УДК 532.5

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ВСЕ ПРОСТРАНСТВО

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследуются интегральные соотношения, которым удовлетворяют решения уравнений Навье — Стокса или уравнений Эйлера в случае, когда жидкость заполняет все трехмерное пространство. Их наличие обусловлено достаточно быстрым убыванием поля скоростей на бесконечности (но не чрезмерно быстрым, иначе требуемая асимптотика не будет воспроизводиться со временем). Особый интерес представляют интегралы движения, плотность которых квадратично зависит от скоростей или их производных по координатам. Такие интегралы (законы сохранения) для уравнений Навье — Стокса были недавно найдены С. Ю. Доброхотовым и А. И. Шафаревичем. В работе получены новые законы сохранения, квадратичные по производным вектора скорости, следствием которых являются тождества, связывающие осредненные и пульсационные характеристики свободных турбулентных течений.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, уравнения Эйлера, законы сохранения.

Предположим, что вязкая несжимаемая жидкость заполняет все пространство $\mathbb{R}^3$ и внешние объемные силы на нее не действуют. Вектор скорости жидкости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = (v_1, v_2, v_3)$ и давление жидкости $p(\boldsymbol{x},t)$ связаны уравнениями Навье — Стокса

$$\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

где $\nu \geqslant 0$ — кинематический коэффициент вязкости. Плотность жидкости принята равной единице, что не ограничивает общности. Движение жидкости возникает из заданного начального состояния:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3, \quad t = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функция $\boldsymbol{v}_0$ удовлетворяет уравнению неразрывности $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0 = 0$ и некоторым условиям гладкости и убывания на бесконечности, которые будут приведены ниже. При $\nu = 0$ система (1) переходит в систему уравнений Эйлера

$$\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\nabla p, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{3}$$

описывающую движение идеальной несжимаемой жидкости.

Вопросам разрешимости задачи Коши (1), (2) посвящена обширная литература (см. [1–3] и библиографию к ним), и поэтому здесь они не рассматриваются. Напомним лишь, что для двумерного аналога задачи (1), (2) имеет место теорема существования и единственности в целом, т. е. при всех $T > 0$, независимо от величины нормы функции $\boldsymbol{v}_0$ в подходящем банаховом пространстве. Для трехмерной задачи доказана глобальная однозначная разрешимость при дополнительном предположении об осесимметричности движения [4], которое означает, что в цилиндрической системе координат (r,θ,z) компоненты скорости v_r, v_z и давление p не зависят от θ, а $v_\theta = 0$. В общем случае существование единственного решения задачи (1), (2) доказано на малом интервале времени $[0,T]$ при произвольных начальных данных из некоторого класса (например, $\boldsymbol{v}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$) либо для любого $T > 0$, если норма начальных данных мала.

В дальнейшем будем предполагать, что $\boldsymbol{v}_0 \to 0$ при $x \to \infty$. Порядок убывания $\boldsymbol{v}_0$ определяет многие качественные свойства решения задачи (1), (2), в частности наличие или отсутствие сохраняющихся со временем функционалов от ее решения. Простейшим из них является интеграл импульса

$$\int \boldsymbol{v}\,dx = \int \boldsymbol{v}_0\,dx, \qquad t \in [0, T], \tag{4}$$

справедливый для любого классического решения задачи (1), (2), удовлетворяющего условию

$$|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)| \leqslant C(1 + |\boldsymbol{x}|)^{-\gamma}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, T] \tag{5}$$

с некоторыми постоянными $\gamma > 3$, $C > 0$ (отсутствие пределов интегрирования в (4) и в дальнейших соотношениях означает, что интеграл берется по всему пространству).

Закон сохранения импульса (4) в равной мере справедлив для движения вязкой и идеальной жидкостей. Однако условие $\gamma > 3$ является весьма жестким и не выполняется даже для такого простого решения системы (3), как сферический вихрь Хилла [5]. В цилиндрической системе координат, в которой жидкость покоится на бесконечности, это решение имеет вид

$$\begin{gathered} v_r = -\frac{3Ua^3 r(z + Ut)}{2[r^2 + (z + Ut)^2]^{5/2}}, \qquad v_z = -\frac{Ua^3[r^2 - 2(z + Ut)^2]}{2[r^2 + (z + Ut)^2]^{5/2}} \\ \text{при} \quad r^2 + (z + Ut)^2 \geqslant a^2, \quad v_\theta = 0 \quad \text{всюду}, \\ v_r = -3Ua^{-2} r(z + Ut)/2, \qquad v_z = Ua^{-2}[6r^2 + 3(z + Ut)^2 - 5a^2]/2 \\ \text{при} \quad r^2 + (z + Ut)^2 \leqslant a^2, \end{gathered} \tag{6}$$

где $a > 0$ и U — постоянные. В этом случае в (5) показатель $\gamma = 3$ и интеграл (4) сходится не абсолютно, а лишь в смысле главного значения. Поскольку

$$\lim \int_{B_r} \boldsymbol{v}\,dx = \lim \int_{B_r} \boldsymbol{v}_0\,dx \qquad \text{при} \quad R \to \infty \tag{7}$$

(B_r — шар $|\boldsymbol{x}| < R$), выражению (4) можно придать смысл импульса жидкости $\boldsymbol{P}$, который не зависит от времени.

Замечательной особенностью решения Хилла является локализация завихренности: $\boldsymbol{\omega} \equiv \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ вне сферы $r^2 + (z + Ut)^2 = a^2$. В подобных ситуациях пределы выражений (7) при $R \to \infty$ можно вычислять по формуле [5]

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\omega}\,dx. \tag{8}$$

Определение импульса жидкости (8) оказывается плодотворным и для исследования движения вязкой жидкости, заполняющей все пространство, если предположить, что завихренность в таком движении быстро убывает при $\boldsymbol{x} \to \infty$ [6]. Именно такая ситуация имеет место в задаче о диффузии сферического вихря Хилла при исчезающей вязкости [7]. Ее постановка такова: требуется найти решение системы (1) с начальным условием (2), где вектор $\boldsymbol{v}_0$ определяется формулами (6), в которых полагается $t = 0$. В данном случае функция $\boldsymbol{v}_0$ непрерывна, однако вихрь $\boldsymbol{\omega}_0 = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_0$ имеет разрыв первого рода на сфере $r^2 + z^2 = a^2$. Наличие вязкости приводит к мгновенному сглаживанию разрыва, так что решение задачи (1), (2) становится бесконечно дифференцируемым при $t > 0$. Если $\nu \to 0$, этот процесс описывается функциями типа пограничного слоя. Нестационарный пограничный слой сосредоточен вблизи движущейся сферы $r^2 + (z + Ut)^2 = a^2$, его толщина имеет порядок $(\nu t)^{1/2}$. В работе [7] построена асимптотика решения рассматриваемой задачи при $\nu \to 0$, справедливая на любом конечном интервале времени. При этом использовался алгоритм, предложенный в работе [8] для построения асимптотики решения задачи о плоском движении жидкости с первоначально локализованной завихренностью при $\nu \to 0$. На его основе в [8] решена задача о влиянии малой вязкости на движение жидкости, в котором начальная постоянная завихренность сосредоточена внутри эллипса. В этом случае решение задачи Коши для двумерных уравнений Эйлера (3) описывает движение, в котором вихревая область остается эллипсом, вращающимся с постоянной угловой скоростью вокруг своего центра (так называемый эллиптический вихрь Кирхгофа [5]). В работах [7, 8] дана оценка близости точного и приближенного решений задач о диффузии сферического вихря Кирхгофа при $\nu \to 0$ на любом конечном интервале времени $[0, T]$. Отметим, что в обоих случаях завихренность экспоненциально убывает, когда $\boldsymbol{x} \to \infty$ и $t \in [0, T]$. Это гарантирует сходимость и неизменность во времени интеграла импульса (8) и его плоского аналога. Если вектор $\boldsymbol{v}$ удовлетворяет неравенству (5) с $\gamma > 4$, то в решении задачи (1), (2) сохраняется полный момент импульса жидкости $\boldsymbol{M} = \displaystyle\int \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}\, dx$. Однако указанное условие является слишком жестким: предполагая, что оно выполнено при $t > 0$, мы не можем, вообще говоря, гарантировать воспроизводимость асимптотики (5) с $\gamma > 4$ при $t > 0$. Показатель $\gamma = 4$ является критическим [3]. Если неравенство (5) выполнено с $\gamma = 4$ и начальная завихренность финитна или быстро убывает при $\boldsymbol{x} \to \infty$, то в решении задачи (1), (2) сохраняется величина $\boldsymbol{M} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{w})\, dx$, имеющая смысл результирующего момента импульса [5].

Интегралы движения (4), (8) линейны по скоростям или их производным. Представляет интерес нахождение квадратичных функционалов, сохраняющихся на решениях задачи Коши (1), (2). Для идеальной жидкости таким функционалом является интеграл энергии

$$\int |\boldsymbol{v}|^2\, dx = \int |\boldsymbol{v}_0|^2\, dx, \qquad t \in [0, T] \tag{9}$$

(предполагается, что оба интеграла в (9) сходятся). В вязкой жидкости кинетическая энергия диссипирует, и равенство (9) превращается в неравенство, которое является строгим, если $\boldsymbol{v}_0 \ne 0$, при любом $t \in (0, T]$. Неожиданным является то, что для достаточно широкого класса движений вязкой жидкости каждая из составляющих кинетической энергии $\displaystyle\int v_k^2\, dx$ $(k = 1, 2, 3)$ убывает со временем с одинаковой скоростью. В [9] установлено, что при условии быстрого убывания $\boldsymbol{v}$ при $\boldsymbol{x} \to \infty$ имеют место тождества

$$\int v_i^2\, dx = \int v_k^2\, dx, \qquad \int v_i v_k\, dx = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3; \quad i \ne k). \tag{10}$$

Из результатов работы [9] следует также, что если в решении задачи (1), (2) функции $\boldsymbol{v}$, $\nabla\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_t$ убывают быстрее, чем $|\boldsymbol{x}|^{-4}$ при $\boldsymbol{x} \to \infty$, тождества (10) с необходимостью выполняются в начальный момент времени. Этот результат можно трактовать как мгновенную потерю свойства локализации поля скоростей в решении задачи Коши (1), (2). В [10] аналогичный результат получен без каких-либо предположений о гладкости решения рассматриваемой задачи.

Приведем простой вывод тождеств (10) для случая плоского движения. Обозначим $x_1 = x$, $x_2 = y$, $v_1 = u$, $v_2 = v$ и введем функцию тока ψ соотношениями $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$.

Тогда, как заметил С. Н. Аристов, уравнение импульса в проекции на ось x принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(p+\psi_y^2)=\frac{\partial}{\partial y}(\nu\Delta\psi-\psi_t+\psi_x\psi_y),$$

откуда вытекает существование функции Q такой, что $p+\psi_y^2=Q_y$, $\nu\Delta\psi-\psi_t+\psi_x\psi_y=Q_x$. Из уравнений (1) и определения Q следует, что эта функция удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta Q=2\psi_y\Delta\psi$. Умножая обе части последнего уравнения на линейную функцию L переменных x,y и интегрируя результирующее равенство по кругу $D_r=\{x,y\colon x^2+y^2<R^2\}$, после простых преобразований получим

$$\int\limits_{S_R}\Big(L\,\frac{\partial Q}{\partial R}-Q\,\frac{\partial L}{\partial R}\Big)R\,d\varphi=\int\limits_{D_R}[L_y(\psi_x^2-\psi_y^2)-2L_x\psi_x\psi_y]\,dx\,dy+{}$$
$$+\int\limits_{S_R}L[(\psi_y^2-\psi_x^2)\sin\varphi+\psi_x\psi_y\cos\varphi]R\,d\varphi,$$

где S_R — окружность $x^2+y^2=R^2$; $\varphi=\operatorname{arctg}(y/x)$. Предполагая, что функции Q, ∇Q, $\nabla\psi$ быстро убывают с ростом R, можно перейти к пределу в полученном равенстве при $R\to\infty$. Предельное соотношение имеет вид

$$\int[L_y(\psi_x^2-\psi_y^2)-2L_x\psi_x\psi_y]\,dx\,dy=0,$$

где интеграл берется по всей плоскости (x,y). Полагая $L=x\pm y$, окончательно получим

$$\int(u^2-v^2)\,dx\,dy=\int uv\,dx\,dy=0$$

(т. е. аналог тождеств (10) в плоском случае).

Тождества (10) имеют смысл интегралов движения вязкой жидкости, заполняющей все пространство. Однако они носят условный характер, поскольку существование быстро убывающих при $\boldsymbol{x}\to\infty$ решений задачи (1), (2) не гарантируется, даже если начальные данные обладают этим свойством. В частности, условие $\boldsymbol{v}=O(|\boldsymbol{x}|^{-\gamma})$ при $\boldsymbol{x}\to\infty$, вообще говоря, не выполняется для $t>0$, если $\gamma>4$. Тем не менее в [10] выделен класс начальных функций $\boldsymbol{v}_0$ с достаточно малой нормой, для которого неравенство (5) выполняется при всех $T>0$ с показателем $\gamma\in(4,5]$. Этот класс определен следующими условиями: v_{0i} — нечетная функция x_i и четная функция остальных переменных; $v_{01}(x_1,x_2,x_3)=v_{02}(x_3,x_1,x_2)=v_{03}(x_2,x_3,x_1)$. Более высокая степень симметрии начальных данных, ассоциированная с группами правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$, позволяет увеличить критическое значение γ, но и в наиболее благоприятном случае γ, по-видимому, не превосходит 7 (гипотеза Л. Брандолезе). В то же время асимптотика при больших $\boldsymbol{x}$ “типичного” поля скоростей $\boldsymbol{v}_0$ с финитной или быстро убывающей функцией $\boldsymbol{\omega}_0=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0$ имеет порядок убывания $O(|\boldsymbol{x}|^{-3})$, а ее главный член соответствует диполю, расположенному в начале координат. В этом случае нет оснований надеяться на выполнение интегральных тождеств (10). Например, для начальных данных, соответствующих сферическому вихрю Хилла (6), значение интеграла $\int(v_r^2-2v_z^2)\,dx$ при малых t имеет асимптотику $-\pi U^2a^3[1+O(\sqrt{\nu t}/a)]$, что не согласуется с (10). Однако и в таких движениях существуют интегралы, только их плотности квадратично зависят от первых и высших производных компонент скорости по пространственным переменным.

Наши рассуждения основаны на известном соотношении, справедливом для гладких решений системы (1):

$$\Delta p = 2\Omega : \Omega - D : D, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{11}$$

где D и Ω — симметричная и антисимметричная части тензора $\nabla \boldsymbol{v}$. Предположим, что $\partial v_i/\partial x_k = O(|\boldsymbol{x}|^{-\alpha})$ при $\boldsymbol{x} \to \infty$ и $t \in [0, T]$ $(i, k = 1, 2, 3)$, где $\alpha \geqslant 2$. Тогда имеют место представления

$$p = b(t)/|\boldsymbol{x}| + O(|\boldsymbol{x}|^{-2}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \to \infty, \quad t \in [0, T], \qquad \nabla p = b(t)\nabla(1/|\boldsymbol{x}|) + O(|\boldsymbol{x}|^{-3}), \tag{12}$$

где

$$b(t) = \frac{1}{4\pi} \int (D : D - 2\Omega : \Omega)\, dx.$$

Представления (12) следуют из известных свойств ньютонова потенциала с быстро убывающей плотностью. Введем в рассмотрение функцию $q = p + \boldsymbol{x} \cdot \nabla p$. Из (12) следует, что $q = O(|\boldsymbol{x}|^{-2})$ при $\boldsymbol{x} \to \infty$. Можно показать также, что

$$\nabla q = O(|\boldsymbol{x}|^{-3}) \qquad \text{при} \quad \boldsymbol{x} \to \infty, \quad t \in [0, T]. \tag{13}$$

Теперь определим вектор-функцию $\boldsymbol{w}$ равенством $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$. Существенно, что вектор $\boldsymbol{w}$ соленоидален (в то время как вектор $\nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}$ этим свойством, вообще говоря, не обладает). Прямые вычисления показывают, что если пара $\boldsymbol{v}$, p есть решение (1), то функции $\boldsymbol{w}$, $s = \boldsymbol{x} \cdot \nabla p$ удовлетворяют системе уравнений

$$\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla s + \nu \Delta \boldsymbol{w}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0. \tag{14}$$

Применим к первому уравнению (14) операцию дивергенции и вычтем результирующее равенство из (11). С учетом равенства $q = p + s$ получаем уравнение Пуассона для функции q

$$\Delta q = 2\Omega : (\Omega + \Psi) - D : (D + E), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{15}$$

выполненное для всех $t \in [0, T]$. В (15) E и Ψ — симметричная и антисимметричная части тензора $\nabla \boldsymbol{w}$. Предположим дополнительно, что компоненты вектора $\boldsymbol{w}$ удовлетворяют условию $\partial w_i/\partial x_k = O(|\boldsymbol{x}|^{-\alpha})$ с $\alpha \geqslant 2$ при $\boldsymbol{x} \to \infty$, $t \in [0, T]$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Интегрируя равенство (15) по шару $|\boldsymbol{x}| < R$ и переходя к пределу при $R \to \infty$, в силу (13) имеем

$$\int [D : (D + E) - 2\Omega : (\Omega + \Psi)]\, dx = 0. \tag{16}$$

Тождество (16) и есть искомый интеграл движения.

Теперь можно сделать следующий шаг, рассмотрев соленоидальную вектор-функцию $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \nabla \boldsymbol{w}$ и ассоциированнное “давление” $n = \boldsymbol{x} \cdot \nabla s$. Эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$\boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{z} + 2\boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{z} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla n + \nu \Delta \boldsymbol{z}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{z} = 0.$$

Постулируя оценки $\partial z_i/\partial x_k = O(|\boldsymbol{x}|^{-\alpha})$ при $\boldsymbol{x} \to \infty$, где $\alpha \geqslant 2$, и действуя описанным выше способом, приходим к тождеству

$$\int [D : (E + G) + E : E - 2\Omega : (\Omega + \Phi) - 2\Psi : \Psi]\, dx = 0, \tag{17}$$

где G и Φ — симметричная и антисимметричная части тензора $\nabla \boldsymbol{z}$. Интегральное соотношение (17) содержит уже третьи производные функций v_i по переменным x_k $(i, k = 1, 2, 3)$.

Процедуру получения тождеств, подобных (16), (17), но включающих производные v_i более высоких порядков, можно продолжить, однако это выходит за рамки данной статьи.

В заключение отметим, что соотношения (10), (16), (17), являющиеся точными следствиями уравнений Навье — Стокса и некоторых гипотез о характере убывания поля скоростей на бесконечности, могут быть использованы при анализе свободной турбулентности на основе гипотез Рейнольдса. Обозначая осредненную и пульсационную составляющие функции $\bar{v}_i$ через v_i и v_i' соответственно и применяя процедуру осреднения к соотношениям (10), получим

$$\int (\bar{v}_i^2 + \overline{v_i'^2}\,)\,dx = \int (\bar{v}_k^2 + \overline{v_k'^2}\,)\,dx, \qquad \int (\bar{v}_i\bar{v}_k + \overline{v_i'v_k'}\,)\,dx = 0 \qquad (i,k = 1,2,3;\ i \neq k). \quad (18)$$

Равенства, аналогичные (18), могут быть получены из соотношений (16), (17). Найденные равенства могут использоваться для тестирования полуэмпирических теорий свободных турбулентных течений. Классический пример такого движения — турбулентное вихревое кольцо (см. [6]).

Автор выражает благодарность Л. Брандолезе, Т. Миякава и В. В. Шелухину за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
2. **Schonbek M. E.** Asymptotic behaviour of solutions to free-dimensional Navier — Stokes equations // Indiana Univ. Math. J. 1992. V. 41, N 3. P. 809–823.
3. **Miyakawa T.** On space-time decay properties of nonstationary incompressible Navier — Stokes flows in R^n // Funkcialaj Ekvacioj. 2000. V. 43, N 3. P. 541–557.
4. **Юдович В. И., Уховский М. Р.** Осесимметричные течения идеальной и вязкой жидкости, заполняющей все пространство // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32. С. 59–69.
5. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
6. **Луговцов Б. А.** Турбулентные вихревые кольца // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1979. Вып. 38. С. 71–88.
7. **Батищев В. А., Срубщик Л. С.** Об асимптотике свободной поверхности жидкости при исчезающей вязкости // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222, № 4. С. 782–785.
8. **Срубщик Л. С., Юдович В. И.** Асимптотика слабых разрывов течений жидкости при исчезающей вязкости // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 3. С. 563–566.
9. **Доброхотов С. Ю., Шафаревич А. И.** О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 4. С. 38–42.
10. **Brandolese L.** On the localization of symmetric and asymmetric solutions of the Navier — Stokes equations in R^n // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 2001. T. 332. P. 125–130.

Поступила в редакцию 6/XI 2003 г.