

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СМЕСЯХ ПУЗЫРЬКОВОЙ СТРУКТУРЫ

*А. А. Губайдуллин, А. И. Ивандаев, Р. И. Нигматуллин*

*(Москва)*

За последние годы опубликовано много теоретических и экспериментальных работ по исследованию ударных волн в жидкостях, содержащих пузырьки газа [1—11]. Работы экспериментального плана посвящены исследованию структур волн сжатия в смесях с достаточно большими пузырьками ( $\sim 1$  мм) [4—6, 9]. В силу значительной длины зон релаксации волн в таких смесях ( $\sim 1$  м), соизмеримой с длиной ударных труб, наблюдавшиеся в [4—6, 9] волны, как правило, были нестационарными. Это впервые отмечено в [8], где указано на необходимость привлечения нестационарной теории к обработке опытных данных (до этого в теоретических работах [1, 3—5, 8, 9] исследовались лишь стационарные волновые конфигурации). Распространение слабой нестационарной волны было впервые исследовано в [7] на базе модельного уравнения Бюргера—Кортевега—де-Фриза. Описанию общего подхода к исследованию нестационарных волн в пузырьковых средах посвящена работа [10]. В данной работе основное внимание уделено вопросам конкретизации модели динамического поведения среды и обсуждению новых результатов.

1. Для описания неустановившихся движений смесей жидкостей с пузырьками газов воспользуемся методами механики сплошной среды, предполагая, что характерные линейные масштабы течения много больше размеров пузырьков и расстояний между ними. Модель динамического поведения смеси построим при следующих упрощающих предположениях:

1. Вязкости и теплопроводности фаз существенны лишь в процессах межфазного взаимодействия.
2. Пузырьки сферические и монодисперсные.
3. Дробление, столкновения и коагуляция пузырьков отсутствуют.
4. Скорости макроскопического движения фаз совпадают.
5. Плотность и температура жидкости постоянны.

Обсудим подробнее допущения 4, 5, представляющие принципиальный интерес с точки зрения простоты решения конкретных задач. В достаточно слабых волнах разность скоростей фаз мала и вязкая диссипация в относительном поступательном движении жидкости и пузырьков практически не ощутима на фоне преобладающей тепловой диссипации [8]. В более сильных волнах, когда несовпадение скоростей фаз значительно, пузырьки, как правило, дробятся [12]. Это приводит к резкому снижению скольжения фаз и соответствующему уменьшению диссипации из-за относительного движения. С учетом эффекта дробления пузырьков достаточно сильные волны также можно исследовать в рамках односкоростного подхода.

Предположение о постоянстве температуры жидкости с физической точки зрения вполне оправдано, так как теплоемкость жидкости (в единице объема смеси) существенно превышает теплоемкость газа. Допущение о постоянстве плотности жидкости применимо, если объемное содержание пузырьков в смеси достаточно велико и сжимаемость смеси практически определяется деформацией ее газовой составляющей.

Предположения о постоянстве плотности и температуры жидкости позволяют значительно упростить задачу исследования нестационарных течений смеси. Это особо относится к допущению о несжимаемости жидкой фазы, отсутствие которого усложняет моделирование процессов распространения волн, так как при этом возникает необходимость детального рас-

чета радиальных движений отдельных пузырьков, полей всех параметров вблизи них и процессов затухания ударных скачков, инициируемых в несущей фазе.

При сделанных предположениях запишем дифференциальные законы сохранения массы, импульса и энергии смеси в одномерном нестационарном движении при наличии внешних сил тяжести. Уравнения сохранения масс и импульса смеси имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{d\rho_2}{dt} + \rho_2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g,$$

$$\rho_1 = \alpha_1 \rho_1^0, \quad \rho_2 = \alpha_2 \rho_2^0, \quad \rho_1^0 = \text{const}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 (p_2 - 4\sigma/\delta),$$

где  $\rho$ ,  $p$ ,  $v$  — средние плотность, приведенное давление и скорость смеси;  $\rho_i^0$ ,  $\rho_i$ ,  $p_i$ ,  $\alpha_i$  — истинная и средняя плотности, давление и объемное содержание фазы;  $g$  — ускорение силы тяжести; индексы 1 и 2 внизу относятся к параметрам жидкости и газа соответственно.

Уравнения притока тепла к фазам могут быть записаны в виде

$$(1.2) \quad \rho_2 \frac{du_2}{dt} = \frac{\alpha_2 p_2}{\rho_2^0} \frac{d\rho_2^0}{dt} + nq, \quad T_1 = \text{const},$$

где  $u_2$  — внутренняя энергия газа;  $q$  — интенсивность межфазного теплообмена, приходящаяся на один пузырек;  $n$  — число пузырьков в единице объема смеси;  $T$  — абсолютная температура.

В соответствии с допущением 5 жидкость будем считать несжимаемой, в качестве уравнений состояния второй фазы возьмем уравнения состояния калорически совершенного газа

$$(1.3) \quad \rho_1^0 = \text{const}, \quad p_2 = (\gamma - 1) c_{v2} \rho_2^0 T_2, \quad u_2 = c_{v2} T_2,$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $c_{v2}$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

В силу принятых допущений 2, 3 справедливы соотношения

$$(1.4) \quad \rho_2^0 \delta^3 = \text{const}, \quad \alpha_2 = \pi \delta^3 n / \delta.$$

Интенсивность теплообмена индивидуального пузырька с жидкостью будем полагать пропорциональной разности температур фаз

$$(1.5) \quad q = \pi \delta^2 \beta (T_1 - T_2) = \pi \delta \lambda_2 \text{Nu} (T_1 - T_2) (\text{Nu} = \beta \delta / \lambda_2),$$

здесь  $\delta$  — диаметр пузырька;  $\beta$  и  $\text{Nu}$  — коэффициент межфазного теплообмена и число Нуссельта;  $\lambda_2$  — коэффициент теплопроводности газа.

Система уравнений (1.1)—(1.5) замкнута, если заданы условия совместного деформирования составляющих смеси. Для жидкости с пузырьками в качестве таких условий обычно используют уравнения Рэлея—Ламба [13, 14]. Однако известно, что эти уравнения получены применительно к колебаниям одиночного пузырька, находящегося в безграничной жидкости. Если пульсирующий пузырек неодинок (находится в окружении ансамбля других пузырьков), то нельзя обойтись без учета их влияния на динамику его радиального движения. Соответствующие поправки на «газосодержание» к уравнению Рэлея можно получить в рамках ячеис-

той модели среды, аналогичной соответствующей модели в кинетической теории плотных газов.

Ограничимся рассмотрением ячеек сферической формы с пузырьками, расположенными в их геометрических центрах. Будем предполагать, что возмущения, источники которых расположены вне ячеек, не влияют на течение жидкости внутри них (и наоборот). Имеем

$$(\delta/2R)^3 = \alpha_2, \quad \varphi = -w\delta^2/4r, \quad v = w\delta^2/4r^2,$$

где  $R$  — радиус эквивалентной ячейки;  $\varphi$  и  $v$  — потенциал и скорость радиального движения жидкости, описываемого интегралом Коши — Лагранжа

$$(1.6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_1^0} = -\frac{\delta}{2} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{3}{2} w^2 + \frac{(p_2 - 4\sigma/\delta)}{\rho_1^0}.$$

Введем среднее макроскопическое давление в жидкости

$$p_1 = 3 \left( \int_{\delta/2}^R pr^2 dr \right) / (R^3 - (\delta/2)^3).$$

Интегрируя (1.6) по объему ячейки и учитывая вязкость жидкости, получим следующее уточненное условие совместного деформирования фаз (уравнение пульсационного движения пузырька в смеси):

$$(1.7) \quad \delta(1 - \varphi_1) \frac{\partial w}{\partial t} + 3(1 - \varphi_2) w^2 + 16 \frac{\bar{v}_1}{\delta} w = \frac{2(p_2 - p_1 - 4\sigma/\delta)}{\rho_1^0}, \quad \frac{\partial \delta}{\partial t} = 2w,$$

$$\varphi_1 = 3(\alpha_2^{1/3} - \alpha_2)/2\alpha_1, \quad \varphi_2 = (\alpha_2^{1/3}(2 + \alpha_2) - 3\alpha_2)/\alpha_1,$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — искомые поправочные коэффициенты, учитывающие влияние конечности величины объемного содержания пузырьков на характер их пульсационного движения. По порядку величины они пропорциональны  $\alpha_2^{1/3}$  и при достаточно больших объемных содержаниях газа  $\alpha_2 \gg 1-3\%$  могут оказаться значительными. При  $\alpha_2 \rightarrow 0$   $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow 0$  и уравнение (1.7) переходит в обычное уравнение Рэлея — Ламба.

2. Для численного моделирования нестационарных волновых процессов в жидкостях с пузырьками газа на ЭВМ перейдем к следующим безразмерным переменным и параметрам:

$$(2.1) \quad P_i = p_i/p_0, \quad V = v/a_*, \quad \Phi = \rho/\rho_{10}^0, \quad \Phi_i^0 = \rho_i^0/\rho_{10}^0, \quad \Theta_i = T_i/T_0,$$

$$\tau = ta_*, \quad C_2 = c_{v2}T_0/a_*^2, \quad \bar{v}_1 = 16v_1/a_*, \quad \bar{\sigma} = 4\sigma/p_0,$$

$$\beta_* = 6 \text{Nu} \lambda_2/\rho_{20}^0 c_{v2} \delta_0^3 a_*,$$

$$W = w/a_* (p_0 = p_{10}(0), a_*^2 = p_0/\rho_{10}^0, T_0 = T_{10} = T_{20}).$$

Следуя идее [10], преобразуем систему исходных дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (1.7) к виду, удобному для интегрирования. Вместо координат Эйлера  $(x, t)$  используем координаты Лагранжа  $(r, t)$ , так как они более удобны для решения задач рассматриваемого класса в рамках построенной односкоростной модели. В переменных (2.1) замкнутая преобразованная система уравнений для описания нестационарных волн в жидкости с пузырьками в координатах Лагранжа имеет вид

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial r} = -6\Phi_0^2 \frac{\alpha_2}{\Phi \delta^2 (1 - \varphi_1)} [(1 - 4\varphi_1 + 3\varphi_2) W^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{v}_1 W/\delta + 2(P_2 - P - \bar{\sigma}/\delta)/\alpha_1, \quad \frac{dV}{dr} = 6\Phi_0 \frac{\alpha_2 W}{\Phi \delta}, \\
& \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -6 \frac{\alpha_2 W \Phi}{\delta}, \quad \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = 6(1 - \gamma) \frac{W \Theta_2}{\delta} + \beta_* \delta (1 - \Theta_2), \\
& \partial W/\partial \tau = [2(P_2 - P - \bar{\sigma}/\delta)/\alpha_1 - 3(1 - \varphi_2)W^2 - \bar{v}_1 W/\delta]/\delta(1 - \varphi_1), \\
& \partial \delta/\partial \tau = 2W, \\
& P_2 = C_2(\gamma - 1)\Phi_2^0 \Theta_2, \quad \alpha_2 = (1 - \Phi)/(1 - \Phi_2^0), \quad \Phi_2^0 = \Phi_{20}^0 \delta_0^3/\delta^3, \\
& \alpha_1 = 1 - \alpha_2, \\
& \varphi_1 = 3(\alpha_2^{1/3} - \alpha_2)/2\alpha_1, \quad \varphi_2 = [\alpha_2^{1/3}(2 + \alpha_2) - 3\alpha_2]/\alpha_1.
\end{aligned}$$

Она состоит из 6 дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит лишь одну производную по одной из координат ( $r$  или  $\tau$ ). Первые два уравнения системы служат для определения приведенного давления и скорости смеси в произвольный момент времени по известным полям остальных параметров; остальные уравнения описывают законы изменения параметров лагранжевых частиц среды во времени.

Для численного интегрирования системы (2.2) разобьем выделенный объем среды точками  $r_1, r_2, \dots, r_n$  на  $n$  материальных частиц: значения всех искомых функций будем определять в точках  $r = r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда четыре последних дифференциальных уравнения в частных производных по времени от переменных  $\Phi, \Theta_2, W, \delta$  перейдут в  $4n$  обыкновенных дифференциальных уравнения, для численного интегрирования которых удобно использовать модифицированный метод Эйлера — Коши [15]. Для определения значений давления  $P$  в точках  $r = r_i$  на каждый фиксированный момент времени необходимо решать краевую задачу для первого дифференциального уравнения (2.2) при следующих условиях на границах выделенного объема смеси ( $r = 0, r = l$ ):

$$\begin{aligned}
r = 0 \quad P(0, \tau) &= P_0(\tau) \quad \text{или} \quad \partial P/\partial r(0, \tau) = \chi_0(\tau), \\
r = l \quad P(l, \tau) &= P_l(\tau) \quad \text{или} \quad \partial P/\partial r(l, \tau) = \chi_l(\tau).
\end{aligned}$$

Для решения этой задачи целесообразно применять метод прогонки [16]. Отметим, что скорость среды входит только во второе уравнение (2.2), поэтому вычислять ее на каждом шаге интегрирования по времени необязательно.

3. Численно моделировались нестационарные волновые процессы в 50%-ном растворе глицерина в воде, содержащем пузырьки газа (воздуха или гелия). Исследовались основные закономерности эволюции структур нестационарных ударных волн, при этом использовались значения термодинамических параметров фаз ( $p_0 \cong 1$  бар,  $T_0 = 300\text{K}$ )

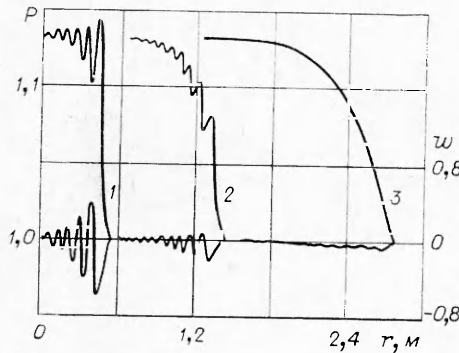
$$\begin{aligned}
(3.1) \quad \text{жидкость:} \quad \rho_{10}^0 &= 1126 \text{ кг/м}^3, \quad v_1 = 0,75 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, \\
\text{воздух:} \quad \gamma &= 1,4, \quad \rho_{20}^0 = 1,21 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda_2 = 0,025 \text{ кгм}/(\text{с}^3 \cdot \text{град}), \\
& \quad c_{v2} = 716 \text{ м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{град}), \\
\text{гелий:} \quad \gamma &= 1,66, \quad \rho_{20}^0 = 0,16 \text{ кг/м}^3, \quad \lambda_2 = 0,151 \text{ кгм}/(\text{с}^3 \cdot \text{град}), \\
& \quad c_{v2} = 3128 \text{ м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{град}).
\end{aligned}$$

Установлено, что особенности эволюции ударной волны в пузырьковой среде сильно зависят от эффектов тепловой диссипации. При проведении конкретных расчетов необходим последовательный учет влияния

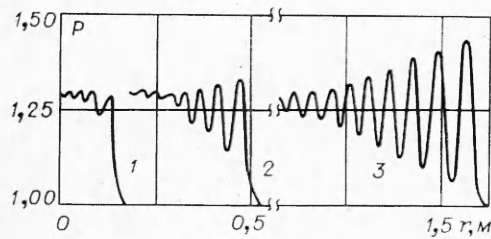
параметров смеси, теплофизических свойств газа в пузырьках и интенсивности волн на параметр внутреннего теплообмена  $Nu$ . Осуществить этот учет можно в рамках рекомендаций стационарного анализа [8]. В соответствии с ними параметр  $Nu$  и коэффициент межфазного теплообмена  $\beta$  в условиях пульсационного движения пузырьков определяются соотношениями

$$(3.2) \quad Nu = \delta / (h_2 t_*)^{1/2}, \quad \beta = \lambda_2 / (h_2 t_*)^{1/2}, \quad h_2 = \lambda_2 / c_{V2} \rho_2^0, \\ \pi \delta_0 / a_* (3(\gamma p_e / p_0 - 1))^{1/2} \leq t_* \leq \pi \delta_0 / a_* (3(p_e / p_0 - 1))^{1/2},$$

где  $t_*$  — характерное время пульсаций пузырьков. Именно эти соотношения использовались при определении  $Nu$  в выполненных численных экспериментах.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Рис. 1. Профили давления и радиальной скорости пузырьков на различные моменты времени в ударной волне интенсивности  $p_e/p_0 = 1,13$ , распространяющейся по смеси с параметрами:  $p_0 = 1,045$  бар,  $\alpha_{20} = 1,7\%$ ,  $\delta_0 = 2,5$  мм, кривая 1 —  $t = 5$ , 2 — 15, 3 — 30 мс. Видно, что стационарная конфигурация этой волны монотонна и формируется на расстоянии около трех метров за время порядка 30 мс.

Рис. 2. Эволюция структуры ударной волны при  $p_e/p_0 = 1,13$  в смеси с параметрами:  $p_0 = 1,045$  бар,  $\alpha_{20} = 1,7\%$ ,  $\delta_0 = 2,5$  мм, кривая 1 —  $t = 5$ , 2 — 15, 3 — 30 мс. Видно, что стационарная конфигурация этой волны монотонна и формируется на расстоянии около трех метров за время порядка 30 мс.

Проводились расчеты с целью изучения влияния начального давления смеси  $p_0$  на процесс эволюции структур ударных волн. Рассматривалось движение ударных волн одной и той же безразмерной интенсивности  $p_e/p_0$  в одинаковых смесях, когда давление  $p_0$  варьировалось в диапазоне 0,1—10 бар. Установлено, что увеличение  $p_0$  приводит не только к увеличению скорости волны (скорость волны изменяется пропорционально  $p_0^{1/2}$  [8]), но и к увеличению амплитуд и длин осцилляций во фронте. Последнее связано с тем, что интенсивность тепловой диссипации в процессе теплообмена между фазами с увеличением давления уменьшается

\* Распространение очень сильных ( $p_e/p_0 \sim 10^2-10^3$ ) ударных волн можно изучать в рамках моделей сред с объемной вязкостью [17].

в силу того, что характерный безразмерный параметр теплообмена  $\beta^*$  (см. (2.1)) пропорционален  $p_0^{-5/4} (\rho_{20}^0 \sim \sim p_0, a_* \sim p_0^{1/2}, t_* \sim p_0^{-1/2}, Nu \sim p_0^{3/4}$  (см. (3.2)), поэтому  $\beta_* \sim p_0^{-3/4}$ .

Результаты расчетов проиллюстрированы на фиг. 2, где представлены профили давления в нестационарных ударных волнах интенсивности  $p_e/p_0 = 1,3$ , формирующиеся через 6 мс после их инициирования поршнем,двигающимся с постоянной скоростью в смесь с  $\alpha_{20} = 2,5\%$ ,  $\delta_0 = 3$  мм. Кривая 1 —  $p_0 = 0,1$ , 2 — 1, 3 — 10 бар.

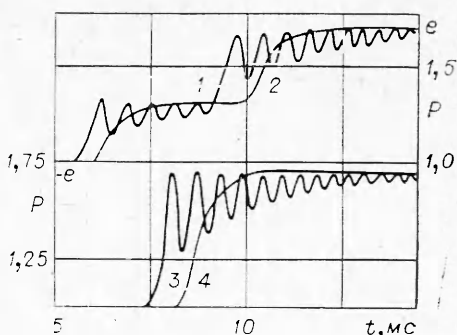
Анализировались особенности отражения нестационарных ударных волн от жестких стенок. В качестве примера решена задача о движении волны, инициированной на границе выделенного объема смеси с давлением  $p_0 = 1$  бар путем мгновенного повышения давления на границе до  $p_e = 1,3$  бар. Рассчитан процесс отражения волны от стенки, расположенной на расстоянии 1 м от места инициирования. Результаты расчетов для смесей с  $\alpha_{20} = 1\%$ ,  $\delta_0 = 3$  мм и  $\delta_0 = 1$  мм представлены на фиг. 3 в виде осциллограмм давления, «записанных» на расстоянии 0,25 м от стенки (кривые 1, 2) и на самой стенке (кривые 3, 4). Кривые 1, 3 —  $\delta_0 = 3$  мм, 2, 4 — 1 мм, буквой  $e$  на оси ординат отмечено равновесное значение давления за отраженной волной. Видно, что с уменьшением диаметра пузырьков длины релаксационных зон уменьшаются. При размере пузырьков 1 мм волны имеют практически монотонные структуры.

Известно, что отражение ударных волн малой интенсивности (когда сжимаемостью жидкой составляющей смеси можно пренебречь) происходит по закону

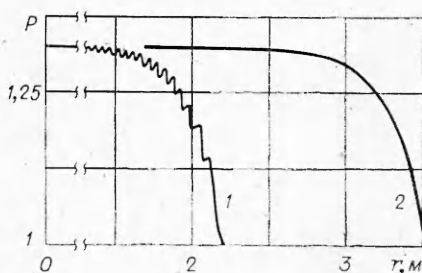
$$p_{2e}/p_0 = (p_e/p_0)^2,$$

где  $p_e$  и  $p_{2e}$  — равновесные значения давлений за падающей и отраженной волнами соответственно. Однако в опытах на ударных трубах упомянутое выше  $p_{2e}$  не всегда может быть зарегистрировано в силу специфики самого эксперимента. Если длина релаксационной зоны падающей волны велика, то волна разрежения из камеры высокого давления ударной трубы может достичь противоположной стенки еще до момента установления равновесного давления. При этом максимальное зарегистрированное давление на стенке  $p_*$  будет меньше, чем его ожидаемое равновесное значение.

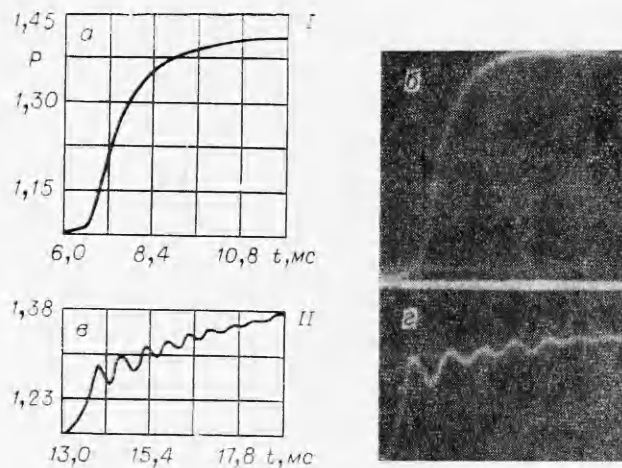
Таким образом, регистрируемое в опытах  $p_*$  может зависеть от целого ряда факторов: начального размера пузырьков, теплофизических свойств газовой фазы, интенсивности волны, наличия или отсутствия эффектов дробления пузырьков и т. д. При прочих равных условиях на величину  $p_*$  может влиять и длина камеры высокого давления ударной трубы. При достаточной интенсивности падающей волны пузырьки дробятся



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

и протяженность релаксационной зоны (размытость профиля) волны резко сокращается. В этом случае равновесные максимальные давления за отраженными волнами, как правило, успевают устанавливаться до прихода волн разрежения. В случае отсутствия дробления пузырьков в волне ситуация резко меняется, так как размытость фронта падающей волны сильно возрастает.

Были проведены расчеты применительно к экспериментальным данным [4, 5, 9]. Исследовалась эволюция волн интенсивностью  $p_e/p_0 > 1 + 2\alpha_{20}$ . Анализ [9], выполненный без учета эффектов тепловой диссипации в радиальном движении пузырьков, показал, что стационарные волны такой интенсивности должны иметь осцилляционную структуру. Волны с интенсивностью  $p_e/p_0 > 1 + 2\alpha_{20}$ , наблюдавшиеся в экспериментах, действительно были осцилляционными. В связи с этим в [8] высказано предположение, что эти волны являлись осцилляционными лишь в силу своей нестационарности (из-за недостаточной длины ударной трубы наблюдать в условиях опытов [4] стационарные волновые конфигурации было невозможно). Результаты расчетов процесса эволюции нестационарных волн подтвердили это предположение. На фиг. 4 дан пример расчета эволюции профиля давления в волне  $p_e/p_0 = 1,32$ , выполненного применительно к условиям экспериментов [4]:  $p_0 = 0,902$  бар,  $\alpha_{20} = 2,5\%$ ,  $\delta_0 = 2,8$  мм. Видно, что монотонная структура волны реализуется на расстоянии более 3 м (датчики в опытах [4] располагались на расстояниях менее 1,6 м от места инициирования волн и регистрировали поэтому лишь нестационарные волновые конфигурации). Анализ совокупности экспериментальных данных [4, 6, 9] показывает, что большинство полученных результатов относится к нестационарным волнам, поэтому их корректная обработка может быть выполнена лишь с привлечением нестационарной теории.

Исследовалось влияние теплофизических свойств газа пузырьков на процесс эволюции структур ударных волн. Установлено, что теплофизические свойства газа могут сильно влиять на величину характерного времени тепловой релаксации, а в связи с этим и на развитие эволюционного процесса в целом. Проследим за этим влиянием на примере двух газов, воздуха и гелия, имеющих существенно различные теплофизические свойства (см. (3.1)). В соответствии с (3.1), (3.2) безразмерные коэффициен-

ты теплообмена воздуха  $\beta_{*в}$  и гелия  $\beta_{*г}$  с жидкостью в условиях пульсационного движения пузырьков связанны соотношением

$$\beta_{*г} \cong 3,5\beta_{*в}.$$

Именно поэтому в смесях с гелиевыми пузырьками интенсивность тепловой диссипации должна быть больше, чем в смеси с воздушными: при прочих равных условиях соответственно больше и скорость формирования монотонных волновых конфигураций. Результаты расчетов и их сопоставление с экспериментальными данными подтверждают этот вывод. В качестве примера на фиг. 5 представлены (в одинаковом масштабе) расчетные и экспериментальные \* осциллограммы давления в ударных волнах I (а, б) и II (в, г): I (запись на глубине 0,82 м от поверхности смеси, газ — гелий) —  $p_e/p_* = 1,3$ ,  $p_* = 1,09$  бар,  $\alpha_{2*} = 1\%$ ,  $\delta_* = 1,5$  мм; II (запись на глубине 1,59 м от поверхности смеси, газ — воздух) —  $p_e/p_* = 1,18$ ,  $p_* = 1,09$  бар,  $\alpha_{2*} = 1\%$ ,  $\delta_* = 1,9$  мм. Здесь звездочкой отмечены значения параметров на глубине 0,82 м. Видно, что ударная волна в смеси с гелиевыми пузырьками уже на глубине 0,82 м имеет монотонную структуру, в то время как более слабая волна в практически аналогичной смеси с воздушными пузырьками на значительно большей глубине 1,59 м еще имеет ярко выраженную осцилляционную структуру. Расчетные осциллограммы удовлетворительно согласуются с экспериментальными.

Выполненные расчеты и их сопоставление с экспериментальными данными показывают, что построенная модель динамического поведения смеси может с успехом быть использована для адекватного описания нестационарных волновых процессов в жидкостях с пузырьками газа.

Поступила 22 II 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости.— Сб. пер. Механика, 1968, № 3 (109).
2. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1968, № 4.
3. Crespo A. Sound and shock waves in liquids containing bubbles.—«Phys. Fluids», 1969, vol. 12, N 11.
4. Noordzij L. Shock waves in bubble-liquid mixtures.—«Physical Comm.», 1971, vol. 3, N 1.
5. Кутателадзе С. С., Бурдуков А. П., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусев Б. Г., Шрейбер И. Р. О структуре слабой ударной волны в газожидкостной среде.—«Докл. АН СССР», 1972, т. 207, № 2.
6. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко Б. С., Когарко С. М. Исследование волн сжатия в смеси жидкости с пузырьками газа.—«Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 5.
7. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Динамика ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1974, № 5.
8. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости с пузырьками газа.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 6.
9. Noordzij L., Van Wijngaarden L. Relaxation effects caused by relative motion, on shock waves in gasbubble/liquid mixtures.—«J. Fluid Mech.», 1974, vol. 66, p. 1.
10. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И. Нестационарные волны в жидкости с пузырьками газа.—«Докл. АН СССР», 1976, т. 226, № 6.
11. Нигматулин Р. И., Ивандаев А. И., Губайдуллин А. А. Численное моделирование волновых процессов в двухфазных дисперсных средах.— В кн.: Труды III Всесоюзного семинара по методам механики сплошной среды. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1976.

\* Эксперименты В. Е. Накорякова и сотрудников Института теплофизики СО АН СССР.



12. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М., Симаков С. М., Тимофеев Е. П. Разрушение воздушных пузырьков в жидкости ударной волной.—«Докл. АН СССР», 1975, т. 220, № 4.
13. Иорданский С. С. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа.— ПМТФ, 1960, № 3.
14. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости.—«Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 6.
15. Демидович Б. П. и др. Численные методы анализа. М., «Наука», 1967.
16. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
17. Ляхов Г. М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1977.

УДК 532.52.01

### ДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ НА ПОЛОСТЬ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

*Н. А. Григорьев, Г. С. Доронин, В. Л. Обинокий*

(Москва)

В работе [1] рассмотрен случай схлопывания полости под действием постоянного внешнего давления  $p_0$ . Однако имеется класс задач, в которых внешнее воздействие представляет собой кратковременные импульсы давления. Такая ситуация имеет место, например, при ударном нагружении пористых тел.

Пусть в вязкой несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho$  имеется пустая сферическая полость радиуса  $r_0$ . Давление на бесконечности (вдали от полости)  $p_\infty(t, \tau)$  является произвольной функцией времени при  $0 \leq t \leq \tau$  и обращается в нуль при  $t > \tau$ .

Движение сферически-симметрично, описывающие его уравнения Навье — Стокса имеют вид

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{u}{r} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

где  $u(r, t)$  — скорость;  $p(r, t)$  — давление.

На поверхности полости нормальное напряжение  $\sigma_{rr}$  отсутствует (полость пустая), а так как  $\sigma_{rr} = -p + 2\eta du/dr$ , то  $p_1 = 2\eta(du/dr)_1$ . Здесь и в дальнейшем индексом 1 отмечены значения величин на границе;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости.

Вторым граничным условием будет

$$p = p_\infty(t, \tau) \text{ при } r = \infty.$$

Из первого уравнения (1) получаем  $u(r, t) = u_1 r_1^2 / r^2$ .

Подставляя это выражение для  $u$  во второе уравнение (1) и интегрируя от  $r_1$  до  $\infty$  с учетом граничных условий для  $p$ , получим

$$(2) \quad \frac{du_1}{dr_1} + \frac{3}{2} \frac{u_1}{r_1} + \frac{p_\infty}{\rho u_1 r_1} + \frac{4\nu}{r_1^2} = 0.$$

Рассмотрим движение полости при  $t > \tau$ , когда  $p_\infty = 0$ . В качестве начальных данных для радиуса полости и скорости движения ее поверх-