

УДК 531.391.1:532.5.011+66.063.8

## ДВИЖЕНИЕ ГИБКОЙ НИТИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. Шаповалов

Волжский политехнический институт Волгоградского государственного  
технического университета, 404121 Волгоград

Поставлена и решена двумерная задача о конфигурации гибкой нити конечной длины, находящейся в деформируемой вязкой жидкости. Изгибные напряжения в нити, силы инерции и тяжести не учитывались. Составлены уравнения равновесия. Действующая на поверхность нити со стороны вязкой жидкости сила трения пропорциональна скорости обтекания. Численно исследованы закономерности эволюции изогнутой нити в условиях чистого сдвига и простого сдвига жидкости. Для эволюции прямолинейной нити получены аналитические решения, в частности, найдено растягивающее усилие в нити. Для указанных типов течений исследована устойчивость прямолинейной нити к малым возмущениям.

Одной из проблем получения армированных полимерных композиций является перемешивание волокон с полимерной матрицей. В процессе перемешивания возникающие в волокнах усилия таковы, что наполнитель из стальной проволоки рвется, а стеклянные волокна превращаются в пыль [1–3]. Это снижает прочность изделий. Кроме того, отсутствует теоретическое объяснение так называемого *каландрового эффекта*, который проявляется в анизотропии прочностных свойств хаотически армированных полимерных композиций. Эффект обусловлен ориентацией волокон наполнителя вдоль направления каландрования. Экспериментальное исследование динамики отдельного волокна и измерение растягивающих усилий сопряжены со значительными техническими трудностями. Теоретическое описание этого процесса, насколько известно автору, отсутствует.

Среди теоретических исследований динамического воздействия потока жидкости (газа) на гибкую нить следует отметить работы [4, 5]. В [4] решена задача об изменении формы троса змейкового аэростата под действием ветра. Аналогичной является задача А. Н. Крылова об условиях равновесия шаровой мины, поставленной на течении [5]. Динамическое воздействие потока вязкой жидкости на консольно выступающее волокно наполнителя анализируется в работе [6]. Для определения упругой линии волокна предложено разбить его длину на конечное число участков, в пределах которых жесткость волокна постоянна, а внешние нагрузки (силы и моменты) действуют только на концах участков.

Целью настоящей работы являются теоретическое исследование эволюции формы и натяжения нерастяжимой гибкой нити конечной длины в условиях чистого сдвига и плоского куэттовского течения вязкой жидкости, анализ механизма «ориентирующего» воздействия жидкости на прямолинейную нить, а также исследование устойчивости прямолинейной нити к малым возмущениям.

**1. Постановка задачи.** В общем случае поле скоростей в смесителях трехмерно, но для выяснения основных закономерностей (эволюции формы и натяжения) ограничимся рассмотрением двумерного течения. Например, в смесительных вальцах поле скоростей двумерно. При этом у поверхности валков преобладает простой сдвиг, а в средней части зоны течения деформация материала близка к чистому сдвигу [7].

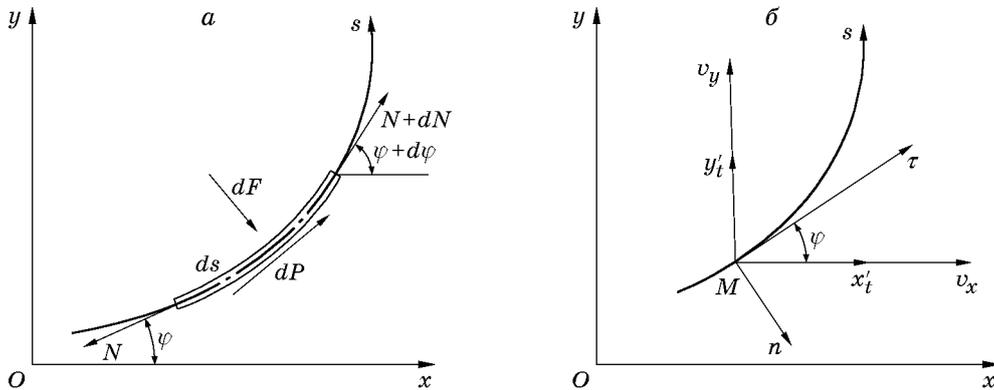


Рис. 1

Рассматривается идеально гибкая нить в потоке вязкой жидкости (рис. 1,а). Так как такая нить не оказывает сопротивления изгибу, то единственная внутренняя сила есть сила натяжения  $N$ , действующая по направлению касательной к оси нити. Силы инерции и тяжести в сравнении с осевым натяжением пренебрежимо малы. Нить не соприкасается с другими нитями. Со стороны деформируемой вязкой жидкости на нее действует сила трения, но поле скоростей в жидкости не нарушается. Упругие деформации, связанные с растяжением или сжатием нити, не учитываются. На нити отсутствуют участки большой (или бесконечной) кривизны. Течение ламинарное, изотермическое. Ось нити остается плоской кривой.

Составим уравнения равновесия. В декартовых координатах  $xOy$  конфигурация оси нити в параметрической форме описывается функциями  $x(s), y(s)$ , где  $s$  — координата, отсчитываемая вдоль оси нити. Ось нити лежит в плоскости  $xOy$ . На элемент нити длиной  $ds$  со стороны жидкости действует сила трения, проекция которой на нормаль равна  $dF$ , а на касательную —  $dP$  (рис. 1,а). Угол между горизонтальным направлением, которое примем за направление оси  $x$ , и касательной к оси нити обозначим  $\varphi$ . Тогда уравнения равновесия (уравнения Кирхгофа) имеют вид

$$\Sigma X = 0: (N + dN) \cos(\varphi + d\varphi) - N \cos \varphi + dF \sin(\varphi + d\varphi/2) + dP \cos(\varphi + d\varphi/2) = 0,$$

$$\Sigma Y = 0: (N + dN) \sin(\varphi + d\varphi) - N \sin \varphi + dP \sin(\varphi + d\varphi/2) - dF \cos(\varphi + d\varphi/2) = 0.$$

С учетом соотношений

$$\cos(\varphi + d\varphi) = \cos \varphi - d\varphi \sin \varphi + \dots, \quad \sin(\varphi + d\varphi) = \sin \varphi + d\varphi \cos \varphi + \dots,$$

пренебрегая бесконечно малыми выше первого порядка, получим уравнения

$$d(Nx') + y' dF + x' dP = 0; \tag{1.1}$$

$$d(Ny') + y' dP - x' dF = 0. \tag{1.2}$$

Учитывались соотношения  $\sin \varphi = dy/ds = y'$ ,  $\cos \varphi = dx/ds = x'$ . Здесь и ниже штрих обозначает производную по  $s$ .

Уравнение связи (условие нерастяжимости оси нити)

$$(x')^2 + (y')^2 = 1 \tag{1.3}$$

продифференцируем по  $s$ :

$$x''x' + y''y' = 0. \tag{1.4}$$

Умножим уравнение (1.1) на  $x'$ , а уравнение (1.2) — на  $y'$ ; сложив их, с учетом (1.3), (1.4) имеем

$$dN + dP = 0. \quad (1.5)$$

Аналогично, умножая уравнение (1.1) на  $y'$ , а (1.2) — на  $x'$  и вычитая полученные равенства, с учетом соотношений (1.3), (1.4) получим второе уравнение равновесия

$$F' - Ny''/x' = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения эволюции формы плоской нити получим, учитывая в (1.5), (1.6) зависимость силы трения от скорости жидкости и нити. В безынерционном приближении изменение силы трения, обусловленное деформацией жидкости, вызовет синхронное изменение конфигурации нити и натяжения.

Рассмотрим составляющие силы трения. Предполагаем, что нить смачивается жидкостью и выполняется условие прилипания. Минимальный радиус кривизны значительно больше диаметра нити. У поверхности движущейся нити имеется трехмерный пограничный слой. В силу линейности уравнений Стокса (безынерционное приближение для малых чисел Рейнольдса) движение в пограничном слое можно рассматривать как наложение двух движений: поперечного и продольного обтекания нити. Отметим, что для неньютоновских жидкостей принцип суперпозиции течений не выполняется.

При поперечном обтекании бесконечного цилиндра сила трения определяется формулой Ламба [8]

$$dF = B_n \Delta v_n ds, \quad (1.7)$$

где  $B_n = 4\pi\mu/\ln(7,4/\text{Re})$ ;  $\text{Re} = \langle v \rangle d\rho/\mu$  — число Рейнольдса;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $d$  — диаметр нити;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\Delta v_n$  — относительная скорость поперечного обтекания;  $\langle v \rangle$  — характерная скорость.

В формуле (1.7) коэффициент  $B_n$  учитывает влияние диаметра нити. В широком интервале чисел Рейнольдса он изменяется незначительно (при возрастании  $\text{Re}$  от  $10^{-8}$  до  $10^{-3}$  коэффициент  $B_n$  увеличивается в 2,3 раза). Поэтому значение  $B_n$  принимается постоянным, соответствующим характерной скорости обтекания нити жидкостью.

При перемешивании систем, наполненных волокнами, течение жидкости вокруг отдельного волокна топологически ограничено гидродинамическим влиянием соседних волокон, которые вокруг него образуют подобие трубки. Поэтому в первом приближении рассматриваем нить, аксиально движущуюся в цилиндрической трубке, заполненной вязкой жидкостью (осесимметричное течение Куэтта). Радиус условной трубки  $\langle r \rangle$  определяется средним расстоянием между волокнами и связан с их объемной концентрацией  $\langle c \rangle$  соотношением [9]  $\langle r \rangle = d/(2,1\sqrt{\langle c \rangle})$  ( $d$  — диаметр нити,  $\langle c \rangle = 0,05 \div 0,30$ ). В этом случае осевая сила трения, действующая на поверхность нити, определяется формулой [8]

$$dP = A_\tau \Delta v_\tau ds, \quad (1.8)$$

где  $A_\tau = \pi d\mu/[\langle r \rangle \ln(2\langle r \rangle/d)] = 2,1\pi\mu/\ln(0,952/\sqrt{\langle c \rangle})$ ;  $\Delta v_\tau$  — относительная скорость продольного обтекания нити жидкостью.

Формулы (1.7), (1.8) верно отражают линейную зависимость силы трения от скорости при ламинарном течении, хотя возможно уточнение численных значений коэффициентов  $A_\tau$  и  $B_n$ .

Стационарное плоское поле скоростей жидкости характеризуется компонентами  $v_x(x, y)$ ,  $v_y(x, y)$ . Для произвольной точки  $M$  нити компоненты скорости имеют вид  $\partial x/\partial t = \dot{x}$ ,  $\partial y/\partial t = \dot{y}$  (рис. 1, б). Сила вязкого трения обусловлена некоторым отставанием нити от движущейся окружающей жидкости. Например, в направлении оси  $x$  скорость

жидкости  $v_x$  превышает скорость нити  $\dot{x}$  на величину  $v_x - \dot{x}$ . Проектируя скорости на касательную и нормаль к оси нити, для относительных скоростей получим выражения

$$\Delta v_n = (v_x - \dot{x}) \sin \varphi - (v_y - \dot{y}) \cos \varphi, \quad \Delta v_\tau = (v_x - \dot{x}) \cos \varphi + (v_y - \dot{y}) \sin \varphi.$$

Точкой обозначены производные по  $t$ . Как и в (1.1), заменив тригонометрические функции величинами  $x', y'$ , имеем

$$\Delta v_n = (v_x - \dot{x})y' - (v_y - \dot{y})x', \quad \Delta v_\tau = (v_x - \dot{x})x' + (v_y - \dot{y})y'. \quad (1.9)$$

Рассматривая совместно (1.3), (1.5)–(1.9), получим систему уравнений, описывающих нестационарную деформацию гибкой нити:

$$\begin{aligned} N' + A_\tau[(v_x - \dot{x})x' + (v_y - \dot{y})y'] &= 0, \\ B_n[(v_x - \dot{x})y' + (v_y - \dot{y})x'] - Ny''/x' &= 0, \quad (x')^2 + (y')^2 = 1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнения (1.10) необходимо дополнить начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad x &= x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad N = 0; \\ t > 0: \quad s &= \pm l, \quad N = 0, \quad y'' = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $2l$  — длина нити;  $x_0(s), y_0(s)$  — параметрическое описание начальной формы нити. Принимаем отсчет  $s$  от середины нити: вправо — положительное направление, влево — отрицательное (рис. 1). Согласно (1.6) или второму уравнению в (1.10) отсутствие растягивающего усилия на свободных концах нити эквивалентно нулевой кривизне конца нити  $y'' = x'' = 0$  при  $s = \pm l$ . Начальное натяжение отсутствует.

Проанализируем два реологических типа двумерных течений: чистый сдвиг и простой сдвиг. В случае чистого сдвига компоненты скорости  $v_x(x, y), v_y(x, y)$  определяются соотношениями [10]

$$v_x = g|\gamma|x, \quad v_y = -g|\gamma|y. \quad (1.12)$$

Здесь  $\gamma = \partial v_x / \partial x$  — скорость деформации;  $g = \text{sign } \gamma$  — параметр, характеризующий направление течения (при  $g = 1$  имеет место растяжение по оси  $x$  и сжатие по  $y$ , при  $g = -1$  — сжатие по оси  $x$  и растяжение по  $y$ ).

В случае простого сдвигового течения (течения Куэтта) рассматривается стационарное движение жидкости между двумя неограниченными плоскостями, параллельными и равноудаленными от оси  $x$ , причем верхняя движется с постоянной скоростью в положительном направлении  $x$ , а нижняя — с той же скоростью в отрицательном направлении. В зазоре устанавливается ламинарный режим течения с линейным профилем скорости. Ось  $x$  лежит в горизонтальной плоскости и остается неподвижной. Также можно считать, что ось  $x$  конвективной системы координат «вморожена» в срединный слой жидкости. Компоненты скорости для простого сдвига [10] имеют вид

$$v_x = g|\gamma_-|y, \quad v_y = 0. \quad (1.13)$$

Здесь  $\gamma_- = \partial v_x / \partial y$  — скорость сдвига;  $g = \text{sign } \gamma_-$  — параметр, характеризующий направление течения: при  $g = 1$  верхняя плоскость движется слева направо, нижняя — справа налево, при  $g = -1$  плоскости движутся в противоположном направлении (верхняя — справа налево, нижняя — слева направо).

**2. Движение нити в условиях чистого сдвига.** Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = t|\gamma|, \quad \{X, X_0, Y, Y_0, S\} = \{x, x_0, y, y_0, s\}/l, \quad N_+ = N/(A_\tau|\gamma|l^2), \quad E = A_\tau/B_n. \quad (2.1)$$

Для компонент скорости жидкости (1.12) задача (1.10), (1.11) в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{aligned} N'_+ + (gX - \dot{X})X' - (gY + \dot{Y})Y' &= 0, \\ (gX - \dot{X})Y'X' + (gY + \dot{Y})(X')^2 - EN_+Y'' &= 0, \quad (X')^2 + (Y')^2 = 1, \\ \tau = 0: \quad X &= X_0(S), \quad Y = Y_0(S), \quad N_+ = 0, \\ \tau > 0: \quad S = 0: \quad X &= 0, \quad Y = 0; \quad S = 1: \quad N_+ = 0, \quad Y'' = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее точкой обозначены производные по  $\tau$ , штрихом — по  $S$ . Граничные условия в (2.2) записаны для центральносимметричной исходной конфигурации нити. Середина нити находится в начале координат, и выполняются соотношения  $X(S) = -X(-S)$ ,  $Y(S) = -Y(-S)$ . При этом для симметричных полей скорости жидкости (1.12) и (1.13) середина нити в процессе ее деформации всегда будет находиться в начале координат (снят конвективный снос нити). В данном случае достаточно рассмотреть эволюцию правой половины нити ( $0 \leq S \leq 1$ ).

Согласно (2.1), (2.2) вязкость жидкости определяет натяжение, но не влияет на эволюцию формы. При прочих равных условиях натяжение нити пропорционально вязкости, скорости деформации и квадрату длины нити. Экспериментальные данные [1–3] подтверждают усиление обрывности волокнистого наполнителя с повышением вязкости среды и скорости деформации [1], а также начальной длины волокон [2, 3]. На эволюцию формы влияют поле скоростей жидкости, соотношение сил трения  $E$  и исходная конфигурация нити.

Численный анализ задачи (2.2) выполнен для условий процесса перемешивания поликапроамидных волокон с резиновой матрицей ( $d = 30$  мкм,  $2l = 10^{-2}$  м,  $|\gamma| = 18$  с $^{-1}$ ,  $\mu = 10^5$  Па·с,  $\rho = 1200$  кг/м $^3$ ,  $\langle c \rangle = 0,05$ ,  $\langle v \rangle \approx |\gamma|l/2$ ,  $Re = 4,32 \cdot 10^{-8}$ ,  $E = 1,53$ ). Вместо второго уравнения в (2.2) использовалось уравнение, полученное путем исключения  $\dot{X}$  из первых двух уравнений:

$$EN_+Y'' + N'_+Y' - gY = \dot{Y}, \quad (2.3)$$

что повышает устойчивость разностной схемы. Решение находилось на разностной прямоугольной сетке  $\Delta S = 0,01$ ,  $\Delta \tau = 0,0025$ . Натяжение  $N_+$  определялось из первого уравнения (2.2) методом левой двухточечной прогонки (схема «неявный правый угол» [11]) начиная с точки  $S = 1$ . Из уравнения (2.3) методом левой трехточечной прогонки (схема Кранка — Николсона) находились значения  $Y$  на верхнем временном слое. Уравнение связи (третье в (2.2)) использовалось для нахождения  $X$ . Значения  $N_+$ ,  $Y$ ,  $X$  на верхнем временном слое уточнялись итерациями.

На рис. 2, *а, б* представлены эволюции конфигурации нити и распределения натяжения по длине соответственно для  $\tau = 0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6$  (кривые 1–6). На рис. 2, *б* (так же как на рис. 3, *б*) кривая 1 для  $N_+$  получена на первом шаге по времени. Исходная форма

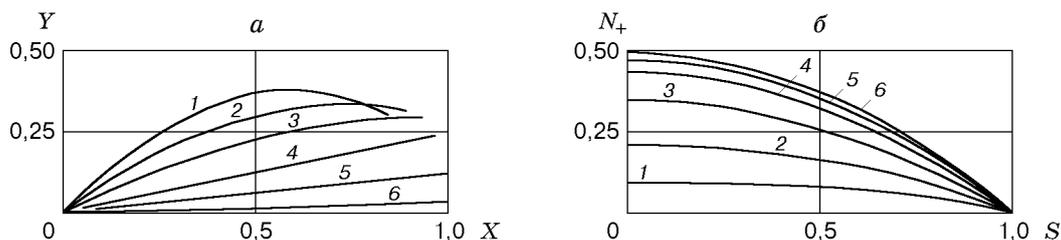


Рис. 2

нити описывалась синусоидой  $Y_0 = a \sin(\omega X_0)$ ,  $a = 0,4$ ,  $\omega = 2,7$ . Направление течения  $g = 1$ . На рис. 2 видно, что в эволюции нити произвольной начальной формы условно можно выделить два периода. В первом периоде распределение растягивающего усилия по длине нити неоднородно, возможны даже участки сжатия. Кривизна нити уменьшается вплоть до  $Y'' = 0$ . Эволюция зависит от исходной конфигурации. Во втором периоде нить, сохраняя прямолинейную форму, совершает поворот вокруг точки  $X = Y = 0$  по направлению течения. Эволюция не зависит от исходной конфигурации. Распределение натяжения описывается параболой с вершиной в точке  $S = 0$ . При  $\tau \rightarrow \infty$  ось нити совпадает с линией тока, проходящей через начало координат. Для  $g = 1$  линия тока совпадает с осью  $X$  (для  $g = -1$  — с осью  $Y$ ). По окончании второго периода натяжение в нити достигает максимума  $N_{\max} = N_{(S=0)} = 0,5A_\tau|\gamma|l^2$ . Вероятно, именно этот момент опасен с точки зрения разрушения наполнителя при низкой его прочности на растяжение.

Эволюция нити обратима: если изменить направление течения жидкости (инвертировать знак  $g$ ), то нить будет перемещаться в первоначальное положение.

Анализ задачи (2.2) показал, что изначально прямолинейная нить в процессе эволюции сохраняет прямолинейную форму, а распределение натяжения по длине описывается параболической зависимостью. Ее эволюция соответствует второму периоду эволюции криволинейной нити. Для прямолинейной нити можно получить аналитическое решение задачи (2.2).

Пусть угол наклона прямолинейной нити к оси  $X$  описывается функцией  $\varphi(\tau)$ . Начальное условие для нити

$$\varphi = \varphi_0, \quad \tau = 0. \quad (2.4)$$

Для функций  $X, Y$  примем выражения, удовлетворяющие уравнению связи (третьему в (2.2)):

$$Y = S \sin \varphi, \quad X = S \cos \varphi. \quad (2.5)$$

Распределение натяжения по длине нити параболическое:

$$N_+ = \Psi(\tau)(1 - S^2). \quad (2.6)$$

Подставив (2.5), (2.6) в первые два уравнения (2.2), после несложных преобразований получим уравнения для функций  $\Psi(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$

$$\Psi = 0,5g \cos 2\varphi, \quad \dot{\varphi} = -g \sin 2\varphi. \quad (2.7)$$

Интегрируя второе уравнение с учетом начального условия (2.4), найдем зависимость угла наклона от времени

$$\varphi = \arctg[\tg \varphi_0 \exp(-2g\tau)]. \quad (2.8)$$

Таким образом, эволюция прямолинейной нити описывается уравнениями

$$\begin{aligned} Y = S \sin \varphi, \quad X = S \cos \varphi, \quad N_+ = 0,5g(1 - S^2) \cos 2\varphi, \\ \varphi = \arctg[\tg \varphi_0 \exp(-2g\tau)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Согласно (2.9) при  $\varphi = \pi/4$  натяжение нити нулевое:  $N_+ = 0$ . Растягивающие усилия имеют место в секторе  $|\varphi| < \pi/4$  при  $g = 1$  или  $\pi/2 > |\varphi| > \pi/4$  при  $g = -1$ . Растягивающее усилие достигает максимума в середине нити  $S = 0$  при  $\varphi = 0$ ,  $g = 1$  либо при  $|\varphi| = \pi/2$ ,  $g = -1$  и составляет  $N_+ = 0,5$  (в размерной форме  $N_{\max} = N_{(S=0)} = 0,5A_\tau|\gamma|l^2$ ). При этом «эффективная продольная вязкость» системы, наполненной ориентированными в направлении растяжения волокнами, максимальна (превышает вязкость матрицы). При ориентации волокон  $|\varphi| = \pi/4$  их натяжение нулевое, а эффективная вязкость системы близка к вязкости матрицы.

Решение (2.9) описывает эволюцию при любой ориентации нити, даже при наличии в ней сжимающих усилий. Однако численный анализ задачи (2.2) показал, что в случае сжимающих усилий в нити вычислительная схема теряет устойчивость. При этом середина нити ( $|S| \leq 0,2$ ), где сжимающие усилия максимальны, непосредственно перед потерей устойчивости разностной схемы приобретает пилообразную форму с периодом примерно  $2\Delta S$ . Вероятно, причиной сильного разрушения стеклянных волокон наполнителя является их изгиб при продольном сжатии в средней части волокна (см. [1, 3]).

Для определения границ применимости решения (2.9), а также устойчивости уравнений (2.2) имеет смысл проанализировать устойчивость решения к малым возмущениям. Задача об устойчивости формулируется следующим образом. Пусть в некоторый момент времени положение прямолинейной нити характеризуется углом  $\varphi$ . Зададим приращения функций  $X, Y, N_+$ . Требуется выяснить, будет ли возмущение, вызванное этими приращениями, неограниченно нарастать или затухать.

Исследуем «быструю» неустойчивость в начальный момент эволюции нити, полагая, что возмущения растут настолько быстро, что невозмущенное движение может считаться «замороженным». Рассматриваемая гидромеханическая система не обладает «памятью», поэтому любое промежуточное положение прямолинейной нити, характеризуемое углом  $\varphi$ , можно рассматривать как начальное. Следовательно, при анализе устойчивости угол  $\varphi$  в уравнениях будем рассматривать как параметр.

Для решения (2.9) введем малые возмущения формы нити  $\alpha, \beta$  и натяжения  $\Upsilon$

$$\begin{aligned} X &= S \cos \varphi + \alpha(\tau, S), & Y &= S \sin \varphi + \beta(\tau, S), \\ N_+ &= 0,5g(1 - S^2) \cos 2\varphi + \Upsilon(\tau, S), & |\alpha, \beta, \Upsilon| &\ll 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставив (2.10) в (2.2) и выполнив линеаризацию, получим следующие уравнения для отклонений:

$$\begin{aligned} \Upsilon' + (g\alpha - \dot{\alpha}) \cos \varphi + \alpha' g S \cos \varphi \cos 2\varphi - (g\beta + \dot{\beta}) \sin \varphi + \beta' g S \sin \varphi \cos 2\varphi &= 0, \\ 0,5Eg(1 - S^2)\beta'' \cos 2\varphi + \Upsilon' \sin \varphi - \beta' g S \cos 2\varphi - g\beta - \dot{\beta} &= 0, & \alpha' + \beta' \operatorname{tg} \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь для  $\dot{\varphi}$  использовалось соотношение (2.7).

Анализ устойчивости сводится к исследованию задачи на собственные значения для системы (2.11) с граничными условиями

$$S = 0: \quad \alpha = \beta = 0, \quad \Upsilon = \Upsilon_0, \quad \beta' = \beta'_0; \quad S = 1: \quad \Upsilon = 0, \quad \beta'' = 0. \quad (2.12)$$

Представим возмущения в виде  $\{\alpha, \beta, \Upsilon\} = \{A, B, C\} \exp(\lambda\tau)$ , где  $A(S), B(S), C(S)$  — собственные функции задачи;  $\lambda$  — собственное значение. В соответствии с (2.11) и (2.12) для собственных функций получим задачу

$$\begin{aligned} C' + A(g - \lambda) \cos \varphi + A' g S \cos \varphi \cos 2\varphi - B(g + \lambda) \sin \varphi + B' g S \sin \varphi \cos 2\varphi &= 0, \\ 0,5Eg(1 - S^2)B'' \cos 2\varphi + C' \sin \varphi - B' g S \cos 2\varphi - (g + \lambda)B &= 0, & A' + B' \operatorname{tg} \varphi &= 0, \\ S = 0: \quad A = B = 0, \quad C = C_0, \quad B' = B'_0; \quad S = 1: \quad C = 0, \quad B'' &= 0. \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее уравнение с учетом граничных условий, получим  $A = -B \operatorname{tg} \varphi$ . Функции  $A$  и  $B$  линейно зависимы, что позволяет исключить функцию  $A$ , а для функций  $B$  и  $C$  записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 0,5Eg(1 - S^2)B'' \cos 2\varphi - B' g S \cos 2\varphi - (g \cos 2\varphi + \lambda)B &= 0, & C' &= 2Bg \sin \varphi, \\ S = 0: \quad B = 0, \quad C = C_0, \quad B' = B'_0; \quad S = 1: \quad C = 0, \quad B'' &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Собственные функции определены с точностью до произвольного множителя, поэтому без ограничения общности можно положить  $B'_0 = 1$ .

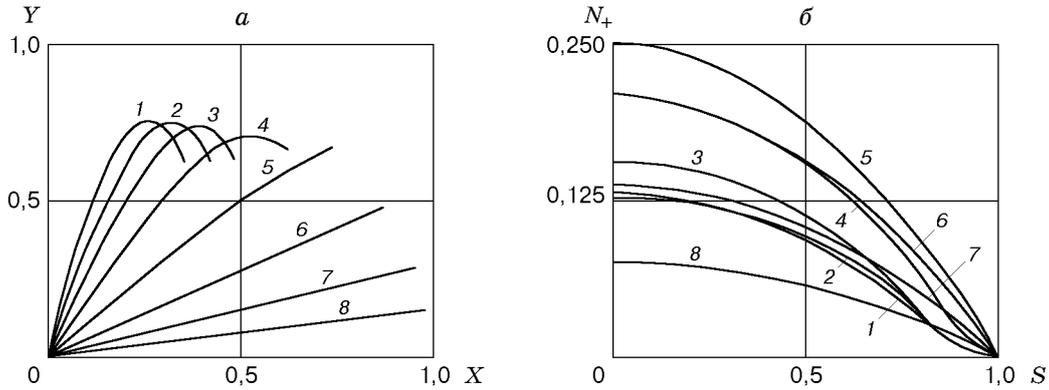


Рис. 3

Решение задачи (2.13) ищем в плоскости Гаусса. Для этого введем следующие обозначения:  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ ,  $B = B_r + iB_i$ ,  $C = C_r + iC_i$ . Для функций и собственного числа имеем  $B_r = B_i = S$ ,  $C_r = C_i = g(S^2 - 1) \sin \varphi$ ,  $\lambda_r = -2g \cos 2\varphi$ ,  $\lambda_i = 0$ .

Поскольку  $\lambda_i = 0$ , в системе отсутствуют колебания. Отметим идентичность зависимости собственного числа  $\lambda_r$  и натяжения нити  $N_+$  в (2.9) от  $\varphi$ . Поэтому область устойчивых деформаций соответствует области растягивающих усилий ( $N_+ > 0$ ). При  $g = 1$  и  $|\varphi| < \pi/4$  течение устойчиво ( $\lambda_r < 0$ ). Значения параметров  $\varphi = \pi/4$ ,  $\lambda_r = 0$ ,  $N_+ = 0$  соответствуют нейтральной устойчивости нити. При  $g = 1$  и  $\pi/2 > |\varphi| > \pi/4$  возмущения неограниченно возрастают ( $\lambda_r > 0$ ), а движение нити неустойчиво. Действительно, в этой области наблюдалась потеря устойчивости разностной схемы для уравнения (2.2). Таким образом, решение для прямолинейной нити (2.9) правомерно в области  $|\varphi| < \pi/4$  при  $g = 1$  и  $\pi/2 > |\varphi| > \pi/4$  при  $g = -1$ .

**3. Простой сдвиг (течение Куэтта).** Подставляя компоненты скорости (1.13) в уравнения (1.10), (1.11) в безразмерных переменных (2.1), получим следующую задачу:

$$\begin{aligned}
 N_+' + (gY - \dot{X})X' - \dot{Y}Y' &= 0, \\
 (gY - \dot{X})Y'X' + \dot{Y}(X')^2 - EN_+Y'' &= 0, \quad (X')^2 + (Y')^2 = 1, \\
 \tau = 0: \quad X = X_0(S), \quad Y = Y_0(S), \quad N_+ &= 0, \\
 \tau > 0: \quad S = 0: \quad X = 0, \quad Y = 0; \quad S = 1: \quad N_+ &= 0, \quad Y'' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

При этом в выражениях для  $\tau$  и  $N_+$  используется скорость сдвига  $|\gamma_-|$ .

На рис. 3, *a, б* представлена эволюция формы и натяжения нити синусоидальной формы соответственно в условиях простого сдвига для  $\tau = 0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4$  (кривые 1–8). Расчеты выполнены для условий, указанных в п. 2, но при  $a = 0,75$ ,  $\omega = 6$ ,  $g = 1$ . На рис. 3, так же как на рис. 2, видно, что движение нити может быть разделено на два периода. В первом периоде кривизна нити уменьшается, эволюционируя к прямолинейной форме, во втором прямолинейная нить совершает поворот в направлении течения.

Характер изменения натяжения существенно отличается от случая чистого сдвига. В первом периоде натяжение возрастает, а его распределение постепенно принимает параболическую форму. Во втором периоде ( $\tau > 0,8$ ) натяжение, сохраняя параболический характер распределения по длине нити, уменьшается до нуля. (Ниже показано, что максимальное натяжение имеет место при наклоне нити  $\varphi = \pi/4$ .) Из анализа следует, что первоначально прямолинейная нить в процессе эволюции сохраняет свою форму.

Для прямолинейной нити возможно аналитическое решение задачи (3.1). Ход решения подобен представленному в п. 2. Решение ищем в форме (2.5), (2.6). Подставив эти выражения в (3.1), получим уравнения для  $\Psi(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$

$$\Psi = 0,25g \sin 2\varphi, \quad \dot{\varphi} = -g \sin^2 \varphi.$$

С учетом условия (2.4) решение второго уравнения имеет вид

$$\tau g = \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi_0.$$

Таким образом, в условиях простого сдвига эволюция прямолинейной нити описывается уравнениями

$$\begin{aligned} Y = S \sin \varphi, \quad X = S \cos \varphi, \quad N_+ = 0,25g(1 - S^2) \sin 2\varphi, \\ \varphi = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg} \varphi_0 / (1 + g\tau \operatorname{tg} \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При этом в секторе  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$  должно выполняться условие  $N_+ > 0$ , для чего достаточно соблюдать равенство  $\operatorname{sign} \varphi = g$ , вытекающее из особенности выражения для  $\varphi(\tau)$  в (3.2) ( $g$  и  $\operatorname{tg} \varphi_0$  должны иметь одинаковый знак). Из выражения для  $N_+$  в (3.2) следует, что максимальное натяжение в нити имеет место при  $\varphi = \pi/4$  и составляет  $N_+ = 0,25$  при  $S = 0$  ( $N_{\max} = 0,25A_\tau |\gamma_-| l^2$ ), т. е. в два раза меньше, чем при чистом сдвиге. Существенное отличие от чистого сдвига заключается в том, что по окончании второго периода, когда ось нити совпадает с линией тока ( $g = 1, Y = 0, \tau = \infty, \varphi = 0$ ), натяжение равно нулю ( $N_+ = 0$ ). Сравнение функций  $\varphi(\tau)$  в (2.8) и (3.2) показало, что скорость поворота нити в направлении течения при простом сдвиге меньше, чем при чистом. Следовательно, эффект «ориентации» волокон в течении чистого сдвига выражен сильнее. Однако удельные затраты энергии на деформацию вязкой жидкости, характеризуемые диссипативной функцией, при чистом сдвиге (примерно  $4\mu\gamma_-^2$ ) больше, чем в случае простого сдвига (порядка  $\mu\gamma_-^2$ ).

При  $\operatorname{sign} \varphi = -g$  в нити возникают сжимающие усилия и разностная схема задачи (3.1) теряет устойчивость. Устойчивость теряется, даже если сжимающую нагрузку ( $N_+ < 0$ ) испытывает только участок непрямолинейной нити.

Исследована устойчивость прямолинейной нити к малым возмущениям. По аналогии с (2.10) возмущения представим следующим образом:

$$\begin{aligned} X = S \cos \varphi + \alpha(\tau, S), \quad Y = S \sin \varphi + \beta(\tau, S), \\ N_+ = 0,25g(1 - S^2) \sin 2\varphi + \Upsilon(\tau, S), \quad |\alpha, \beta, \Upsilon| \ll 1. \end{aligned}$$

Линеаризованные уравнения для возмущений имеют вид

$$\begin{aligned} \Upsilon' + (g\beta - \dot{\alpha}) \cos \varphi - \dot{\beta} \sin \varphi = 0, \\ 0,25Eg(1 - S^2)\beta'' \sin 2\varphi + \Upsilon' \sin \varphi - 0,5\beta'gS \sin 2\varphi - \dot{\beta} = 0, \quad \alpha' + \beta' \operatorname{tg} \varphi = 0, \\ \tau > 0: \quad S = 0: \quad \alpha = \beta = 0, \quad \Upsilon = \Upsilon_0, \quad \beta' = \beta'_0; \quad S = 1: \quad \Upsilon = 0, \quad \beta'' = 0. \end{aligned}$$

Введем собственные функции задачи  $A(S), B(S), C(S)$  и собственное значение  $\lambda$ :  $\{\alpha, \beta, \Upsilon\} = \{A, B, C\} \exp(\lambda\tau)$ . Учитывая линейную зависимость функций  $A$  и  $B$  (см. п. 2), для функций  $B$  и  $C$  имеем уравнения

$$\begin{aligned} C' + gB \cos \varphi = 0, \quad 0,25Eg(1 - S^2)B'' \sin 2\varphi - 0,5B'gS \sin 2\varphi - (0,5g \sin 2\varphi + \lambda)B = 0, \\ S = 0: \quad B = 0, \quad C = C_0, \quad B' = 1; \quad S = 1: \quad C = 0, \quad B'' = 0. \end{aligned}$$

Решение этой задачи в комплексной плоскости имеет вид  $B_r = B_i = S, C_r = C_i = -0,5g(1 - S^2) \cos \varphi, \lambda_r = -g \sin 2\varphi, \lambda_i = 0$ . Колебания отсутствуют ( $\lambda_i = 0$ ). Зависимость  $\lambda_r(\varphi)$  подобна зависимости  $N_+(\varphi)$  в (3.2), поэтому, если нить испытывает растягивающие усилия  $N_+ > 0$ , то  $\lambda_r < 0$  и ее движение устойчиво. При  $|\varphi| < \pi/2$  условие

устойчивости  $\lambda_r < 0$  выполняется, если  $-g \operatorname{sign} \varphi < 0$ . В горизонтальном положении нити ( $\lambda_r = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $N_+ = 0$ ) имеет место нейтральная устойчивость.

Статическое равновесие нити совпадает с нейтральной устойчивостью. Поэтому в реальных условиях ориентация волокон неустойчива, поскольку остаточная изгибная упругость нити или возмущение скорости жидкости могут сместить нить в область  $\varphi < 0$  (при  $g = 1$ ), что в конечном счете приведет к вращению нити вокруг центра, находящегося в ее середине. Угловая скорость вращения будет неравномерной: она достигает максимума при  $|\varphi| = \pi/2$  и минимума в окрестности  $\varphi = 0$ . Таким образом, простое сдвиговое течение не обеспечивает устойчивую ориентацию изолированной нити конечной длины.

В условиях простого сдвига наибольшая вязкость наполненной системы соответствует ориентации волокон  $|\varphi| = \pi/4$ , когда натяжение в них максимально.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Дзюра Е. А., Серебро А. Л.** Исследование прочностных свойств резин, наполненных короткими волокнами // Каучук и резина. 1978. № 7. С. 32–34.
2. **Одоевцева М. В.** Структура и механические свойства резиноволокнистых композиций, модифицированных олигодиенами, и разработка составов на их основе: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Волгоград: Изд-во Волгогр. техн. ун-та, 1997.
3. **Несиоловская Т. Н., Кузнецова И. А., Соловьев Е. М., Захаров Н. Д.** Влияние соотношения короткое волокно — измельченный вулканизат на свойства резин на основе хлоропренового каучука // Пром-сть синтет. каучука, шин и резинотехн. изделий. 1985. № 10. С. 19–22.
4. **Кочин Н. Е.** Собрание сочинений: В 2 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. С. 536–548.
5. **Крылов А. Н.** О равновесии шаровой мины на течении // Изв. по минному делу. 1909. Вып. 44. С. 14–108.
6. **Ким В. С., Скачков В. В.** Диспергирование и смешение в процессах производства и переработки пластмасс. М.: Химия, 1988.
7. **Мак-Келви Д. М.** Переработка полимеров. М.: Химия, 1965.
8. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. Ч. 2.
9. **Композиционные материалы:** Справ. / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др.; Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990.
10. **Трелоар Л.** Физика упругости каучука. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
11. **Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.

*Поступила в редакцию 10/XII 1998 г.,  
в окончательном варианте — 25/II 1999 г.*