К ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ ГАЗОВ И КОНДЕНСИРОВАННЫХ ВЕЩЕСТВ

С. А. Каганов (*Саратов*)

При изучении процесса горения в различных системах, ввиду невозможности получения точных решений соответствующих уравнений, весьма часто приходится делать дополнительные предположения о свойствах тех или иных величин. Так, например, при изучении горения пороха большую роль играет градиент температуры на поверхности конденсированной фазы. В стационарном режиме этот градиент φ определяется соотношением

$$\varphi = u\lambda^{-1}(T_1 - T_0) \qquad (0.1)$$

Здесь u — скорость горения, λ — коэффициент температуропроводности, T_1 — температура поверхности пороха, T_0 — температура холодного пороха.

Важно выяснить, как ведет себя φ при изменении T_0. При уменьшении T_0 множитель u уменьшается, а $(T_1 - T_0)$ увеличивается, и весьма затруднительно делать какие-либо заключения относительно поведения φ. Я. Б. Зельдович в [1,2] предположил, что градиент φ как функция T_0 имеет максимум и что каждому значению φ соответствуют два режима горения — один устойчивый (для большого T_0) и один неустойчивый (для меньшего T_0). Так как в точке максимума $d\varphi/dT_0 = 0$, то горение считается устойчивым, если $d\varphi/dT_0 < 0$, и неустойчивым при $d\varphi / dT_0 > 0$. Однако неоднократно отмечалось [2–5], что этот критерий выполняется не всегда, и высказывались различные предполжения относительно возможных причин этого отклонения. Вместе с тем, представляет несомненный интерес анализ основного предположения о наличии максимума φ. Для того чтобы иметь возможность провести такой анализ, необходимо правую часть (0.1) выразить через одну переменную u или T_0, для чего, в свою очередь, следует получить зависимость между u и T_0.

Статья состоит из четырех параграфов. В § 1 изучается нормальное распространение пламени и получена формула, связывающая u и T_0. В § 2 аналогичным методом получена связь u и T_0. в случае горения конденсированных веществ. В § 3 полученные формулы применяются для изучения поведения градиента температуры; § 4 посвящен анализу устойчивости процессов горения.

§ 1. **Нормальное распространение пламени в газах.** Как известно [6,7], нормальное распространение пламени в газе при равенстве коэффициентов температуропроводности и диффузии описывается дифференциальным уравнением

$$\lambda d^2T/dx^2 + u dT/dx + F(T) = 0 \qquad (1.1)$$

с граничными условиями

$$T|_{x\to-\infty} = T_2, \quad T|_{x\to+\infty} = T_0 \qquad (1.2)$$

Здесь $T(x)$ — температура вдоль оси x, T_0 — температура холодного газа, T_2 — температура сгоревшего газа, λ — коэффициент температуропроводности. Пламя распространяется в положительном направлении оси x. Функция $F(T)$ удовлетворяет условиям: $F(T) = 0$ при $T_0 \leqslant T \leqslant T_1$; $F(T) > 0$ при $T_1 < T < T_2$ и $F(T) = 0$ при $T > T_2$. В интервале (T_1, T_2) функция $F(T)$ имеет один максимум. Параметр u характеризует нормальную скорость распространения пламени. Требуется найти значение этого параметра, для которого существует решение задачи (1.1), (1.2).

В [6,7] доказано существование единственного значения этого параметра. Для вычисления u предложены различные методы [6,8–10]. В [6,10] дана формула для приближенного вычисления u

$$u = \frac{\sqrt{2\lambda J}}{T_1 - T_0}, \qquad J = \int_{T_1}^{T_2} F(T)\,dT \qquad (1.3)$$

основанная на пренебрежении в зоне горения средним членом уравнения (1.1). Нетрудно заметить, что формула (1.3) дает увеличенное, по сравнению с точным, значение u. Действительно, если не пренебрегать средним членом, то в (1.3) под знаком интеграла должно стоять $F(T) + u dT / dx$, что меньше $F(T)$, так как $dT / dx < 0$. Это становится особенно заметным при $T_0 \to T_1$, так как тогда по формуле (1.3) значение u может стать как угодно большим; что на самом деле u ограничено при $T_0 \to T_1$ следует из [11].

В [8] дан обзор различных способов решения задачи. В [9] для нахождения u применялось численное интегрирование нестационарной системы уравнений теплопроводности и диффузии.

В настоящем параграфе предлагается способ, который позволяет сравнительно просто найти приближенное значение u и распределение температуры в пламени. Как показывает приводимый в конце параграфа пример, вычисленное указанным способом значение u достаточно близко в точному. Удобство данного способа заключается и в том, что зависимость u от параметров процесса получается в аналитическом виде.

Предположим, что $T/_{x=0} = T_1$, тогда для $x \geqslant 0$

$$T|_{x\geqslant 0} = (T_1 - T_0)\exp(-ux/\lambda) + T_0 \tag{1.4}$$

Для нахождения распределения температуры при $x < 0$ заменим функцию $F(T)$ кусочно-линейной на интервале $[T_1, T_2]$. Линеаризацию произведем следующим образом. Возьмем в $[T_1, T_2]$ точку T_3 и построим треугольник с основанием $[T_1, T_2]$ и третьей вершиной P, расположенной над точкой T_3. Потребуем, чтобы площадь треугольника была равна площади под кривой $F(T)$, т. е.

$$S = \int_{T_1}^{T_2} F(T)\,dT = J$$

Очевидно, что тем самым третья вершина определяется однозначно (при данном выборе T_3). Точку T_3 можно выбрать в точке максимума $F(T)$. Обозначим полученную подобным образом функцию через $F^*(T)$, имеем

$$F^*(T) = \begin{cases} \beta_1(T - T_1) & \text{для } T_1 \leqslant T \leqslant T_3 \quad (\beta_1 > 0) \\ \beta_2(T - T_2) & \text{для } T_3 \leqslant T \leqslant T_2 \quad (\beta_2 < 0) \\ 0 & \text{для } T < T_1 \text{ и } \quad T > T_2 \end{cases}$$

Пусть $T(x)$ принимает значение T_3 при $x = l < 0$. Тогда для интервала $(l, 0)$ решение определяется уравнением

$$\lambda\, d_2T/dx^2 + u\,dT/dx + \beta_1(T - T_1) = 0 \tag{1.5}$$

При интегрировании этого уравнения следует иметь в виду, что если $T_0 = T_1$, то $u = 2\sqrt{\lambda\beta_1}$ согласно [12], поэтому для $T_0 < T_1$ должно $u < 2\sqrt{\lambda\beta_1}$. Решение имеет вид

$$T|_{x\in[l,\,0]} = C_1\exp(-ux/2\lambda)\sin{}^1/_2\lambda^{-1}\sqrt{4\lambda\beta_1 - u^2x}) + T_1 \tag{1.6}$$

Постоянная c_1 определяется из условия $T|_{x=l} = T_3$

$$C_1 = \frac{(T_3 - T_1)\exp(ul/2\lambda)}{\sin({}^1/_2\lambda^{-1}\sqrt{4\lambda\beta_1 - u^2}l)} \tag{1.7}$$

Для $x \leqslant l$ решение определяется уравнением (1.1), в котором $F(T) = \beta_2(T - T_2)$, это решение имеет вид

$$T|_{x\leqslant l} = c_2\exp(r_2x) + T_2$$

$$(r_2 = -u/2\lambda + \sqrt{u^2/4\lambda^2 + |\beta_2|/\lambda}, \quad c_2 = (T_3 - T_2)\exp(-r_2l)$$

При $x = 0$ и $x = l$ должны выполняться условия сопряжения-равенства первых производных, что дает нам два уравнения для определения l и u

$$-(T_1 - T_0)\,u = \frac{1}{2}\,\frac{(T_3 - T_1)\exp(ul/2\lambda)\sqrt{4\lambda\beta_1 - u^2}}{\sin({}^1/_2\lambda^{-1}\sqrt{4\lambda\beta_1 - u^2}l)} \tag{1.8}$$

$$(T_3 - T_2)\,r_2 = \left[\frac{-u}{2\lambda}\sin\left(\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sqrt{4\lambda\beta_1 - u^2}l\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{1}{2\lambda}\sqrt{4\lambda\beta_1 - u^2}\,l\right)\frac{1}{2\lambda}\sqrt{4\lambda\beta_1 - u^2}\right]\frac{(T_3 - T_1)}{\sin({}^1/_2\lambda^{-1}\sqrt{4\lambda\beta_1 - u^2}l)} \tag{1.9}$$

Однако для решения и исследования эта система неудобна. Учитывая, что обычно T_3 близко к T_2, совершим переход к пределу при $T_3 \to T_2$. Этот предельный переход можно истолковать как замену функции $F(T)$ на интервале $[T_1, T_2]$ функцией $\beta(T - T_1)$ так, чтобы площадь соответствующего треугольника равнялась J. В этом случае имеем

$$\beta = 2J/(T_2 - T_1)^2$$

Из (1.9) получаем

$$\operatorname{tg}({}^1/_2\lambda^{-1}\sqrt{4\lambda\beta - u^2}\,l) = u^{-1}\sqrt{4\lambda\beta - u^2} \tag{1.10}$$

Тогда (1.8) принимает вид

$$u \exp(-ul/\lambda) = \sqrt{2\lambda J} / T_1 - T_0 \tag{1.11}$$

При этом следует учитывать, что для заданного u рассматривается решение (1.10), определяемое первым отрицательным корнем. Система (1.10), (1.11) однозначно определяет l и u. Для $u \to 0$ имеем $l \sim {}^1/_2\pi\sqrt{\lambda/\beta}$ и $l \sim -2\pi\lambda / \sqrt{4\lambda\beta - u^2}$ при $u \to 2\sqrt{\lambda\beta}$. Приближенно можно l представить в виде

$$l \approx -2\pi\lambda / \sqrt{4\lambda\beta - u^2} + \pi/2\sqrt{\lambda/\beta} \tag{1.12}$$

$$u \to 0 \qquad \text{при } T_0 \to -\infty, \qquad u \to 2\sqrt{\lambda\beta} \qquad \text{при } T_0 \to T_1$$

Для малых u имеем $\exp(-ul/\lambda) \approx 1$, и формула (1.11) переходит в формулу (1.3). Так как $l < 0$, то формула (1.11) определяет значение u, меньшее, чем в (1.3).

Таким образом, для вычисления u требуется вычислить интеграл J, затем решить систему (1.10), (1.11). Практически искомое значение u можно «нащупать» достаточно быстро, учитывая, что максимально возможное его значение равно $2\sqrt{\lambda\beta}$. После нахождения l и u получаем распределение температуры

$$T|_{x\geqslant 0} = (T_1 - T_0)\exp(-ux/\lambda) + T_1,$$

$$T|_{l\leqslant x\leqslant 0} = c\exp(-{}^1/_2 ux/\lambda)\sin({}^1/_2\lambda^{-1}\sqrt{4\lambda\beta - u^2}x) + T_1$$

$$T|_{x\leqslant l} = T_2 \qquad c = -2(T_2 - T_1)\exp(ul/\lambda)\sqrt{\lambda\beta/4\lambda\beta - u^2}$$

Во многих работах отмечается трудность, возникающая в связи с введением температуры воспламенения T_1. Эту температуру опытным путем определить трудно, однако в теоретических моделях она должна участвовать, так как обычно имеется интервал температур, больших T_0, при которых газ не реагирует. При использовании закона Аррениуса для скорости реакции $F(T) = \exp(-E/RT)(A - BT)$.

В этом случае можно значение T_1 выбирать так, чтобы после T_1 функция $F(T)$ начинала быстро возрастать. Некоторый произвол в выборе T_1 при этом не очень существен.

В [6,10] для исключения температуры воспламенения применен следующий прием. В формуле (1.3) в интеграле нижний предел T_1 заменяется значением T_0, разность $T_1 - T_0$ — разностью $T_2 - T_0$. Если замена нижнего предела вполне приемлема, так как на участке $[T_0, T_1]$ функция $F(T)$ близка к нулю, замена на $T_2 - T_0$ выглядит необоснованной, если T_2 сильно отличается от T_1. Для иллюстрации и сравнения рассмотрим пример из работы [9] для интересующего нас случая равенства коэффициентов температуропроводности и диффузии (в обозначениях [9] случай $\alpha = 1$). Функция

$$F(T) = 10^4 \exp(-15\,000/T)(2300 - T), \ \lambda = 1, \ T_0 = 300, \ T_2 = 2300$$

$$F(1000) \approx 0, \ F(1100) \approx 1{,}6, \ F(1200) \approx 3.9, \ F(1300) \approx 99, \ F(1400) \approx 202.$$

Положим $T_1 = 1200$, тогда

$$T_1 - T_0 = 900, \ T_2 - T_0 = 2000; \ J = 898 \cdot 10^3$$

Если пользоваться формулой (1.3), то получим $u = 1{,}5$. Если заменить $T_1 - T_0$ на $T_2 - T_0$, получаем $u = 0.67$. Точное значение u, найденное в [9] численным интегрированием, равно 0.71. Подсчитаем u предложенным в настоящей статье методом. Имеем $\beta = 1.48$, минуя промежуточные пробные шаги, положим $u = 0.60$. Тогда из (1.10) имеем $l \approx -1.6$, $u\exp(-ul) = 1.56$. Правая часть (1.11) равна 1,5, поэтому можно принять $u = 0.60$. Если взять $T_1 = 1100$ или $T_1 = 1300$, получаем примерно то же значение u.

§ 2. **Горение конденсированных веществ.** Этот же метод может быть применен при изучении горения конденсированных веществ (порохов и твердых ракетных топлив). Пусть твердая фаза (k-фаза) занимает область $x > 0$. Начало координат выберем на поверхности горения k-фазы, поэтому твердое топливо движется со скоростью u к поверхности $x = 0$. На поверхности $x = 0$ происходит разложение k-фазы и в области $x < 0$ расположены газообразные продукты горения, удаляющиеся от поверхности со скоростью αu, где $\alpha = \rho_1/\rho_2$ и ρ_1, ρ_2 — плотности k-фазы и газа соответственно. Процесс разложения k-фазы может быть эндотермическим и экзотермическим, а также термонейтральным. Будем считать, что теплопоглощение или тепловыделение в k-фазе определяется величиной q; $q > 0$ — в случае эндотермического разложения, $q < 0$ — в случае экзотермического и $q = 0$ — в случае термонейтрального. Тогда

$$\lambda_1 d^2T/dx^2 + u\,dT/dx = 0, \quad T|_{x=0} = T_1, \quad T|_{x\to+\infty} = T_0 \quad (x \geqslant 0)$$

$$\lambda_2 d^2T/dx^2 + \alpha u\,dT/dx + F(T) = 0, \quad T|_{x\to-\infty} = T_2, \quad T|_{x=0} = T_1 \quad (x \leqslant 0)$$

а также

$$k_1 dT/dx|_{x=+0} - k_2 dT/dx|_{x=-0} = q\rho_1 u$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности k-фазы и газа соответственно, c_1, c_2 — соответствующие теплоемкости.

При решении этой задачи поступим так же, как в § 1, линеаризируя $F(T)$ в интервале $[T_1, T_2]$. Опуская аналогичные выкладки, запишем систему для определения l и u

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\lambda_2^{-1}\sqrt{4\lambda_2\beta-\alpha^2u^2}\,l\right)=(\alpha u)^{-1}\sqrt{4\lambda_2\beta-\alpha^2u^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{k_2\lambda_2^{-1}\sqrt{2\lambda_2 J}}{k_1\lambda_1^{-1}(T_1-T_0)+q}=u\exp\left(\frac{-\alpha ul}{\lambda_2}\right) \tag{2.2}$$

$$l\approx-\frac{2\pi\lambda_2}{\sqrt{4\lambda_2\beta-\alpha^2u^2}}+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\lambda_2}{\beta}\right)^{1/2} \tag{2.3}$$

Соотношения (2.1), (2.2) определяют u как функцию T_0. Если $q>0$ (эндотермическое разложение k-фазы), то при $T_0=T_1$ скорость не достигает значения $u=2\sqrt{\lambda_2\beta}/\alpha$. В случае $q=0$ ситуация аналогична рассмотренной в § 1. Если же $q=-p<0$, то при максимально допустимом значении T_0, определяемом из соотношения

$$k_1\lambda_1^{-1}(T_1-T_0)=p\rho_1,\qquad \text{или}\qquad C_1(T_1-T_0)=p \tag{2.4}$$

скорость принимает значение $u=2\sqrt{\lambda_2\beta}/\alpha$. Отметим, что знаменатель в левой части (2.2) не может быть отрицательным, так как это означало бы, что $p>C_1(T_1-T_0)$, и процесс определяется реакцией разложения k-фазы, а не реакцией в газе.

§ 3. **Поведение градиента температуры при $x=0$.** Применим предыдущие результаты для исследования поведения градиента при $x=0$. Градиент будем рассматривать по абсолютной величине. В случае горения газа из (1.11) имеем

$$\varphi=(T_1-T_0)u/\lambda=\lambda^{-1}\sqrt{2\lambda J}\exp(ul/\lambda) \tag{3.1}$$

$$\varphi\to\sqrt{2J/\lambda}\quad\text{при } T_0\to-\infty,\quad u\to0;\quad \varphi\to0\quad\text{при } T_0\to T_1$$

Из (3.1) видно, что φ — убывающая функция $u(T_0)$ и экстремумов не имеет. Наибольшее значение φ равно $\sqrt{2J/\lambda}$ и достигается при $T_0\to-\infty$. Каждому возможному значению φ соответствует один режим горения.

В случае горения конденсированных веществ из формулы (2.2) получаем

$$\varphi=\frac{(T_1-T_0)u}{\lambda_1}=\frac{1}{k_1}\left[\frac{k_2}{\lambda_2}\sqrt{2\lambda_2 J}\exp\frac{\alpha ul}{\lambda_2}-q\rho_1 u\right] \tag{3.2}$$

Соотношения (1.8), (1.10) и (3.2), (2.1) определяют φ как функцю u и, следовательно, как функцию T_0. Можно также из этих соотношений определить u как функцию φ.

Если $q\geqslant0$, то получаем аналогичным образом: если $T_0\to-\infty$, то $\varphi\to k_2k_1^{-1}\sqrt{2J/\lambda_2}$ — наибольшему значению градиента. При $T_0\to T_1$ величина $\varphi\to0$; φ — убывающая функция T_0, и каждому допустимому значению φ соответствует один режим горения.

Рассмотрим случай $q<0$. Тогда $(q=-p<0)$

$$\varphi\to k_2k_1^{-1}\sqrt{2J/\lambda_2}\qquad\text{при } T_0\to-\infty,\ u\to0$$

$$\varphi\to2k_1^{-1}\sqrt{\lambda_2\beta}\,\rho_2 p\ \text{при } k_1\lambda_1^{-1}(T_1-T_0)\to p\rho_1\,(c_1(T_1-T_0)\to p)$$

$$u\to2\alpha^{-1}\sqrt{\lambda_2 J}$$

Очевидно, следует считать $p<c_2(T_2-T_1)$. Поэтому

$$\varphi<2k_2k_1^{-1}\sqrt{2J/\lambda_2}\ \text{при } u\to2\alpha^{-1}\sqrt{\lambda_2\beta}$$

Найдем $d\varphi/du$ (ввиду того что $du/dT_0>0$, знак $d\varphi/du$ совпадает со знаком $d\varphi/dT_0$)

$$\frac{d\varphi}{du}=\frac{1}{k_1}\left[\frac{k_2}{\lambda_2}\sqrt{2\lambda_2 J}\exp(\alpha ul/\lambda_2)\frac{\alpha}{\lambda_2}(ul)'+p\rho_1\right]$$

Нетрудно видеть, что $d\varphi/du\to p\varphi_1>0$ при $u\to2\sqrt{\lambda_2\beta}/\alpha$; при $T_0\to-\infty$

$$\frac{d\varphi}{du}\to\frac{1}{k_1}\left[-\frac{k_2}{\lambda_2}\sqrt{2\lambda_2 J}\frac{\alpha}{\lambda_2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{\lambda_2}{\beta}\right)^{1/2}+p\rho_1\right]=\frac{1}{k_1}\left[p-\frac{1}{2}\pi c_2(T_2-T_1)\right]<0$$

Поэтому имеется точка, в которой $d\varphi/du = 0$, но это будет не точка максимума, а точка минимума градиента. Возникает вопрос, не будет ли других экстремумов. Очевидно, для конкретных значений параметров можно при помощи (3.2), (2.1) построить график функции $\varphi(u)$ и проверить наличие максимума. Для малых p других экстремумов не будет. Быстрое убывание множителя $\exp(\alpha ul / \lambda)$ при увеличении u дает основание предполагать, что, кроме указанного минимума, и для любых p нет других экстремумов.

§ 4. **Применение к изучению устойчивости горения.** Как отмечалось во введении, многие работы посвящены изучению устойчивости горения пороха [1–5,13]. В [1,2] было высказано предположение, что существует значение градиента φ^* такое, что стационарный режим с градиентом, большим φ^*, невозможен. Результаты настоящей статьи подтверждают наличие наибольшего градиента для стационарных режимов. Однако в теории устойчивости горения порохов весьма важно выяснить, является ли это наибольшее значение максимумом. В [2] предполагается, что максимум существует и что при $d\varphi / dT_0 < 0$ режим устойчив, а при $d\varphi / dT_0 > 0$ — неустойчив. В весьма общей форме исследование устойчивости проведено в [5]. Поскольку в нашей модели, так же как в [1,2,13], температура поверхности горения считается постоянной, воспользуемся результатами работы [5] для этого случая. Именно, в [5] показано, что если

$$k = (T_1 - T_0)\, d \ln u / dT_0 < 1$$

то горение устойчиво, если же $k > 1$, то неустойчиво. Нетрудно заметить, что условие $k < 1\ (> 1)$ равносильно условию $d\varphi / dT_0 < 0\ (> 0)$. Но как показано выше, в случае эндотермического разложения k-фазы (такой случай рассмотрен в [1,2]) всегда $k < 1$, т. е. в этом случае стационарный режим всегда устойчив. Этот результат кажется вполне естественным, так как рассматриваемая модель горения пороха аналогична модели распространения пламени, в которой, как известно [7], стационарный режим всегда устойчив. Отметим попутно, что в случае нормального распространения пламени $k < 1$, откуда также следует устойчивость.

В случае экзотермического разложения получаем следующую картину. Здесь имеется минимум $\varphi(T_0)$, и поэтому для меньших T_0 получаем $d\varphi / dT_0 < 0$, откуда следует устойчивость. Для больших T_0 имеем $d\varphi / dT_0 > 0$ и неустойчивость соответствующих режимов. Но, очевидно, это не будет неустойчивостью, связанной с затуханием процесса, а наоборот, неустойчивостью, соответствующей ускорению процесса горения.

Автор благодарит С. В. Фальковича за обсуждение статьи.

Поступила 19 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. Ж. эксперим. и теор. физ., 1942, т. 12, № 11—12.
2. Зельдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
3. Истратов А. Г., Либрович Б. В. Об устойчивости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
4. Новиков С. С., Рязанцев Ю. Ю. К теории устойчивости горения порохов. ПМТФ, 1965, № 1.
5. Новожилов Б. В. Критерий устойчивости стационарного режима горения пороха. ПМТФ, 1965, № 4.
6. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, № 1.
7. Гельфанд И. М. Задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 2
8. Spalding D. Sixth Symposium (International) ot combustion. 1957 (русск. перев.: Пламена и химическая кинетика. Изд. иностр. лит., 1961).
9. Zeldovich Y. B., Barenblatt G. I. Theory of flame propogation. Combustion and flame, 1959, vol. 3, No 1.
10. Fundations of gas dynamics. Editor, Emmons H., 1959 (русск. перев.: Основы газовой динамики (под ред. Эммонса). Изд. иностр. лит., 1963).
11. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследования уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюлл. МГУ, 1937, Т. 1, вып. 6.
12. Каганов С. А. К теории распространения пламени. ПММ, 1965, вып. 2.
13. Зельдович Я. Б. Об устойчивости режима горения пороха в полузамкнутом объеме. ПМТФ, 1963, № 1.