ПМТФ, № 5, 1974

УДК 538.4

ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА В НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

И. Е. Тарапов

(*Харьков*)

Рассмотрены особенности поверхностей разрыва в намагничивающейся среде. Показано, что поляризационная сила на поверхностях раздела может быть направлена в сторону среды с большей магнитной проницаемостью.

Доказано существование в абсолютно проводящей намагничивающейся среде плоскополяризованных скачков, в которых плотность среды не меняется.

В статье рассматриваются особенности граничных условий на поверхностях разрыва в среде, которая может изотропно и неоднородно намагничиваться во внешнем электромагнитном поле.

В случае идеально проводящей среды ($E \sim c^{-1}vB$), движение которой определяется восемью переменными (ρ, p, $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$), получаем [1] восемь граничных условий

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & [\rho v_n] = 0,\ [\rho v_n \mathbf{v}_\tau - (4\pi)^{-1}\mu H_n \mathbf{H}_\tau] = 0 \\
& [\rho v_n^2 + p - \rho^2 u_\rho - (4\pi)^{-1}\mu H_n^2] = 0 \\
& [\rho v_n ({}^1/{}_2 v^2 + w - u - \rho u_\rho + T u_T) + (4\pi)^{-1}(v_n \mu H^2 - \\
& -\mu H_n (\mathbf{H}\cdot\mathbf{v}))] = 0 \\
& [\mu H_n] = 0,\ \mu H_n [\mathbf{v}_\tau] = [v_n \mu \mathbf{H}_\tau] \\
& u = (4\pi\rho)^{-1}\int_0^H \mu(\rho, T, H)\, H dH, \qquad u_\rho \equiv \frac{\partial u}{\partial \rho}, \qquad u_T \equiv \frac{\partial u}{\partial T}
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathbf{v}_\tau$, $\mathbf{H}_\tau$ — касательные к поверхности разрыва компоненты скорости и поля, w — энтальпия среды в отсутствие электромагнитного поля, $[\mathbf{a}] \equiv \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$, где $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ — значения величины $\mathbf{a}$ до и после скачка соответственно.

Последнее условие в (1) получено из непрерывности касательной компоненты $\mathbf{E}_\tau$, а скачок $\mathbf{H}_\tau$ определяет поверхностный ток $\mathbf{i} = c(4\pi)^{-1} \times ([\mathbf{H}_\tau] \times \mathbf{n})$

Для непроводящей среды ($[\mathbf{H}_\tau] = 0$) получаем также восемь условий

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad & [\rho v_n] = 0, \quad [\rho v_n \mathbf{v}_\tau] = 0 \\
& [\rho v_n^2 + p - \rho^2 u\rho - (4\pi)^{-1}\mu H_n^2] = 0 \\
& [\rho v_n ({}^1/{}_2 v^2 + w - u - \rho u_\rho + T u_T)] = 0 \\
& [\mu H_n] = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau] = 0
\end{aligned}
$$

При $\mu = \mathrm{const}$ условия (2) приводят к обычным газодинамическим условиям и условиям для магнитного поля, не взаимодействующего со средой, а условия (1) — к условиям на разрывах, рассматриваемых в магнитной гидродинамике.

Следуя принятой в магнитной гидродинамике классификации, рассмотрим особенности, которые привносит в характеристику каждого типа разрывов способность среды к намагничиванию.

Контактные разрывы — это поверхности разрыва, состоящие из линий тока, через них нет потока вещества ($v_n = 0$), но есть магнитный поток

($H_n \neq 0$). Для них из (1) получаем

$$[\mathbf{H}_\tau] = 0, \quad [\mathbf{v}_\tau] = 0, \quad [\mu H_n] = 0, \quad [p] = [\rho^2 u_\rho + (4\pi)^{-1}\mu H_n^2] \tag{3}$$

При этом скачок $[\rho]$ остается произвольным.

На контактных разрывах в непроводящей намагничивающейся среде, как следует из (2), должны быть выполнены все условия (3), кроме $[\mathbf{v}_\tau] = 0$.

Из (3) следует, что на контактных разрывах намагничивающейся среды (они иногда могут быть поверхностями раздела двух несмешивающихся сред) давление не является непрерывной величиной, при этом скачок давления определяется различием магнитных проницаемостей по обе стороны разрыва.

Если μ постоянно в средах по обе стороны разрыва, то из (3) получаем

$$[p] = -\frac{[\mu]}{8\pi}\left(\frac{B_n^2}{\mu_1\mu_2} + H_\tau^2\right) \tag{4}$$

Из (4) следует, что давление всегда больше в среде с меньшей магнитной проницаемостью, так что на контактный разрыв действует нормальная сила в сторону среды с меньшей проницаемостью.

Однако картина может быть иной, если учесть магнитострикционные силы.

Например, в случае сред, намагничивающихся по закону Клазиуса — Моссоти ($(\mu - 1)\, T / \rho\mu = \mathrm{const}$), из (3) найдем

$$[p] = \frac{H_\tau^2}{8\pi}[\mu(\mu - 2)] = \frac{H_\tau^2}{8\pi}(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 + \mu_1 - 2)$$

Отсюда следует, что в парамагнитных средах ($\mu > 1$) давление больше с той стороны разрыва, где магнитная проницаемость больше, так что направление поляризационной силы, действующей на контактный разрыв, меняется на противоположное.

Скачок давления здесь определяется только величиной касательной компоненты поля.

В случае магнитного насыщения среды, когда можно принять $\mu = 1 + 4\pi H^{-1} M(\rho, T)$, где M — функция намагниченности, из (3) получаем

$$[p] = \frac{B_n^2}{8\pi}\left[\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^2\right] + \left[\rho^2 H \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{M}{\rho}\right)\right]$$

Отсюда, если величина M линейно зависит от ρ, что обычно принимают на основании элементарного кинетического анализа для газов, то давление в парамагнитной среде больше там, где меньше μ, но скачок давления в этом случае определяется только нормальной компонентой поля.

Если же не учитывать магнитострикционных эффектов ($M = M(T)$), что иногда делают для капельных сред [2], то имеем

$$[p] = -\frac{[\mu]}{4\pi}\left(H_\tau^2 + \frac{B_n^2(\mu_1 + \mu_2)}{2\mu_1^2\mu_2^2}\right)$$

Видно, что здесь поляризационная сила действует в сторону среды с меньшей магнитной проницаемостью и определяется как нормальной, так и касательной компонентой магнитного поля.

Рассмотренные выше поляризационные силы играют существенную роль в вопросах устойчивости поверхностей раздела намагничивающихся сред.

Поскольку в контактных разрывах скачок плотности произволен, то при известной функции $\mu = \mu(\rho, T, H)$ два последних условия (3) позволяют полностью определить ρ_2, T_2 через величины до скачка.

Тангенциальные разрывы ($v_n = 0$, $H_n = 0$)— это контактные разрывы в касательном магнитном поле. Для этих разрывов из (3) получаем $[p] = [\rho^2 u_\rho]$, причем скачки $[\mathbf{v}_\tau]$, $[H_\tau]$, $[\rho]$ могут иметь произвольные значения (в случае непроводящей среды произвольны лишь $[\mathbf{v}_\tau]$ и $[\rho]$, в то время как $[\mathbf{H}_\tau] = 0$).

Тангенциальные разрывы, таким образом, могут нести поверхностный ток (в проводящей среде) и вихревую пелену.

В связи с этим скачок давлений на тангенциальных разрывах определяется не только различием магнитных проницаемостей, но и разностью касательных компонент поля.

Например, в слабых полях ($\mu = \mu(\rho, T)$) для тангенциальных разрывов имеем

$$[p] = \frac{1}{8\pi}\left[H_\tau^2\left(\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho} - \mu\right)\right]$$

Отсюда следует, что если в немагнитной среде при наличии поверхностного тока всегда есть скачок давления, то в намагничивающейся среде магнитострикционные силы могут полностью ликвидировать этот скачок (например, при $\mu / \rho = \mathrm{const}$).

Рассмотрим теперь разрывы—альфвеновские и ударные волны, через которые есть поток вещества, т. е. для которых $v_n \neq 0$. При этом, исключая при помощи второго соотношения (1) скачок $[\mathbf{v}_\tau]$, с учетом $m_n \equiv \rho v_n \neq 0$ запишем систему (1) в виде

$$(5)\qquad [\rho v_n] = 0, \quad [\mu H_n] = 0, \quad [m_n^2\rho^{-1} + p - \rho^2 u_\rho - (4\pi)^{-1}\mu H_n^2] = 0$$

$$\left[\frac{m_n^2}{2\rho^2} + w - \rho u_\rho - u + T u_T + \frac{\mu H_\tau^2}{4\pi\rho} - \frac{\mu^2 H_n^2 H_\tau^2}{32\pi^2 m_n^2}\right] = 0$$

$$\left[\frac{\mu \mathbf{H}_\tau}{v_n}\left(v_n^2 - \frac{\mu H_n^2}{4\pi\rho}\right)\right] = 0$$

а систему (2) для непроводящей среды — в виде

$$(6)\qquad [\rho\, v_n] = 0, \quad [\mu\, H_n] = 0, \quad [m_n^2\rho + p - \rho^2 u_\rho - (4\,\pi)^{-1}\mu H_n^2] = 0$$

$$\left[\frac{m_n^2}{2\rho^2} + w - \rho u_\rho - u + T u_T\right] = 0$$

$$[\mathbf{v}_\tau] = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau] = 0$$

Альфвеновские разрывы — это поверхности разрыва, проходя через которые среда не меняет своей плотности, т. е. для них $v_n \neq 0$, но $[\rho] = 0$.

Для альфвеновских разрывов в намагничивающейся проводящей среде из (5) имеем

$$(7)\qquad [v_n] = 0, \quad [\mu\, H_n] = 0, \quad [p - \rho_1^2 u_\rho - (4\pi)^{-1}\mu\, H_n^2] = 0$$

$$\left[w - \rho_1 u_\rho - u + T u_T + \frac{\mu H_\tau^2}{4\pi\rho_1} - \frac{\mu^2 H_n^2 H_\tau^2}{32\pi^2 m_n^2}\right] = 0$$

$$\left[\mu \mathbf{H}_\tau\left(v_n^2 - \frac{\mu H_n^2}{4\pi\rho_1}\right)\right] = 0$$

Как известно [3], в немагнитной среде альфвеновский разрыв является вращательным разрывом ($[H_\tau] = 0$), т. е. обладает свойством круговой поляризации, а скорость его перемещения равна альфвеновской

$$v_n = A_n \equiv \sqrt{\mu H_n^2 / 4\pi\rho_1}$$

В среде с намагничиванием рассматриваемый разрыв может быть плоскополяризованным.

Если скорость волны равна A_n, то из выражения для A_n и из первых двух соотношений (7) следует: $[\mu] = 0$ и $[H_n] = 0$. При этом изменение величины вектора $\mathbf{H}_\tau$, вообще говоря, связано с изменением температуры среды соотношением $\mu_1 = \mu_2$, т. е.

$$\mu\left(\rho_1, T_1, \sqrt{H_{n1}^2 + H_{\tau 1}^2}\right) = \mu\left(\rho_1, T_2, \sqrt{H_{n1}^2 + H_{\tau 2}}\right) \tag{8}$$

Следовательно, при $v_n = A_n$ для определения T_2, p_2, $H_{\tau 2}$ из (7) имеем при заданном H_n три соотношения

$$[\mu] = 0, \quad [p] = \rho_1^2 [u_\rho] \tag{9}$$

$$\left[w - \rho_1 u_\rho - u + T u_T + \frac{\mu H_\tau^2}{8\pi\rho_1}\right] = 0$$

Заметим, что условие (8) налагает довольно сильное ограничение на изменение температуры, и если оно не может быть выполнено для $T_1 \neq T_2$, $H_{\tau 1} \neq H_{\tau 2}$ при неубывании полной энтропии в скачке, то может существовать лишь такой обычный вращательный разрыв, в котором $\mathbf{H}_\tau$ меняется только по направлению, а изменение остальных параметров всегда удовлетворяет (9). Например, в случае $\mu = \mu(\rho, T)$ из (8) следует: $[T] = 0$. Тогда из (9) имеем $[H_\tau] = 0$, $[p] = 0$, $[w] = 0$, так что в слабых полях при $v_n = A_n$ разрыв может быть только обычным вращательным.

Если скорость прохождения среды через разрыв не равна альфвеновской, т. е. $v_n \neq A_n$, то из последнего соотношения (7) следует, что направление вектора $\mathbf{H}_\tau$ не меняется в скачке, так что такая волна является плоскополяризованной.

Обозначая $v_n / A_n \equiv \gamma$, из (7) получаем при заданных γ, B_n три уравнения для определения T_2, p_2, $H_{\tau 2}$

$$[(\mu - \mu_1\gamma^{-2}) H_\tau] = 0, \quad [p] = \rho_1^2 [u_\rho] + \frac{B_n^2}{4\pi}\left[\frac{1}{\mu}\right]$$

$$[w] = [\rho_1 u_\rho + u - T u_T - (2\mu\gamma^2 - \mu_1) H_\tau^2 \gamma^{-2} (8\pi\rho_1)^{-1}]$$

Эти уравнения совместно с неравенством $[s + u_T] \geqslant 0$, выражающим факт неубывания полной энтропии среды в скачке, служат для расчета альфвеновских плоскополяризованных скачков, существующих только в намагничивающейся среде. Пример такого расчета в насыщенном идеальном газе ($\mu = 1 + 4\pi\rho K(\theta - T) H^{-1}$) приведен в [4].

Можно показать, что при $\rho = \text{const}$ распространяющихся с конечной скоростью простых волн в непроводящей намагничивающейся среде не существует.

Поэтому из системы условий, следующей из (6) при $[\rho] = 0$, вытекает равенство всех скачков нулю, так что в непроводящей намагничивающейся среде альфвеновские скачки существовать не могут.

Ударные волны — это поверхности разрыва, на которых выполняются условия (5) и (6) в наиболее общей форме, причем $m_n \neq 0$, $[\rho] \neq 0$.

Ударные волны и в намагничивающейся среде являются плоскополяризованными.

Последние три условия (5) служат для определения T_2, p_2, $H_{\tau 2}$, а из (6) в непроводящей среде определяются величины T_2, p_2.

В продольной ударной волне ($B_n = 0$) в проводящей намагничивающейся среде магнитная индукция пропорциональна плотности ρ ($\mathbf{B} / \rho = \mathrm{const}$).

В проводящей намагничивающейся среде существуют такие же особые ударные волны, как и в немагнитной среде.

Исключая из четвертого условия (5) поток m_n при помощи третьего и последнего условий, получаем уравнение ударной адиабаты для намагничивающейся проводящей среды в виде

$$[w] = [u + \rho u_\rho - T u_T] + \left(\overline{\frac{1}{\rho}}\right)\left[p - \rho^2 u_\rho - \frac{\mu H_n^2}{4\pi}\right] - \frac{1}{4\pi}\left(\overline{\frac{\mu H_\tau}{\rho}}\right)[H_\tau] \tag{10}$$

где черта означает среднее в скачке значение ($\bar{a} \equiv {}^1/_2(a_2 + a_1)$).

Уравнение адиабаты (10) может быть записано в более компактной форме через полные (гидродинамические плюс электромагнитные) энтальпию и давление, а именно

$$\begin{gathered}[w'] = \left(\overline{\frac{1}{\rho}}\right)\left[p' - \frac{\mu H_n^2}{4\pi}\right] - \frac{1}{4\pi}\left(\overline{\frac{\mu H_\tau}{\rho}}\right)[H_\tau] \\ p' \equiv p + p^e = p - \rho^2 u_\rho \\ w' \equiv w + U^e + \frac{p^e}{\rho} - \frac{HB}{4\pi\rho} = w - \rho u_\rho - u + T u_T\end{gathered} \tag{11}$$

При $[H_\tau] = 0$ из (10) и (11) получаем уравнение ударной адиабаты для непроводящей намагничивающейся среды в магнитном поле.

При $\mu = \mathrm{const}$ уравнения (10) и (11) переходят в известное уравнение ударной адиабаты для немагнитной среды.

Поступила 25 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарапов И. Е.* Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 17. Харьков, Изд. Харьк. ун-та, 1973, стр. 221—239.
2. *Neuringer J., Rosensweig R.* Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
3. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
4. *Тарапов И. Е.* Поперечные волны и разрывы в идеальной намагничивающейся жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.