Кривая $\alpha = \alpha_*(\varkappa)$ (фиг. 2) отграничивает в фазовой плоскости переменных α, $\varkappa$ область существования устойчивых решений (рэлеевских волн). При $\alpha > \alpha_*(\varkappa)$ вместо прежних двух действительных появляются два комплексно-значных корня (2.2). Один из них дает растущее экспоненциально во времени решение. Показатель экспоненты монотонно увеличивается от нуля при $\alpha = \alpha_*(\varkappa)$ до значения, соответствующего случаю $c_2 = 0$, при $\alpha \to 0$.

Замечание. Для реальной (вязкой) жидкости данное рассмотрение будет приемлемым при условии $d \ll \lambda$, где d — толщина пограничного слоя, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны возмущения, и, поскольку $d/\lambda \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ (Re — число Рейнольдса), сводится к требованию $\mathrm{Re}^{1/2} \gg 1$. Это же ограничение является достаточным, чтобы приближенно выполнялось граничное условие для τ.

Автор выражает благодарность Н. В. Зволинскому за обсуждение работы.

Поступила 20 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. **Зволинский Н. В.** Поверхностные волны в упругом полупространстве и покрывающем его слое жидкости.— ДАН СССР, 1947, т. 56, вып. 4.
3. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973.
4. **Губанов А.** Волны Рэлея на границе твердого тела и жидкости.— ЖЭТФ, 1945, т. 15, вып. 9.
5. **Михайлов А. Л.** Сдвиговая неустойчивость границы раздела в металлах.— ФГВ, 1979, № 2.
6. **Буллен К. Е.** Введение в теоретическую сейсмологию. М., Мир, 1966.

УДК 532.516

УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Елисеев

(*Днепропетровск*)

Исследованию устойчивости струй идеальной жидкости посвящены работы [1—4], в которых считается, что невозмущенное течение параллельное, а скорость жидкости в струе постоянна. В данной работе в рамках линейной теории рассмотрим устойчивость струй весомых жидкостей с учетом влияния внешней среды, которая считается также идеальной. Весомость жидкости проявляется в том, что границы струи становятся непараллельными, а скорость зависит от продольной координаты. Учет этих особенностей можно провести так же, как, например, в теории устойчивости ламинарных пограничных слоев, считая течение квазипараллельным. В этом случае зависимость толщины струи и скорости в струе от продольной координаты можно считать параметрической. В данной работе будем рассматривать существенно непараллельное течение, поэтому для выявления особенностей устойчивости струйного течения в этом случае предлагается асимптотический метод.

1. Основные уравнения. Основные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r^2} = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{u_i^2 + v_i^2}{2} \mp gx = \mathrm{const}_i,$$

где $u_i = \partial\Phi_i/\partial x$, $v_i = \partial\Phi_i/\partial r$ — проекции скорости на оси x и r; p_i — давление; ρ_i — плотность; $k = 0$ для плоской струи, $k = 1$ — для осесимметричной; индекс 1 относится к параметрам течения в струе, индекс 2 — к внешней среде. На границе струи выполняются условия

$$v_i = \partial a/\partial t + u_i \partial a/\partial x, \quad p_1 - p_2 = \sigma(1/R + k/a),$$

$$R = -\frac{[1 + (\partial a/\partial x)^2]^{3/2}}{\partial^2 a/\partial x^2},$$

a — радиус ($k = 1$), полуширина ($k = 0$) струи; σ — коэффициент поверхностного натяжения.

В дальнейшем рассмотрение задачи в области 1 будем проводить в переменных $\xi = x/a_0$, $\tau = Ut/a_0$, $n = r/a_0$, а в области 2 — в переменных ξ, τ и $N = (r - a)/a_0\xi^m + k$, где a_0 — линейный масштаб; U — масштаб скорости; m — некоторый коэффициент, который будет определен ниже. Оставаясь в рамках линейной теории, представим решения уравнений (1.1) в виде

$$\Phi_i = a_0 U(\varphi_i + \varphi_{i\delta}), \quad p_i = \rho_1 U^2 (P_i + p_{i\delta}), \quad a/a_0 = y_* + \delta,$$

где первые члены в правых частях соответствуют невозмущенному движению, вторые — возмущенному.

В новых переменных уравнения для возмущенного движения и граничные условия имеют вид (скорость среды равна нулю)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\varphi_{1\delta}}{\partial\xi^2} - \left(\frac{y_*''}{y_*} - 2\frac{y_*'^2}{y_*^2}\right) n \frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial n} - \left(\frac{\delta''}{y_*} - \frac{y_*''\delta}{y_*^2} - 4\frac{y_*'\delta'}{y_*^2} + 4\frac{y_*'^2\delta}{y_*^3}\right) n \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \\
- 2\frac{y_*'}{y_*} n \frac{\partial^2\varphi_{1\delta}}{\partial\xi\partial n} - 2\left(\frac{\delta'}{y_*} - \frac{y_*'\delta}{y_*^2}\right) n \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\xi\partial n} + \left(2\frac{y_*'\delta'}{y_*^2} n^2 - 4\frac{y_*'^2\delta}{y_*^3} n^2 - 2\frac{\delta}{y_*^3}\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial n^2} + \\
+ \frac{k}{n} y_*^{-2}\frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial n} - 2\frac{k}{n}\frac{\delta}{y_*^3}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + \left(\frac{y_*'^2}{y_*^2} n^2 + y_*^{-2}\right)\frac{\partial^2\varphi_{1\delta}}{\partial n^2} = 0, \\
\frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial\tau} - \frac{\delta^{\cdot}}{y_*}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} n + \frac{p_1}{\rho_1} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} - \frac{y_*'}{y_*} n \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)\left[\frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial\xi} - \frac{y_*'}{y_*}\frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial n} - \right. \\
\left. - \left(\frac{\delta'}{y_*} - \frac{y_*'\delta}{y_*^2}\right) n \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right] + y_*^{-2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial n} - \frac{\delta}{y_*} n \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right), \quad y_*' = \frac{dy_*}{d\xi}, \quad \delta^{\cdot} = \frac{\partial\delta}{\partial\tau};
\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\varphi_{2\delta}}{\partial\xi^2} + 2m\xi^{-2}N\frac{\partial\varphi_{2\delta}}{\partial N} + \frac{y_*'}{\xi^{m+1}} 2m \frac{\partial\varphi_{2\delta}}{\partial N} - \frac{y_*''}{\xi^m}\frac{\partial\varphi_{2\delta}}{\partial N} - 2m\xi^{-1}N\frac{\partial^2\varphi_{2\delta}}{\partial\xi\partial N} - \\
- 2\frac{y_*'}{\xi^m}\frac{\partial^2\varphi_{2\delta}}{\partial\xi\partial N} + m^2\xi^{-2}N^2\frac{\partial^2\varphi_{2\delta}}{\partial N^2} + \left(\frac{y_*'}{\xi^{m+1}} N + \xi^{-2m}\right)\frac{\partial^2\varphi_{2\delta}}{\partial N^2} = 0, \\
p_{2\delta} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\partial\varphi_{2\delta}}{\partial\tau} = 0;
\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}
y_*^{-1}\left(\frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial n} - \frac{\delta}{y_*}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)\Big|_{n=1} = \delta^{\cdot} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} - \frac{y_*'}{y_*}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)\Big|_{n=1}\delta' + \left[\frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial\xi} - \right. \\
\left. - \frac{y_*'}{y_*}\frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial n} - \left(\frac{\delta'}{y_*} - \frac{y_*'\delta}{y_*^2}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right]\Big|_{n=1} y_*', \quad \xi^{-m}\frac{\partial\varphi_{2\delta}}{\partial N}\Big|_{N=k} = \delta^{\cdot}, \\
p_{1\delta}\big|_{n=1} - p_{2\delta}\big|_{N=k} = -\left(\delta'' + \frac{k}{y_*^2}\delta\right)\mathrm{We}^{-1}, \quad \frac{\partial\varphi_{1\delta}}{\partial n}\Big|_{n=0} = 0.
\end{gathered} \tag{1.4}$$

2. Плоская струя ($k = 0$). В этом случае асимптотический вид решения (большие ξ) невозмущенных уравнений довольно простой:

$$\varphi_1 = C\left(\xi^{3/2} - \frac{3}{8} n^2 \xi^{-3/2}\right),$$

$$y_* = \xi^{-1/2},$$

$$C = \begin{cases} \left(\dfrac{a_0 g}{U^2}\right)^{1/2}, & \dfrac{\rho_2}{\rho_1} \ll 1, \\ \left(\dfrac{a_0 g}{U^2} \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{1/2}, & \dfrac{\rho_2}{\rho_1} \gg 1. \end{cases}$$

Следующие члены разложений рассматривать не будем, так как их порядок выходит за рамки того количества приближений, которое рассмотрено в данной работе. Для определения решений выписанных уравнений представим первые члены разложений функций $\varphi_{i\delta}$, $p_{i\delta}$ и δ в виде

$$\begin{gathered} \delta \sim \xi^p \chi, \quad \varphi_{1\delta} \sim \xi^s \Omega_1(n) \chi, \quad \varphi_{2\delta} \sim \xi^\alpha \Omega_2(N) \chi, \\ p_{1\delta} \sim \xi^\beta \chi, \quad p_{2\delta} \sim \xi^\zeta \chi, \quad \chi \sim \exp\left[j(\omega\tau + \gamma \xi^r)\right], \end{gathered} \tag{2.1}$$

где ω — частота; γ — волновое число; p, r, s, α, β — некоторые коэффициенты. Подставляя выражения (2.1) в кинематические условия (1.4), приравнивая порядки первых трех членов в первом условии и сохраняя члены во втором, получим (для давления используем вторые уравнения (1.2) и (1.3))

$$r = 1/2, \quad s = \beta = p + 3/2, \quad \alpha = \zeta = p + m.$$

Величину m можно найти из того условия, что, принимая во внимание ограниченность потенциала во внешней области на бесконечности, необходимо в первом уравнении (1.3) сохранить члены со вторыми производными как по ξ, так и по N. Учитывая, что $r = 1/2$, будем иметь $m = 1/2$, в результате чего уравнение для Ω_2 после отбрасывания членов более высокого порядка имеет вид

$$d^2\Omega_2/dN^2 - \gamma^2 \Omega_2/4 = 0, \tag{2.2}$$

при этом $\Omega_2 = D \exp\left(-\frac{\gamma}{2} N\right)$, т. е. при $N \to \infty$ $\Omega_2 \to 0$. Теперь полностью выпишем асимптотические разложения решений

$$\begin{gathered} \delta = A\xi^p \chi, \quad \varphi_{1\delta} = \xi^{p+3/2}(\Omega_{10} + \xi^{-1/2}\Omega_{11} + \ldots)\chi, \\ \varphi_{2\delta} = \xi^{p+1/2}(\Omega_{20} + \xi^{-1/2}\Omega_{21} + \ldots)\chi, \quad p_{1\delta} = \xi^{p+3/2}(R_{10} + \xi^{-1/2}R_{11} + \ldots)\chi, \\ p_{2\delta} = \xi^{p+1/2}(R_{20} + \xi^{-1/2}R_{21} + \ldots)\chi, \quad \chi = \exp\left[j(\omega\tau + \right. \\ \left. + \gamma_0 \xi^{1/2} + \gamma_2 \xi^{-1/2} + \ldots)\right]. \end{gathered}$$

После подстановки выписанных выражений в основные уравнения (1.2), (1.3) получим систему простых уравнений (во внутренней области вида $d^2\Omega_{1j}/dn^2 = F(\Omega_{1j-4})$, во внешней области вида (2.2) с известными правыми частями). Опуская промежуточные действия, выпишем сразу формулы для γ_j и p

$$\gamma_0 = -\frac{4}{3} C^{-1} \omega, \quad p_{\mathrm{I,II}} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{27} C^{-3} \frac{\rho_2}{\rho_1} \omega^3}, \tag{2.3}$$

$$\gamma_2 = -\left\{\frac{1}{2} C\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \omega^{-1} + \frac{8}{27} C^{-2} \frac{p + \frac{1}{4}}{p + \frac{1}{2}} \omega^2\right\}.$$

Если теперь величину возмущений отнести к полуширине невозмущенной струи, то будем иметь

$$\varepsilon = \delta/y_* = A \exp \{ j \left[\omega\tau + \gamma_0 \xi^{1/2} - j(p + 1/2) \ln \xi + \gamma_2 \xi^{-1/2} + \ldots \right] \}.$$

Учитывая, что величина p имеет два корня, один из которых такой, что

$$p_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{27} C^{-3} \frac{\rho_2}{\rho_1} \omega^2} > 0$$

при любой частоте $\omega > 0$, можно сделать вывод: относительные возмущения, возникающие в начальном участке струи тяжелой жидкости, по мере удаления от источника возрастают. Рост относительных возмущений идет по степенной зависимости $\varepsilon \sim \xi^{p_{\mathrm{I}}+1/2}$. В неустойчивости плоской струи основную роль играет внешняя среда. В формуле (2.3) для p нет числа We^{-1}, так как члены, учитывающие эту величину, имеют больший порядок малости. При $\rho_2/\rho_1 = 0$ плоская струя устойчива.

3. Осесимметричная струя ($k = 1$). Для осесимметричной струи асимптотическое решение можно ограничить выражениями

$$\varphi_1 = C\xi^{2/2}, \quad y_* = \xi^{-1/4}.$$

В этом случае при оценке порядков первых членов разложений решений имеем $r = 1/2$, $s = \beta = p + 5/4$, $\alpha = \zeta = p + 1/2$. Для получения нетривиальных регулярных разложений необходимы следующие выражения:

$$\delta = A\xi^p\chi, \quad \varphi_{1\delta} = \xi^{p+5/4}(\Omega_{10} + \xi^{-1/8}\Omega_{11} + \xi^{-2/8}\Omega_{12} + \ldots)\chi, \tag{3.1}$$
$$\varphi_{2\delta} = \xi^{p+1/2}(\Omega_{20} + \xi^{-1/8}\Omega_{21} + \ldots)\chi, \quad p_{1\delta} = \xi^{p+5/4}(R_{10} + {}$$
$$+ \xi^{-1/8}R_{11} + \ldots)\chi,$$
$$p_{2\delta} = \xi^{p+1/2}(R_{20} + \xi^{-1/8}R_{21} + \ldots)\chi,$$
$$\chi = \exp [j(\omega\tau + \gamma_0\xi^{4/8} + \gamma_1\xi^{3/8} + \gamma_2\xi^{2/8} + \gamma_3\xi^{1/8} + \ldots)].$$

Система уравнений, получающаяся после подстановки (3.1) в (1.2), (1.3), как и в плоском случае, довольно простая и допускает непосредственное интегрирование, в результате чего можно получить

$$\gamma_0 = -\frac{4}{3}\omega C^{-1}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \tag{3.2}$$
$$\gamma_{3\mathrm{I,II}} = \pm j \frac{16}{9} \frac{\omega}{C^2} \left[2\,\mathrm{We}^{-1} + 3\omega C \frac{K_0\left(\frac{|\gamma_0|}{2}\right)}{\left| K_0'\left(\frac{|\gamma_0|}{2}\right) \right|} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right]^{1/2},$$
$$p = -\frac{9}{16}, \quad \gamma_{5\mathrm{I,II}} = \frac{15}{8} \gamma_{3\mathrm{I,II}}^{-1},$$

где K_0 — функция Бесселя мнимого аргумента второго рода. О поведении возмущений следует судить по γ_3. Так как $\mathrm{Im}\ \gamma_{3\mathrm{II}} < 0$ при $\omega > 0$, то и в этом случае возникающие в начальном участке возмущения с ростом ξ увеличиваются по следующей зависимости:

$$\varepsilon = \delta/y_* \sim \exp j\left(\gamma_{3\mathrm{II}}\xi^{1/8}\right).$$

В отличие от плоской струи здесь We^{-1} оказывает влияние на развитие возмущений при больших ξ. Таким образом, как видно из (2.3) и (3.2), струи тяжелой жидкости неустойчивы при любых частотах $\omega > 0$, при этом с увеличением ω возмущения вдоль струи растут быстрее, что приводит к уменьшению длины нераспавшейся части струи. Это качественно совпадает с результатами экспериментальных исследований развития неустойчивых возмущений по поверхности капиллярных струй жидкости, истекающих вертикально вниз ($\rho_1/\rho_2 \gg 1$). Так, в работах [5, 6] отмечено, что при наложении пульсаций скоростей эффективная длина участка струи (участок, на котором развиваются неустойчивые возмущения от некоторого малого, но экспериментально определимого значения амплитуды до распада) сокращается с увеличением частоты наложенного возмущения.

Поступила 31 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ламб Г.** Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
2. **Лышевский А. С.** Закономерности дробления жидкости механическими форсунками давления. Новочеркасск, Новочеркасск. политехн. ин-т, 1961.
3. **Шкадов В. Я.** Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. Научные труды № 25. М., изд. МГУ, 1973.
4. **Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А. и др.** Распыливание жидкостей. М., Машиностроение, 1977.
5. **Панченков Г. М., Мамлеев Р. А.** Особенности развития неустойчивости капиллярных струй жидкости.— ЖФХ, 1978, т. 52, № 3.
6. **Панченков Г. М., Мамлеев Р. А., Максименко М. З., Папко В. В.** О влиянии длительности воздействия наложенных возмущений и распад струи жидкости.— ЖФХ, 1978, т. 52, № 3.

УДК 532.527+532.517.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Никулин

(*Новосибирск*)

Рассматриваются течения идеальной несжимаемой жидкости, скорости которых в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеют вид (0, V, W). Считается, что $V = V(r)$, $W = W(r)$. Исследуется устойчивость последних в линейном приближении. Подобные течения являются идеализацией таких природных явлений, как торнадо, пыльные дьяволы [1, 2]. Их исследование важно для понимания роли неустойчивости при взрыве вихря [3]. Классическое течение Куэтта между цилиндрами также относится к указанному типу.

До настоящего времени известно немного общетеоретических результатов, касающихся линейной устойчивости закрученных потоков по отношению к неосесимметричным возмущениям. Этому вопросу посвящена работа [4], где получено описание нормальных колебаний в терминах одного уравнения и введен аналог числа Ричардсона. В [5] исследованы достаточные условия устойчивости таких течений по отношению к осесимметричным возмущениям. В [6, 7] устойчивость по отношению к неосесимметричным возмущениям исследуется численно. В [6] рассмотрено течение Пуазейля во вращающейся трубе, в [7] — линейный вихрь в следе за крылом. Ряд общих результатов для течений с круговыми линиями тока ($W = 0$) получен в [8, 9], где исследована аналогия таких потоков с плоскопараллельными течениями стратифицированной жидкости. Вопросам устойчивости течений стратифицированной жидкости посвящены работы [10, 11].

В данной работе получены некоторые общие результаты, касающиеся устойчивости закрученных потоков по отношению к неосесимметричным возмущениям. Дана оценка невещественной части спектра возмущений (теорема о круге). Рассмотрена задача с начальными данными, сформулировано правило выбора ветви решения в особой точке. Отмечено сходство и отличие закрученных потоков от течений с круговыми линиями тока и течений стратифицированной жидкости.

1. Пусть (u, v, w) — комплексные амплитуды компонент возмущения скорости, соответствующие координатам (r, φ, z). Пусть возмущения имеют вид нормальных волн: $u(r, \varphi, z, t) = \mathrm{Re}\,\{u(r) \exp\,[i(kz + m\varphi - \omega t)]\}$ и т. д. В [4] линеаризованные уравнения движения и неразрывности