ПМТФ, № 4, 1965

КОНЕЧНЫЙ ПЕРИОД ВЫРОЖДЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ УПРУГО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В. А. Городцов, В. П. Мясников

(Москва)

Ньютоновская модель вязкой жидкости, определяемая двумя размерными параметрами [1] (плотностью ρ и кинематической вязкостью ν), хорошо описывает течения «бесструктурных» жидкостей [2]. С термодинамической точки зрения, неоднородное течение вязкой жидкости связано с процессом приближения ее к равновесному состоянию, причем ньютоновская модель описывает пространственно распределенную неравновесность. Для движений в области масштаба l характерное время приближения к состоянию равновесия $\tau = l^2\nu^{-1}$, т. е. существенно определяется этим масштабом.

Аналогичные соображения справедливы и для таких явлений, как диффузия и теплопроводность.

Однако в реальных жидкостях протекают и другие физические процессы, допускающие уже локальное описание. Если в среде происходят локальные релаксационные процессы (типа ориентации частиц, перестройки надмолекулярных структур, подстройка движения примеси к движению жидкости и т. п.), существенно влияющие на ее механическое поведение, то при феноменологическом подходе к анализу движения необходимо ввести, по крайней мере, еще время релаксации θ, характеризующее скорость приближения к равновесному состоянию важнейшего из всех происходящих процессов.

Простейшей жидкостью, как с распределенной, так и с локальной неравновесностью, будет жидкость, определяемая тремя размерными параметрами ρ, ν, θ (упруго-вязкая жидкость). Заметим, что из этих параметров можно составить характерные: длину $\theta^{1/2}\nu^{1/2}$, скорость $\nu^{1/2}\theta^{-1/2}$ и модуль упругости $\rho\nu\theta^{-1}$. Это дополнительно подтверждает, что модели с ν и θ характеризуют движение структурированных жидкостей.

Наиболее хорошо известной феноменологической моделью такого типа является максвелловская жидкость с релаксацией напряжений.

Естественно ожидать яркого проявления особенностей механического поведения таких жидкостей в турбулентных течениях, когда возникают движения различных пространственных и временных масштабов. В настоящей работе рассматривается наиболее простая стадия вырождения турбулентного движения упруго-вязкой жидкости с постоянными ν и θ, когда высшими корреляционными моментами полей скоростей и напряжений можно пренебречь по сравнению со вторыми моментами. При этом отпадает вопрос о возможности различного выбора нелинейных по скоростям и напряжениям членов в конкретных моделях упруго-вязких жидкостей.

§ 1. Вырождение в модели с релаксацией напряжений. Турбулентные движения такой жидкости естественно описывать случайными полями скоростей v_i и напряжений σ_{ij}. Ограничимся в дальнейшем исследованием вырождения однородной изотропной турбулентности. На конечной стадии вырождения уравнения состояния и динамические уравнения могут быть сразу записаны в линеаризованном виде (1.1)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\sigma_{ij} = \frac{\nu}{\theta}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Здесь

$$\langle v_i \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle = 0, \qquad p = P - \langle P \rangle \tag{1.2}$$

где P — давление в жидкости. Истинные значения давлений и касательных напряжений равны соответственно ρp и $\rho\sigma_{ij}$, так что p и σ_{ij} являются кинематическими величинами.

[1] В дальнейшем рассматривается простейший случай несжимаемой жидкости.

[2] Наличие ближнего порядка в низкомолекулярных жидкостях в обычных условиях не проявляется.

Введем следующие корреляционные тензоры рассматриваемых случайных полей:

$$\langle v_i(\mathbf{x})\, v_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = R_{ij}(\mathbf{r}), \qquad \langle v_i(\mathbf{x})\, \sigma_{jk}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = S_{ijk}(\mathbf{r})$$
$$\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x})\, p(x+r)\rangle = T_{ij}(\mathbf{r}), \qquad \langle \sigma_{ij}(\mathbf{x})\, \sigma_{kl}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = W_{ijkl}(\mathbf{r}) \tag{1.3}$$

Из системы (1.1) для этих тензоров получим систему

$$\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_k}\left[S_{ijk}(\mathbf{r}) + S_{jik}(\mathbf{r})\right]$$
$$\frac{\partial S_{ikl}(\mathbf{r})}{\partial t} + \frac{1}{\theta} S_{ikl}(\mathbf{r}) = \frac{\nu}{\theta}\left(\frac{\partial R_{ik}}{\partial r_l} + \frac{\partial R_{il}}{\partial r_k}\right) + \frac{\partial T_{kl}(\mathbf{r})}{\partial r_i} - \frac{\partial W_{ijkl}(\mathbf{r})}{\partial r_j}$$
$$\frac{\partial W_{ijkl}(\mathbf{r})}{\partial t} + \frac{2}{\theta} W_{ijkl}(\mathbf{r}) = -\frac{\nu}{\theta}\left[\frac{\partial S_{kij}(\mathbf{r})}{\partial r_l} + \frac{\partial S_{lij}(\mathbf{r})}{\partial r_k} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial S_{ikl}(\mathbf{r})}{\partial r_j} + \frac{\partial S_{jkl}(\mathbf{r})}{\partial r_i}\right] \tag{1.4}$$
$$\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j} = \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i} = 0, \qquad \frac{\partial S_{ikl}(\mathbf{r})}{\partial r_i} = 0$$

Из второго уравнения в (1.4) и соленоидальности R_{ij} и S_{ikl} будем иметь

$$\triangle T_{kl}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 W_{ijkl}(\mathbf{r})}{\partial r_i\, \partial r_j} \tag{1.5}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа по переменным r_m ($m = 1, 2, 3$).

Используя для обозначения фурье-образов этих тензоров те же буквы, будем отличать их от корреляционных тензоров только по аргументу.

В силу изотропии и соленоидальности тензоров R_{ij} и S_{ikl} имеем [1]

$$R_{ij}(\varkappa) = (\varkappa_i\varkappa_j - \varkappa^2\delta_{ij})\, R(\varkappa)$$
$$S_{ijk}(\varkappa) = [\varkappa_j(\varkappa_i\varkappa_k - \varkappa^2\delta_{ik}) + \varkappa_k(\varkappa_i\varkappa_j - \varkappa^2\delta_{ij})]\, S(\varkappa) \tag{1.6}$$

Из тензорных уравнений (1.4) могут быть получены скалярные уравнения для функции $R(\varkappa)$, $S(\varkappa)$ и для функции

$$W(\varkappa) = \varkappa_j\varkappa_l(\varkappa_i\varkappa_k - \varkappa^2\delta_{ik})\, W_{ijkl}(\varkappa) \tag{1.7}$$

Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial R(\varkappa)}{\partial t} = 2i\varkappa^2 S(\varkappa)$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\right) S(\varkappa) = i\,\frac{\nu}{\theta} R(\varkappa) - \frac{i}{2\varkappa^6} W(\varkappa), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{\theta}\right) W(\varkappa) = -\frac{4i\nu\varkappa^8}{\theta} S(\varkappa) \tag{1.8}$$

Система (1.8) сводится к одному уравнению для определения $R(\varkappa)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\theta}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{\theta}\right) + \frac{4\nu\varkappa^2}{\theta}\right] R(\varkappa, t) = 0 \tag{1.9}$$

Соотношение (1.9) при $t \gg \theta$ и $\varkappa \to 0$ вырождается в уравнение

$$\frac{\partial R(0, t)}{\partial t} = 0 \tag{1.10}$$

что означает существование инварианта Лойцянского на конечной стадии вырождения [1].

Решение (1.9) будет иметь следующий вид:

$$R(\varkappa, t) = C_1(\varkappa, t_0)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\theta}\right) +$$
$$+ \exp\left(-\frac{t-t_0}{\theta}\right)\left[C_2(\varkappa, t_0)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\theta}\sqrt{1-4\nu\theta\varkappa^2}\right) + \right.$$
$$\left. + C_3(\varkappa, t_0)\exp\left(\frac{t-t_0}{\theta}\sqrt{1-4\nu\theta\varkappa^2}\right)\right] \tag{1.11}$$

где t_0 — некоторый начальный момент времени, когда уже можно пренебречь корреляциями высших порядков. Функции C_1, C_2 и C_3 могут быть выражены через функции $R(\varkappa, t_0)$, $S(\varkappa, t_0)$ и $W(\varkappa, t_0)$.

Поскольку на конечной стадии вырождения взаимодействиями между движениями с различными $\varkappa$ пренебрегается (неучет нелинейных членов), то они затухают независимо друг от друга.

Учитывая, что имеется характерное волновое число

$$\varkappa_\theta = {}^1/_2 \nu^{-1/2} \theta^{-1/2} \tag{1.12}$$

разбивающее волновое пространство на две области, рассмотрим закон затухания отдельно в каждой из областей.

При $\varkappa > \varkappa_\theta$, что соответствует мелкомасштабным движениям, получим

$$R(\varkappa, t) = [C_1(\varkappa, t_0) + C_2(\varkappa, t_0) e^{-i\omega(\varkappa)(t-t_0)} + $$
$$+ C_3(\varkappa, t_0) e^{i\omega(\varkappa)(t-t_0)}] \exp\left(-\frac{t-t_0}{\theta}\right) \tag{1.13}$$

$$\omega(\varkappa) = \theta^{-1} \varkappa_\theta^{-1} (\varkappa^2 - \varkappa_\theta^2)^{1/2} \tag{1.14}$$

Формула (1.13) показывает, что мелкомасштабные движения затухают по универсальному закону $\exp[-(t - t_0)/\theta]$, а осциллирующее поведение выражения в квадратных скобках отражает тот факт, что в максвелловской модели жидкости существуют высокочастотные упругие сдвиговые волны.

Наоборот, при $\varkappa < \varkappa_\theta$, что соответствует крупномасштабным движениям, для $t - t_0 \gg \theta$

$$R(\varkappa, t) = C_3 e^{-2\nu\varkappa^2(1+\nu\theta\varkappa^2+\ldots)(t-t_0)}. \tag{1.15}$$

В силу условий соленоидальности величина $C_3(\varkappa, t_0)$ при $\varkappa \to 0$ будет ограниченной, равной $C_3(0, t_0)$.

При достаточно больших $t - t_0$ движения с высокими волновыми числами затухнут и останутся только крупномасштабные движения с законом затухания, аналогичным затуханию обычной вязкой жидкости. Корреляционный тензор в этом случае убывает со временем по известному закону $t^{-5/2}$ [1].

§ 2. Вырождение в модели с релаксацией скоростей деформаций сдвига. В качестве другого примера среды с параметрами ν, θ рассмотрим модель с релаксацией скоростей деформаций сдвига. На конечной стадии вырождения система линеаризованных уравнений может быть записана в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \sigma_{ij} = \nu\left(1 + 2\theta \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.1}$$

Модель такого типа, учитывающая локальные релаксационные изменения поля скоростей, имеет достаточно ясный физический смысл. Так, при макроскопическом описании движения жидкости со взвешенными частицами как однородной среды, кроме концентрационного изменения коэффициента вязкости, необходимо учитывать подстройку движения примеси к движению жидкости. Характерное время релаксации такого процесса $\theta \sim (\rho_n / \rho) a^2 \nu^{-1}$, где ρ_n, ρ — плотность твердых частиц и жидкости соответственно, a — характерный линейный размер частиц.

Уравнение для $R_{ij}(\mathbf{r})$ в предположении изотропии и однородности запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1 - 2\nu\theta\Delta) R_{ij}(\mathbf{r})] = 2\nu\Delta R_{ij}(\mathbf{r}), \qquad \frac{\partial}{\partial r_i} R_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial r_j} R_{ij}(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.2}$$

Для фурье-образа $R_{ij}(\varkappa)$ из (2.2) получим выражение

$$R_{ij}(\varkappa, t) = (\varkappa_i\varkappa_j - \varkappa^2\delta_{ij})\, C(\varkappa, t_0)\, e^{-2\nu_\theta \varkappa^2(t-t_0)} \qquad (2.3)$$

$$\nu_\theta = \frac{\nu}{1 + 2\nu\theta\varkappa^2}$$

Из (2.3) видно, что поведение такой жидкости при вырождении турбулентности аналогично закону вырождения для вязкой жидкости, но с эффективным кинематическим коэффициентом вязкости, зависящим от волнового числа.

При $\varkappa \ll \varkappa_\theta$ (крупномасштабные пульсации)

$$R_{ij}(\varkappa, t) = (\varkappa_i\varkappa_j - \varkappa^2\delta_{ij})\, C(0, t_0)\, e^{-2\nu\varkappa^2(t-t_0)} \qquad (2.4)$$

где $C(0, t_0)$ — ограниченная константа.

Наоборот, при $\varkappa \gg \varkappa_\theta$ (мелкомасштабные пульсации) получим универсальный закон затухания по времени $e^{-t/\theta}$.

Качественно полученные результаты для модели с релаксацией скоростей деформаций сдвига совпадают с результатами, полученными в предыдущем параграфе.

Такой вывод не является неожиданным и отражает общий факт наличия двух времен релаксации. Действительно, рассмотрим поведение пульсации масштаба l или соответственно волнового вектора $\varkappa \sim 1/l$. Характерными временами релаксации для нее будут $\tau = l^2/\nu$ и θ. Если рассмотреть масштабы, для которых

$$\tau = \frac{l^2}{\nu} \sim \frac{1}{\varkappa^2\nu} \gg \theta$$

то для такого масштаба при $t - t_0 \gg \theta$ локальные релаксационные процессы не будут играть роли, и все движение будет определяться обычной вязкой релаксацией. Соответствующий закон затухания будет

$$R \sim e^{-2\nu\varkappa^2(t-t_0)} \qquad (2.5)$$

Наоборот, для пульсаций масштаба l, удовлетворяющих условию

$$\tau \sim \frac{1}{\varkappa^2\nu} \ll \theta$$

соответствующих тому случаю, когда пространственно распределенная неравновесность быстро релаксирует, определяющую роль при больших $t - t_0$ играют только локальные релаксационные процессы и закон затухания

$$R \sim e^{-t/\theta} \qquad (2.6)$$

Согласно работе [2], в рассматриваемой модели жидкости скачки скорости затухают также экспоненциально (2.6). Это совпадает с вышеприведенным выводом, поскольку при затухании скачка в основном происходит искажение высоких частот его спектра.

Заметим, что реальная среда характеризуется целым спектром времен релаксации, однако на конечной стадии вырождения основную роль будет играть некоторое минимальное из них.

Авторы благодарны Г. И. Баренблатту за ценные обсуждения.

Поступила 20 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. Изд. иностр. лит., 1955.
2. Баренблатт Г. И., Черный Г. Г. О моментных соотношениях на поверхностях разрыва в диссипативных средах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.