geq 0$, функции $f(e^x)$ и $\varphi(e^x)$ — выпуклы вниз при $-\infty < x < \infty$.

Пусть p_n — система положительных чисел, $1 \leq n \leq N$, Tx_n — оператор осреднения, определенный формулой

$$Tx_n = \left(\sum_1^N p_n x_n \right) \left(\sum_1^N p_n \right)^{-1}, \quad T^{-1}x_n = \frac{1}{Tx_n}$$

Тогда для любой ограниченной системы положительных чисел справедливы неравенства Йенсена, вытекающие из выпуклости ранее введенных функций [5]

$$\begin{aligned} Tf(x_n) &< f(Tx_n), \quad Tf(\exp y_n) > f(\exp Ty_n) \\ T\varphi(1/y_n) &< \varphi(T^{-1}y_n), \quad T\varphi(\exp y_n) > \varphi(\exp Ty_n) \end{aligned}$$

Полагая во втором и четвертом из этих неравенств $y_n = \ln x_n$, в третьем $y_n = 1/x_n$, получим

$$f(\exp T \ln x_n) < Tf(x_n) < f(Tx_n), \quad \varphi(\exp T \ln x_n) < T\varphi(x_n) < \varphi(1/Tx_n)$$

Пусть $M(t, \sigma)$ — произвольная функция двух переменных t и σ , монотонно возрастающая с возрастанием σ , такая, что приводимые ниже интегралы Стильбеса существуют. Пусть, кроме того, оператор осреднения $Tf(t)$ определен формулой

$$Tf(t) = \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(\sigma) dM(t, \sigma) \right) \left(\int_{\alpha}^{\beta} dM(t, \sigma) \right)^{-1} \quad (\beta > \alpha \geq 0) \quad (2.4)$$

Тогда, как нетрудно показать соответствующим предельным переходом в (2.4), имеют место такие неравенства

$$f(\exp T \ln \sqrt{t}) < Tf(\sqrt{t}) < f(T \sqrt{t}), \quad \varphi(\exp T \ln \sqrt{t}) < T\varphi(\sqrt{t}) < \varphi(1/T \sqrt{t}) \quad (2.5)$$

Вводим обозначения

$$\sqrt{t_a} = T \sqrt{t}, \quad \sqrt{t_g} = \exp T \ln \sqrt{t}, \quad \sqrt{t_h} = 1/T \sqrt{t^{-1}} \quad (2.6)$$

Функционалы $\sqrt{t_a} > \sqrt{t_g} > \sqrt{t_h}$ являются, очевидно, арифметическим, геометрическим и гармоническим средними соответственно функции \sqrt{t} .

Имея в виду, что $f(\sqrt{t}) = F_0(mt)$, $\varphi(\sqrt{t}) = \Phi_0(mt)$, получим из (2.5) следующие неравенства

$$F_0(mt_g) < TF_0(mt), \quad F_0(mt_a) < F_0(mt_g) < T\Phi_0(mt) < \Phi_0(mt_h) \quad (2.7)$$

которые и составляют основу метода двусторонних оценок.

3. Для получения двусторонних оценок функций давления и расхода пористо-трещиноватого пласта в (2.6) и (2.7) нужно положить

$$dM(t, \sigma) = P(t, \sigma) d\sigma, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \infty$$

где функция $P(t, \sigma) \geq 0$ определяется формулой (1.6).

Входящие в формулы (2.6) интегралы вычисляются по следующему образцу

$$\int_0^{\infty} P(t, \sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} \frac{m_s^{c_2}(\tau)}{s} \exp[-m_s^{c_2}(\tau)\sigma] d\sigma = \frac{1}{s}, \quad \text{т. е. } \int_0^{\infty} P(t, \sigma) d\sigma = 1 \text{ и т. д.} \quad (3.1)$$

Проводя необходимые вычисления, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{t_a} &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi \tau} \left[2 \int_0^x e^{-\sigma} J_0(\sigma) d\sigma + e^{-x} J_0(x) \right], \quad \sqrt{t_h} = \sqrt{\tau/\pi} \frac{e^x}{J_0(x)} \\ \sqrt{t_g} &= \sqrt{2\tau} \exp \{1/2 [\ln x - \operatorname{Ei}(-2x)]\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь

$$x = \frac{t}{2\tau}, \quad -\operatorname{Ei}(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\sigma}}{\sigma} d\sigma$$

Из интегральных представлений (1.7) и (1.8), равенства (3.1) и определения оператора осреднения вытекает

$$TF_0(mt) = F_{\tau}(mt), \quad T\Phi_0(mt) = \Phi_{\tau}(mt)$$

Отсюда и из неравенств (2.7) получаются такие двусторонние оценки функций давления и расхода пористо-трещиноватого пласта

$$F_0(mt_g) < F_{\tau}(mt) < F_0(mt_a), \quad \Phi_0(mt_g) < \Phi_{\tau}(mt) < \Phi_0(mt_h) \quad (3.3)$$

где t_a, t_g, t_h определены равенствами (3.2).

В табл. 2 вычислены безразмерные функции $x_a = t_a/2\tau, x_g = t_g/2\tau, x_h = t_h/2\tau$ и сопоставлены значения верхних $F_+; \Phi_+$ и нижних $F_-; \Phi_-$ оценок функций давления и расхода соответственно для $\tau_0 = mt = 10$ и $\tau_0 = 100$.

Таблица 2

x	x_a	x_g	x_h	$m\tau = 10$		$m\tau = 100$		$m\tau = 10$		$m\tau = 100$	
				F_+	F_-	F_+	F_-	Φ_+	Φ_-	Φ_+	Φ_-
0	0.39	0.28	0.16	1.55	1.41	2.61	2.44	0.7	0.61	0.416	0.388
1	1.46	1.05	0.73	2.14	1.96	3.26	3.06	0.49	0.455	0.322	0.305
2	2.5	2.01	1.63	2.38	2.28	3.52	3.41	0.476	0.398	0.286	0.28
3	3.5	3.0	2.68	2.55	2.48	3.68	3.61	0.38	0.372	0.268	0.264
4	4.5	4.0	3.7	2.67	2.62	3.81	3.75	0.358	0.355	0.257	0.255
5	5.5	5.0	4.7	2.78	2.73	3.90	3.86	0.345	0.34	0.25	0.249
6	6.5	6.0	5.75	2.84	2.80	4.0	3.94	0.334	0.332	0.245	0.242
7	7.5	7.0	6.7	2.92	2.86	4.07	4.02	0.328	0.324	0.24	0.238
8	8.5	8.0	7.75	2.98	2.95	4.11	4.10	0.318	0.316	0.235	0.234
9	9.5	9.0	8.8	3.03	3.01	4.15	4.14	0.312	0.311	0.232	0.231
10	10.5	10.0	9.75	3.09	3.06	4.21	4.2	0.308	0.306	0.229	0.228

Как видно из табл. 2, максимальное расхождение верхней и нижней оценок для $F_\tau(m\tau)$ не превышает 10% при $\tau_0 = m\tau = 10$ и 7% при $\tau_0 = 100$, так что с возрастанием τ_0 расхождение убывает. Из той же табл. 2 усматривается, что максимальное расхождение верхней и нижней оценок $\Phi_\tau(m\tau)$ не превышает 13% при $\tau_0 = 10$ и 5% при $\tau_0 = 100$, причем с увеличением τ_0 также наблюдается уменьшение расхождения.

При $\tau_0 = 0$ из (3.2) видно, что $t_a = t_g = t_h = t$, так что расхождение верхней и нижней оценок (3.3) убывает и в направлении уменьшения времени запаздывания. Следовательно, максимальное расхождение найденных оценок достигается при каком-то небольшом τ_0 , выше и ниже которого оценки сближаются.

Из оценок (3.3) наиболее простой будет нижняя, которой и рекомендуется пользоваться для приближенного вычисления функций давления и расхода. На фиг. 1,2 указаны графики нижних оценок в функции безразмерного времени $t_0 = mt$ при различных значениях безразмерного времени запаздывания.

При $\tau_0 = m\tau \geq 100$ нижняя оценка функции давления с небольшой погрешностью, убывающей со временем, может быть представлена в виде

$$F_0(mt_g) \approx \frac{1}{2} [\ln(4/\gamma) mt - Ei(-t/\tau)]$$

Это приближение функции $F_\tau(m\tau)$ было найдено в [7] отличным от указанного выше способом.

Исследование кривых, приведенных на фиг. 1, показывает, что функция давления, исключая случай $\tau = 0$, претерпевает при $t = 0$ скачок непрерывности тем большей величины, чем больше время запаздывания. Кроме того, при сравнительно больших mt кривая функции давления имеет ясно выраженную горизонтальную площадку, длина которой находится в прямой зависимости от времени запаздывания, после чего довольно быстро выходит на асимптоту $\frac{1}{2} \ln(4/\gamma) mt$, общую для всего семейства.

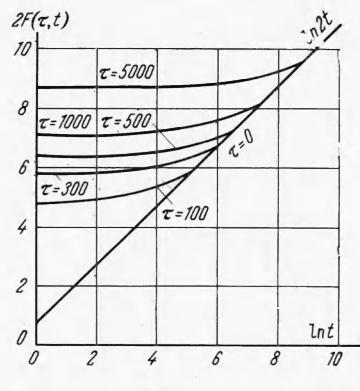
Таким образом, изменение давления ступенькой при резком изменении (ограничении или увеличении) расхода скважины является характерным признаком («индикатором») пористо-трещиноватого пласта, трещины которого имеют пренебрежимо малую сжимаемость. Кривые такого рода встречаются при исследовании некоторых нагнетательных скважин нефтяного месторождения Кюровдаг АзербССР (фиг. 3).

4. Применим для получения приближенного выражения функции давления пористо-трещиноватого пласта метод осреднения [6], хорошо зарекомендовавший себя при решении многих задач нестационарной фильтрации в пористом пласте. Однако формальное его применение к данной задаче приводит к большим трудностям, которые можно обойти указанным ниже способом.

Введем безразмерные переменные

$$\lambda = \frac{t}{\tau}, \quad \xi = \frac{r}{V\sqrt{\pi\tau}}, \quad V(\xi, \lambda) = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{U(r, t)}{\Delta q_0}$$

для упрощения станем считать радиус скважины пренебрежимо малым.



Фиг. 1

Тогда задача (1) приведется к следующей: решить уравнение

$$\nabla^2 V = \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{\nabla \partial^2 V}{\partial \lambda} \quad (4.1)$$

при начальном и граничных условиях:

$$V(\xi, \lambda = 0) = 0, \quad -(\xi \partial V / \partial \xi)_{\xi=0} = 1, \quad V(\xi = \infty, \lambda) = 0$$

Вводим функцию

$$V(\xi, \lambda) = W(\xi, \lambda) + \partial W(\xi, \lambda) / \partial \lambda \quad (4.2)$$

которая согласно работе [1] пропорциональная давлению в пористых блоках, между тем как функция V пропорциональна давлению в трещинах. Непосредственно проверяется, что функция W удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 W = dW / \partial \lambda - \partial \nabla^2 W / \partial \lambda \quad (4.3)$$

которое следует решать при начальном и граничных условиях

$$W(\xi, \lambda = 0) = 0, \quad (\xi \partial W / \partial \xi)_{\xi=0} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\xi \partial W / \partial \xi)_{\xi=0} = -1, \quad W(\xi = \infty, \lambda) = 0 \quad (4.4)$$

Если обозначить

$$q(\lambda) = -\xi \partial W / \partial \xi \quad (4.5)$$

то первое из граничных условий (4.4) можно переписать в виде

$$\partial q / \partial \lambda + q = 1 \quad (4.6)$$

Решая это дифференциальное уравнение в предположении

$$q(0) = 0 \quad (4.7)$$

согласующемся с физическими представлениями, находим

$$q(\lambda) = 1 - e^{-\lambda} \quad (4.8)$$

Следуя методу осреднения, заменим правую часть (4.3) средней величиной

$$F(\lambda) := \left\langle \frac{\partial W}{\partial \lambda} - \frac{\partial \nabla^2 W}{\partial \lambda} \right\rangle \quad (4.9)$$

В (4.9) скобки означают операцию осреднения, применимую к любой функции $f(\xi)$, определенной при $\xi \geq 0$

$$\langle f(\xi) \rangle = \frac{2}{R_1} \int_0^{R_1} f(\xi) \xi d\xi \quad (4.10)$$

Таким образом, сопоставляя (4.9) с (4.3), имеем $\nabla^2 W = F(\lambda)$ в области $0 \leq \xi \leq R(\lambda)$ с подвижной границей $R(\lambda)$, на которой выполняются равенства

$$W(R, \lambda) = R \partial W / \partial R = 0 \quad (4.11)$$

Из (4.9) и (4.10) находим

$$F + dF / d\lambda = \langle \partial W / \partial \lambda \rangle \quad (4.12)$$

Функцию $\langle \partial W / \partial \lambda \rangle$ получаем из (4.10), (4.11) следующим образом: интегрируя (4.10) по ξ , будем иметь в области $0 \leq \xi \leq R$

$$-\xi \partial W / \partial \xi = 1/2 F(R^2 - \xi^2) \quad (4.13)$$

Отсюда при $\xi = 0$ с использованием (4.5)

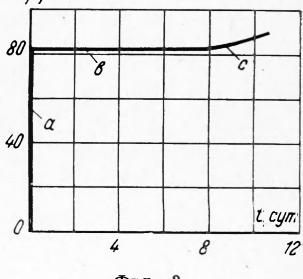
$$q(\lambda) = 1/2 FR^2 \quad (4.14)$$

Дальнейшее интегрирование (4.13) с учетом (4.14) приводит к результату

$$W(\xi, \lambda) = q(\lambda) \left[\ln \frac{R}{\xi} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{R^2} \right) \right] \quad (4.15)$$

Дифференцируя (4.15) по λ и затем осредняя, получим

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right\rangle = \frac{1}{4} R^{-2} \frac{d}{d\lambda} (q R^2) \quad (4.16)$$



Фиг. 2

Фиг. 3

Подставляя (4.16) в (4.12) и заменяя F и $dF/d\lambda$ выражениями, найденными из (4.14), получим, воспользовавшись в результате равенством (4.6), такое дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\lambda} (qR^2) = \frac{8(1+e^{-\lambda})}{1+8R^{-2}} \quad (4.17)$$

Пусть $\lambda \leq \lambda_1$. При замене в (4.17) функции $R(\lambda)$ на $R(\lambda_1)$, в силу физически очевидного неравенства $R(\lambda) \leq R(\lambda_1)$, правая часть этого уравнения будет завышена. Тогда по теореме о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина для получения верхней границы функции $R(\lambda)$ будем иметь дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\lambda} (qR^2) = \frac{8(1+e^{-\lambda})}{1+8R^{-2}(\lambda_1)}$$

Интегрируя последнее в пределах $(0, \lambda_1)$ и принимая во внимание условие $q(0) = 0$, найдем

$$R^2(\lambda_1) = \frac{8\lambda_1}{1-e^{-\lambda_1}}$$

Поскольку величина λ_1 произвольна, предыдущее равенство будет иметь место для всех λ и дает верхнюю границу

$$R^2(\lambda) = \frac{8\lambda}{1-e^{-\lambda}} \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.15) и пренебрегая малыми по отношению к R слагаемыми, в итоге получаем

$$W(\xi_1; \lambda) = \frac{1}{2}(1-e^{-\lambda}) \left[\ln \frac{8\lambda}{\xi_1^2(1-e^{-\lambda})} - 1 \right], \quad \xi_1^2 = \frac{r_1^2}{\pi\tau}$$

Отсюда по равенству (4.2) находим, переходя сразу же к размерным переменным

$$F_\tau(mt) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{8t}{1-\exp(-t/\tau)} + \frac{1}{2} \frac{\tau}{t} \left(1 - \exp \frac{-t}{\tau} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \exp \frac{-t}{\tau} \right)$$

Это приближение при больших $mt \geq 100$ и $t\tau \geq 100$ очень близко к ранее полученной верхней оценке, однако при малых значениях этих параметров данное приближение перестает быть удовлетворительным.

Поступила 29 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

- Баренблат Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
- Баренблат Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнения фильтрации жидкости в трещиноватых породах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
- Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. «Наука», 1965.
- Чекалюк Э. Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа. ГИТЛ УССР, 1961.
- Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. т. 1. Гостехиздат, 1965.
- Гусейнов Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Азнефтешр, 1961.
- Warren J. E., Root P. J. The Behaviors of Naturally Fractured Reservoirs. Soc. Petrol. Engnrs J., 1963, vol. 3, No. 3.