

Представляет интерес сравнить результаты работы с опытными данными. Известно [5], что сила вязкого сопротивления взвешенного слоя в области малых чисел Рейнольдса удовлетворительно описывается соотношением вида (7), в котором вместо $1 + \frac{5}{3}M$ стоит величина $\psi = (1 - \rho)^{-3.75}$. Результаты численного расчета функций $\varphi = 1 + \frac{5}{3}M$ с ξ , вычисленной из (1) при $k \approx 1.1$, и ψ представлены на фигуре (кривые 1 и 2 соответственно). Видно, что соответствие между экспериментальными данными и развитой теорией весьма хорошее. На этой же фигуре показана функция $1 + 2N$ (кривая 3). Из сравнения кривых 1 и 3 следует интересный вывод, что различие между силами вязкого взаимодействия твердой и газообразной диспергированных фаз с жидкой фазой в концентрированных дисперсных системах оказывается значительно более сильным, чем различие в силах Стокса, действующих на изолированные пузырьки и твердую частицу одинаковых размеров.

Поступила 29 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Simha R. Treatment of the Viscosity of Concentrated Suspensions. J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, No. 9, p. 1020.
2. H a p p e l J. Viscous Flow in Multiparticle Systems: Slow Motion of Fluids Relative to Beds of Spherical Particles. A. I. Chem. Engng. J., 1958, vol. 4 p. 197.
3. A d l e r I. L., H a p p e l J. The Fluidization of Uniform Smooth Spheres in Liquid Media. Chem. Engng. Progr. Sympos. Series, 1962, vol. 58, No. 38, p. 98.
4. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
5. Г о р о ш к о В. Д., Р о з е н б а у м Р. Б., Т о д е с О. М. Приближенные закономерности гидравлики псевдооживленного слоя. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, 1958, т. 1, № 1, стр. 125.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ДУГИ

Л. И. Мальцев (Новосибирск)

Рассматривается задача о построении кавитационного обтекания криволинейной дуги по схеме Рябушинского по заданному распределению скорости. Впервые обратная задача была поставлена и решена для случая отрывного обтекания по схеме Кирхгоффа в безграничном потоке Г. Г. Тумаевым [1], а Г. Н. Пыхтевым [2] — для дуги в канале. Им же решена обратная задача обтекания дуги по схеме Гильберга — Эффроса [3].

1. Рассмотрим кавитационное обтекание симметричной криволинейной дуги L плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости по схеме Рябушинского с зеркалом, изображенной на фиг. 1.

Буквами V_∞ , V_0 , $2S_0$, Φ_0 обозначим соответственно величину скорости невозмущенного потока, величину скорости на свободных струях, длину обтекаемой дуги L , значение потенциала скорости в точках отрыва.

Пусть на обтекаемой дуге задано распределение модуля скорости в виде функции дуговой абсциссы

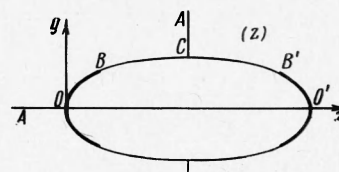
$$V = V_0 f(s) \quad (s = S / S_0, \quad 0 \leq s \leq 1)$$

Функция $f(s)$ предполагается однозначной, положительной, удовлетворяющей условию Гельдера и условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Требуется построить форму контура L и форму свободных струй, а также найти сопротивление дуги. В силу симметрии будем рассматривать течение только во второй четверти физической плоскости z .

2. Комплексный потенциал скорости $W = \varphi + i\psi$ в точке C , а также функцию тока ψ на линии тока $A O B C B' O' A$ примем равными нулю. Тогда область изменения W будет представлять собой вторую четверть плоскости. Функция $W(\zeta)$, отображающая область изменения W на первую четверть вспомогательного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ с соответствием точек, указанным на фиг. 1, 2, 3, легко найдется

$$W(\zeta) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{\zeta^2 + a^2}} \sqrt{1 + a^2} \quad (2.1)$$

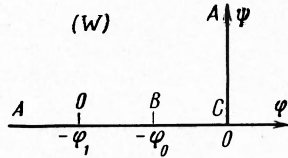


Фиг. 1

На дуге L

$$\varphi = -\varphi_1 + V_0 S_0 \int_0^s f(s) ds, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi_0 \sqrt{1+a^2}}{a} \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) находим зависимость $S(\xi)$, устанавливающую соответствие между точками дуги L и точками отрезка $[-1, 1]$ оси ξ плоскости ζ



Фиг. 2

$$-\frac{\varphi_0 \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{a^2+\xi^2}} = -\varphi_1 + V_0 S_0 \int_0^s f(s) ds \quad (2.3)$$

Введем функцию Жуковского

$$F(\zeta) = \ln \left(\frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} \right) = \ln \frac{V}{V_0} - i\theta \quad (2.4)$$

На мнимой оси η плоскости ζ функция $F(\zeta)$ действительна и непрерывна. Продолжаем ее на всю верхнюю полуплоскость. Теперь $F(\zeta)$ определена и аналитична во всей верхней полуплоскости и удовлетворяет следующим краевым условиям:

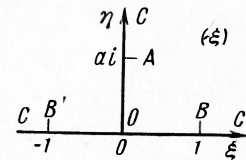
$$\operatorname{Re} F(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{для } |\xi| > 1 \\ \ln f & \text{для } |\xi| \leq 1 \end{cases}$$

Как известно, задачу восстановления функции, аналитической в верхней полуплоскости, по ее действительной части, заданной на действительной оси, решает интеграл типа Коши (см., например, [4])

$$F(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln f(t)}{t-\zeta} dt \quad (2.5)$$

Функция $z(\zeta)$ теперь определится из соотношений (2.1), (2.4) и (2.5)

$$z(\zeta) = \sqrt{1+a^2} \frac{\varphi_0}{V_0} \int \frac{\xi}{(\xi^2+a^2)^{3/2}} \exp[-F(\zeta)] d\zeta + \text{const} \quad (2.6)$$



Фиг. 3

Отделяя в (2.6) действительную и мнимую части и переходя к пределу при $\zeta \rightarrow \xi$, получим:

уравнение контура

$$x = \frac{\varphi_0 \sqrt{1+a^2}}{V_0} \int_0^{\xi} \frac{\xi}{f[s(\xi)] (\xi^2+a^2)^{3/2}} \cos I(\xi) d\xi \quad (2.7)$$

$$y = \frac{\varphi_0 \sqrt{1+a^2}}{V_0} \int_0^{\xi} \frac{\xi}{f[s(\xi)] (\xi^2+a^2)^{3/2}} \sin I(\xi) d\xi$$

$$\left(I(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln f}{t-\xi} dt, \quad |\xi| \leq 1 \right)$$

уравнение струй

$$x = x_0 + \frac{\varphi_0 \sqrt{1+a^2}}{V_0} \int_1^{\xi} \frac{\xi}{(\xi^2+a^2)^{3/2}} \cos \Phi(\xi) d\xi$$

$$y = y_0 + \frac{\varphi_0 \sqrt{1+a^2}}{V_0} \int_1^{\xi} \frac{\xi}{(\xi^2+a^2)^{3/2}} \sin \Phi(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

$$\left(\Phi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln f}{t-\xi} dt, \quad |\xi| \geq 1 \right)$$

Здесь x_0, y_0 — координаты точки отрыва струи.

3. Займемся теперь определением параметров, вошедших в решение. От решения задачи необходимо потребовать выполнения следующих условий:

$$\left(\frac{dW}{dz} \right)_{z=ai} = V_{\infty}, \quad [\Phi(s)]_{s=1} = -\Phi_0$$

Можно показать, что они преобразуются к виду

$$\ln \frac{V_{\infty}}{V_0} = G(a) \quad (3.1)$$

Здесь

$$G(a) = \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln f}{t^2 + a^2} dt, \quad -\Phi_0 = -\Phi_1 + V_0 S_0 \int_0^1 f(s) ds \quad (3.2)$$

Эти равенства являются уравнениями для определения параметров a и Φ_0 по заданному числу кавитации $Q = V_0^2 / V_{\infty}^2 - 1$ и заданной длине дуги S_0 .

4. Используя интеграл Бернулли, выражение для сопротивления дуги можно записать в виде

$$R = \rho V_0^2 S_0 \int_0^1 [1 - f^2(s)] \sin \vartheta(s) ds$$

или, переходя к переменной ξ от s ,

$$R = \rho V_0^2 S_0 \int_0^1 \frac{1 - f^2[S(\xi)]}{f[S(\xi)]} \frac{\xi}{(\xi^2 + a^2)^{3/2}} \sin I(\xi) d\xi \quad (4.1)$$

5. Рассмотрим частный случай. Пусть функция $f(s)$ имеет вид

$$f(s) = \frac{As}{\sqrt{B^2 - s^2}} \quad (A, B = \text{const})$$

Подставляя это выражение в (2.3) и (3.2), получим

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi_0 \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{\xi^2+a^2}} &= -\frac{\Phi_0 \sqrt{1+a^2}}{a} + V_0 S_0 \cdot A (B - \sqrt{B^2 - s^2}) \\ -\Phi_0 &= \frac{a V_0 S_0}{\sqrt{1+a^2}-a} A (B - \sqrt{B^2-1}) \end{aligned}$$

Пусть $A = a$, $B = \sqrt{1+a^2}$. Тогда

$$\Phi_0 = a^2 V_0 S_0, \quad s(\xi) = \frac{\xi \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{a^2+\xi^2}}, \quad f[s(\xi)] = \xi \quad (5.1)$$

Значения интегралов $J(\xi)$, $\Phi(\xi)$, $G(a)$ найдены в работе [3]

$$I(\xi) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} N(\xi), \quad \Phi(\xi) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\xi} + \frac{\pi}{4} N\left(\frac{1}{\xi}\right) \quad (5.2)$$

$$G(a) = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{2a} + \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{a} \right) \ln a + \frac{1}{\pi} L\left\{ \arcsin \frac{1}{a} \right\} + \frac{1}{\pi} L(\arcsin a) \quad (5.3)$$

$$N(\tau) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} d\tau, \quad L(\tau) = - \int_0^{\tau} \ln \cos \tau d\tau \quad (5.4)$$

Подставляя (5.1) в (2.7) и (4.1) и (5.2) в (2.8), получим:

$$\begin{aligned} x &= a^2 \sqrt{1+a^2} S_0 \int_0^{\xi} \frac{1}{(a^2+\xi^2)^{3/2}} \sin \left[\frac{\pi}{4} N(\xi) \right] d\xi \\ y &= a^2 \sqrt{1+a^2} S_0 \int_0^{\xi} \frac{1}{(a^2+\xi^2)^{3/2}} \cos \left[\frac{\pi}{4} N(\xi) \right] d\xi, \quad |\xi| \leq 1 \end{aligned}$$

уравнение струи

$$x = x_0 + a^2 \sqrt{1 + a^2} S_0 \int_1^{\xi} \frac{\xi}{(a^2 + \xi^2)^{3/2}} \cos \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\xi} + \frac{\pi}{4} N \left(\frac{1}{\xi} \right) \right] d\xi$$

$$y = y_0 + a^2 \sqrt{1 + a^2} S_0 \int_1^{\xi} \frac{\xi}{(a^2 + \xi^2)^{3/2}} \sin \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\xi} + \frac{\pi}{4} N \left(\frac{1}{\xi} \right) \right] d\xi \quad |\xi| \geq 1$$

сопротивление дуги

$$R = \rho V_0^2 S_0 a^2 \sqrt{1 + a^2} \int_0^1 \frac{1 - \xi^2}{(a^2 + \xi^2)^{3/2}} \cos \left[\frac{\pi}{4} N(\xi) \right] d\xi$$

Имея в виду (5.4), уравнение (3.1) переписывается

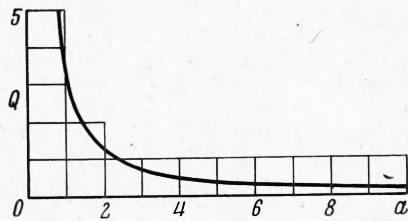
$$\ln \frac{V_\infty}{V_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + a^2} - 1}{2a} + \frac{1}{\pi} \left(\arctg \frac{1}{a} \right) \ln a + \frac{1}{\pi} L \left(\arctg \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{\pi} L(\arctga)$$

Длина и ширина каверны найдутся соответственно по формулам

$$l = 2 \left\{ x_0 + a^2 \sqrt{1 + a^2} S_0 \int_1^\infty \frac{\xi}{(a^2 + \xi^2)^{3/2}} \cos \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\xi} + \frac{\pi}{4} N \left(\frac{1}{\xi} \right) \right] d\xi \right\}$$

$$h = 2 \left\{ y_0 + a^2 \sqrt{1 + a^2} S_0 \int_1^\infty \frac{\xi}{(a^2 + \xi^2)^{3/2}} \sin \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\xi} + \frac{\pi}{4} N \left(\frac{1}{\xi} \right) \right] d\xi \right\}$$

На фиг. 4 приведен график зависимости числа кавитации Q от параметра a .



Фиг. 4

6. Зависимость скорости от дуги будем теперь задавать в параметрической форме

$$V = V_0 F_1(u), \quad S = S_0 F_2(u)$$

где $F_1(u)$ и $F_2(u)$ — однозначные положительные функции $u \in [u_1, u_2]$, удовлетворяющие условию Гельдера и условиям

$$F_1(u_1) = F_2(u_1) = 0, \quad F_1(u_2) = F_2(u_2) = 1$$

Данную задачу можно свести к предыдущей таким образом:

$$f(s) = f[s(\xi)] = F_1[u(\xi)]$$

Зависимость $u(\xi)$ находится из уравнения

$$-\frac{\Phi_0 \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{\xi^2 + a^2}} = -\Phi_1 + V_0 S_0 \int_{u_1}^u F_1(u) F_2'(u) du \quad (6.1)$$

Равенство для нахождения Φ_0 переписывается

$$\Phi_0 = -\Phi_1 + V_0 S_0 \int_{u_1}^{u_2} F_1(u) F_2'(u) du \quad (6.2)$$

Пусть, например,

$$F_1(u) = \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{1/2}, \quad F_2(u) = -\frac{1}{A} \int_1^u \frac{(u+1)udu}{(u^2 + \beta^2)^{3/2} \sqrt{1-u^2}}$$

$$\left(A = \int_0^1 \frac{(u+1)udu}{(u^2 + \beta^2)^{3/2} \sqrt{1-u^2}}, \alpha, m, \beta - \text{const} \right)$$

Подставляя выражение для $F_1(u)$ и $F_2(u)$ в формулы (6.1) и (6.2), получим соответственно равенства для нахождения зависимости $u(\xi)$ и Φ_0

$$\frac{\Phi_0 \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{\xi^2+a^2}} = \frac{\Phi_0 \sqrt{1+a^2}}{a} + \frac{2V_0 S_0}{A} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}} \right)$$

$$\Phi_0 \left(1 - \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \right) = \frac{2V_0 S_0}{A} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}} \right)$$

Положим $\beta = \sqrt{1+a^2}$. Тогда

$$\Phi_0 = \frac{2V_0 S_0}{A \sqrt{1+a^2}}, \quad u(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}, \quad f[s(\xi)] = \left(\frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{1+\sqrt{1-\xi^2}} \right)^{1/2}$$

Выпишем значения интегралов [3] $I(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ в этом случае

$$I(\xi) = 1/2\pi (\text{sign } \xi), \quad \Phi(\xi) = 2 \arctg(\xi - \sqrt{\xi^2-1}) \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в (2.7), получим уравнение контура

$$x=0, \quad y = \frac{\Phi_0 \sqrt{1+a^2}}{V_0} \int_0^\xi \frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{(\xi^2+a^2)^{3/2}} d\xi$$

Таким образом, получилось обтекание пластинки, поставленной нормально к потоку.

Уравнение струи и сопротивление контура найдутся соответственно по формулам (2.8) и (4.1). Вычисляя значение $G(a)$ для данного случая и подставляя его в формулу (3.1), получим уравнение для определения параметра a .

За советы, полученные при решении задачи, автор благодарит Г.Н. Пыхтеева.

Поступила 26 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1952, т. 112, кн. 3.
2. Пыхтеев Г. Н. К задаче о струйном обтекании криволинейной дуги в ограниченном и безграничном потоке несжимаемой жидкости. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4.
3. Пыхтеев Г. Н. Решение обратной задачи плоского кавитационного обтекания криволинейной дуги. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.

КОЭФФИЦИЕНТ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ УДАРЕ ПЛАВАЮЩЕЙ СФЕРЫ

С. Е. Евдокимов, В. Л. Рвачев

(Харьков)

Конкретная пространственная задача о горизонтальном гидродинамическом ударе плавающего тела впервые рассматривалась Э. Л. Блохом [1], которым получено решение для случая наполовину погруженной в несжимаемую жидкость сферы. В. И. Моссаковским и В. Л. Рвачевым [2] решение этой же задачи получено в замкнутой форме.

Ниже результаты работ [1,2] обобщаются на случай произвольной глубины погружения. Как и в [1,2], считается, что отрыва жидкости от смоченной поверхности сферы нет.

§ 1. Пусть в идеальной жидкости, заполняющей полупространство $z \geq 0$, плавает сфера единичного радиуса $x^2 + y^2 + (z-h)^2 = 1$. В результате внезапно приложенной импульсивной силы сфера, вначале неподвижная, приходит в поступательное движение вдоль оси x со скоростью U_* . Тогда [3], при отсутствии массовых импульсивных сил, движение жидкости после удара потенциально, и потенциал скоростей Φ^* есть гармоническая функция, связанная с импульсивным давлением p_i соотношением $p_i = -\rho\Phi^*$, где ρ — плотность жидкости