

РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ КУЭТТА ДЛЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

А. Т. Онуфриев

(Новосибирск)

В обычной теории диффузии перенос свойств определяется локальными градиентами соответствующих полей. При увеличении длины пробега плотность потока становится интегральной величиной и определяется окрестностью точки размерами в две-три длины пробега. В работе [1] сделана попытка построить модель процесса одномерного переноса для линейных задач о течении разреженного газа, которая основана на аналогии с переносом излучения. Ниже на основе того же подхода, но без осреднения интенсивности по углу, рассмотрена линеаризованная задача о течении Куэтта. Полученное решение содержит особенности решения, построенного на основе более точных методов, связанных с решением уравнения Больцмана [2-4].

Обозначения

p_{xy} — величина напряжения трения; W — безразмерная скорость газа;
 c — средняя скорость теплового движения молекул; p_{xy} — величина напряжения трения, отнесенная к ее значению в свободно-молекулярном потоке;
 $^{2/3}\Lambda$ — длина свободного пробега; Y' — безразмерная координата;
 d — полуширина канала; $w_1(y)$ — распределение скорости в решении Милликена;
 $\pm w_0$ — скорость движения пластин; μ — коэффициент вязкости;
 $\rho c \Phi$ — «неравновесное» значение плотности потока импульса; R — число Рейнольдса;
 y — поперечная координата; K — число Кнудсена;
 γ — отношение теплоемкостей;
 $\mu = \frac{\Lambda \rho c}{3}$, $R = \frac{4 \rho w_0 d}{\mu}$, $K = \frac{\Lambda}{3d} = \frac{k}{2}$, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, $M = \frac{w}{c}$, $W = \frac{w}{w_0}$, $Y = \frac{y}{d}$

1. Рассматривается плоское стационарное течение разреженного газа между пластинами. Пластины расположены при $y = \pm d$, скорости их движения соответственно равны $\pm w_0$. Отражение от стенок полностью диффузное, отраженные молекулы имеют максвелловское распределение, соответствующее скорости и температуре стенки. Плотность, температура и длина свободного пробега постоянны.

Вначале получим решение в диффузионном приближении [1]. Условие стационарности позволяет написать условие для напряжения трения

$$p_{xy} = -^{1/3} \rho c \Lambda \partial \Phi / \partial y = \text{const}$$

Граничные условия имеют вид

$$-^{2/3} \Lambda \partial \Phi / \partial y = \Phi - w_0 \quad \text{при } y = d, \quad ^{2/3} \Lambda \partial \Phi / \partial y = \Phi + w_0 \quad \text{при } y = -d$$

Уравнение переноса дает $\Phi = w$, т. е. диффузионное приближение совпадает с решением, полученным Милликеном [5] на основе уравнений Навье — Стокса и граничных условий, учитывающих скольжение газа у стенки. В этом решении профиль скорости линейный; величина скачка скорости газа у стенки и напряжение трения равны

$$\frac{\Delta w}{w_0} = \frac{k}{1+k}, \quad p_{xy} = \mu \frac{w}{d} \frac{1}{1+k} \quad \text{или} \quad C_f M = \frac{2}{(R/M)[1 + \sqrt{2\pi\gamma} M/R]} \quad (1.1)$$

Решения кинетического уравнения показали [2,3], что профиль скорости в течение Куэтта не будет линейным. Около стенки находится «слой

Кнудсена», толщина которого составляет долю от длины свободного пробега и в котором профиль скорости искривляется¹.

2. Для получения выражения для напряжения трения P_{xy} строится модель переноса, основанная на локальном равновесии. Рассматривается единичная площадка около точки z_0 , движущаяся со скоростью потока в точке z_0 . Делаем предположения,

(1) Плотность потока импульса, переносимая молекулами через эту площадку, определяется интегралом по всему пространству.

(2) Число молекул, столкнувшихся в окрестности некоторой точки z , пропорционально плотности частиц и обратно пропорционально длине свободного пробега Λ , и после столкновения они имеют локально-равновесное распределение.

(3) Вероятность того, что молекула, испытавшая столкновение, пролетит через рассматриваемую площадку, равна $\exp(-s/\Lambda)$ (где s — расстояние вдоль луча между z_0 и z).

(4) Ограничиваясь малыми скоростями газа, полагаем, что распределение молекул после столкновения в точке z изотропно в системе координат, связанной с z_0 .

При сделанных предположениях поток количества движения, переносимый в единицу времени через единичную площадку, будет равен

$$-p_{xy}(y) = \int_0^{\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho c}{2\Lambda} \exp\left(-\frac{\xi-y}{\Lambda \cos \theta}\right) \sin \theta [w(\xi) - w(y)] d\xi d\theta - \\ - \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{-\infty}^y \frac{\rho c}{2\Lambda} \exp\left(-\frac{\xi-y}{\Lambda \cos \theta}\right) \sin \theta [w(\xi) - w(y)] d\xi d\theta$$

Здесь θ — угол по отношению к оси y .

Вклад отраженных от стенки молекул эквивалентен вкладу от безграничного объема газа, расположенного выше плоскости $y = d$ и движущегося со скоростью w_0 (аналогично для нижней стенки). Тогда

$$-p_{xy}(y) = \frac{\rho c}{2\Lambda} \int_0^{\pi/2} \int_y^d \exp\left(-\frac{\xi-y}{\Lambda \cos \theta}\right) \sin \theta w(\xi) d\xi d\theta - \\ - \frac{\rho c}{2\Lambda} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{-d}^y \exp\left(-\frac{\xi-y}{\Lambda \cos \theta}\right) \sin \theta w(\xi) d\xi d\theta + \\ + \frac{\rho c w_0}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \exp\left(-\frac{d-y}{\Lambda \cos \theta}\right) d\theta - \frac{\rho c w_0}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \sin \theta \exp\left(\frac{d+y}{\Lambda \cos \theta}\right) d\theta$$

Из условия $dp_{xy}/dy=0$ следует интегральное уравнение для скорости

$$W(y) \left[E_2\left(\frac{d-y}{\Lambda}\right) + E_2\left(\frac{d+y}{\Lambda}\right) \right] = E_2\left(\frac{d-y}{\Lambda}\right) - E_2\left(\frac{d+y}{\Lambda}\right) - \int_y^d \frac{W(y) - W(\xi)}{\Lambda} \times \\ \times E_1\left(\frac{\xi-y}{\Lambda}\right) d\xi + \int_{-d}^y \frac{W(\xi) - W(y)}{\Lambda} E_1\left(\frac{y-\xi}{\Lambda}\right) d\xi \quad \left(E_n(t) = \int_1^{\infty} e^{-xt} \frac{dx}{x^n}\right)$$

Уравнение можно представить в виде ($k_0 = \Lambda/d$, $z = \xi/d$) (2.1)

$$2W(y') = E_2\left(\frac{1-Y}{k_0}\right) - E_2\left(\frac{1+Y}{k_0}\right) + \int_0^1 W(Z) \left\{ E_1\left(\left|\frac{Y-Z}{k_0}\right|\right) - E_1\left(\frac{Y+Z}{k_0}\right) \right\} dZ$$

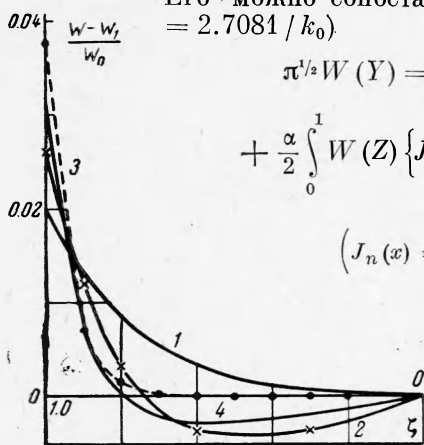
¹ «Слой Кнудсена» имеет аналог в задаче о переносе энергии излучением между двумя пластинами, нагретыми до разных температур.

Его τ можно сопоставить с уравнением в работе [2] ($\alpha = 2.7081/k_0$)

$$\pi^{1/2} W(Y) = J_0 \left[\frac{\alpha(1-Y)}{2} \right] - J_0 \left[\frac{\alpha(1+Y)}{2} \right] +$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \int_0^1 W(Z) \left\{ J_{-1} \left[\frac{\alpha}{2} |Y-Z| \right] - J_{-1} \left[\frac{\alpha}{2} (Y+Z) \right] \right\} dZ$$

$$(J_n(x) = \int_0^\infty y^n \exp \left[- \left(y^2 + \frac{x}{y} \right) \right] dy)$$



Значения функций $J_n(x)$ можно определить по данным работы [6]. Уравнение (2.1) решалось приближенно, сведением к системе алгебраических уравнений [7]. Результаты приведены в таблице, в которой даны значения скорости $W = w(y)/w_0$ при различных значениях числа Кнудсена. Для сравнения укажем результаты работы [2],

для значений $K = 0.120, 0.181, 0.903$ соответственно $W(1) = 0.851, 0.7985, 0.5038$.

Приводим также значения напряжения P_{xy} трения для различных значений числа Кнудсена K , а также для сравнения значения P_{xy} [2] по работе [2]

$K = 0.120$	0.181	0.903	9.027	90.27
$P_{xy[2]} = 0.189$	0.261	0.623	0.936	0.992
$P_{xy} = 0.187$	0.2526	0.6008	0.92598	0.991289

Сопоставление результатов показывает, что предложенная модель переноса позволила получить в рассмотренной задаче величину напряжения трения с погрешностью $\leq 3-4\%$ (величина скорости на стенке получается с погрешностью до 10%).

Значение величин $10^4 W$

K	α	$\zeta = 0.1$	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
0.120	7.5	0798	1596	3196	4808	6455	7324	8395
0.181	5	0729	1460	2926	4409	5942	6763	7780
0.9027	1	0409	0818	1647	2502	3412	3913	4533
9.027	0.1	0106	0213	0424	0641	0879	1005	1154
90.27	0.01	0019	0036	0075	0112	0153	0174	0197

Полученное решение содержит «слой Кнудсена». На фигуре показано различие в профиле скорости по сравнению с решением Милликена для $K = 0.12$: 1 — по методу Мотт-Смита; 2 — Ван Чжана и Уленбека; 3 — Гросса и Циринга [4], 4 — по результатам настоящей работы.

Поступила 26 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Онуфриев А. Т. Модель неравновесных процессов в некоторых задачах механики сплошных сред. ПМТФ, 1963, № 1.
2. Willis D. R. Comparison of Kinetic theory analyses of linearised Couette flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5 No. 2, p. 127—135. (Русск. перев.: Уиллис Д. Р. Сравнение исследований линейризованного течения Куэтта по кинетической теории. Сб. переводов и обз. ин. период. лит., 1963, № 2 (78), стр. 87—103).
3. Шерман Ф. С., Толбот Л. Сравнение кинетической теории с экспериментом для разреженных газов. Сб. «Газодинамика разреженных газов», ред. М. Девиен, перев. материалов I Международного симпозиума в Ницце. Изд. иностр. лит., 1963, стр. 266—311.
4. Стрит Р. Е. Изучение граничных условий в аэродинамике потока со скольжением. Там же, стр. 429—453.
5. Millikan R. A. Phys. Rev. 1923, vol. 21, p. 217—238.
6. Zehn C. T. Absorption Coefficients for Thermal neutrons. Phys. Rev., 1937, vol. 52, No. 2, p. 67—71.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.