

ПРИБЛИЖЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ИЗЛУЧАЮЩИМ ГАЗОМ ПЛАСТИНКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

А. Т. Онуфриев

(Новосибирск)

При течении газа большой температуры в камерах сгорания двигателей [1] или паро-газовых установок и в связи с другими задачами внешней и внутренней аэродинамики при высоких температурах газа необходимо учитывать теплопередачу излучением.

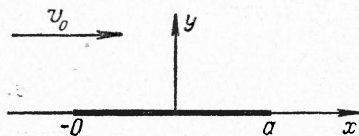
В работе [2] была рассмотрена, в частности, задача о натекании излучающего газа на решетку, воспринимающую тепловой поток. Оказалось, что значение потока тепла определяется только величиной параметра

$$A = \frac{3\kappa\rho_0 U_0}{16(\kappa - 1)\sigma T_0^4} \quad (0.1)$$

а распределение температуры зависит от оптической толщины. Представляет интерес выяснение влияния отношения длины пробега излучения к размерам тела на распределение температуры по границе тела и на величину потоков тепла. Рассмотрение обтекания полубесконечной пластинки [3] при некоторых частных значениях параметра A ($A \gg 1$) показало, что отношение длины пробега излучения к расстоянию от начала пластинки существенно влияет на величину потока тепла на рассматриваемом расстоянии; с увеличением длины пробега поток тепла растет и стремится к σT_0^4 .

Ниже делается попытка установить на примере пластинки влияние отношения длины пробега излучения к размерам тела на величину потока тепла, приходящего к телу из потока газа большой температуры, обтекающего тело.

1. Рассмотрим обтекание пластинки конечной длины. Сделаем следующие допущения: длину пробега излучения считаем постоянной во всем



Фиг. 1

поле течения; удельную теплоемкость примем пропорциональной кубу температуры (это делает задачу линейной); примем ниже, что линии тока сохраняют свою форму в невозмущенном состоянии, т. е. будут параллельны пластинке и направлению скорости потока (фиг. 1). Скорости потока ограничим соотношением

$$\frac{1}{2}(\kappa - 1) M^2 \ll 1.$$

Даже если учитывать только процессы поглощения и испускания энергии веществом, предполагая существование локального термодинамического равновесия (излучение описывается функцией Планка для температуры, которую имеет вещество), уравнение переноса весьма сложно. Прежде чем решать его численно, желательно получить приближенное решение более простым путем, которое давало бы качественные оценки для изучаемых явлений. Упрощением будет диффузионное приближение, которое получается как первый член разложения в методе сферических гармоник [4]. Однако при помощи этого приближения нельзя получить «точное» решение даже в случае $l/a \rightarrow 0$ из-за приближенного удовлетворения граничному условию. Здесь a — размер тела; l — длина пробега излучения, усредненная по частотам. В случае же, когда $l/a \rightarrow \infty$, поток тепла получается сильно завышенным (в два раза).

При предположениях имеем систему в безразмерном виде

$$\frac{1}{3} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \Delta \Phi = \Phi - T^4, \quad A \frac{\partial}{\partial x} T^4 = \frac{l}{a} \Delta \Phi \quad \left(\Phi = \frac{\sigma T^4}{4\sigma T_0^4} \right) \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$T = 1, \quad \Phi = 1 \quad \text{при } x = -\infty, \quad T = 1, \quad \Phi = 1 \quad \text{при } y = \infty \quad (1.2)$$

$$\lambda \frac{l}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi \quad \text{при } y = 0, |x| < 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| > 1 \quad (1.3)$$

Здесь u — плотность энергии излучения. Можно исключить величину T^4 и получить уравнение для φ , принадлежащее к составному типу

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{3} \left(\frac{l}{a} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi + \frac{l}{a} \frac{1}{A} \Delta \varphi \quad (1.4)$$

Чтобы избежать ошибки из-за приближенного удовлетворения граничному условию в диффузионном приближении, в граничное условие (1.3) вводится коэффициент $\lambda = \lambda(a/l)$, который должен быть определен из точного решения какой-либо простой задачи с заданной геометрией [4].

Приводим значения λ для случая пластинки (центр), помещенной в неподвижную среду, имеющую температуру 1.

$a/l = 0$	0.15	0.30	0.60	1.0	2.0	3.0	∞
$\lambda = 1.333$	1.10	0.99	0.87	0.81	0.76	0.76	0.76

2. Решение системы уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3), (1.4) будет содержать неточность, о которой говорилось выше. Поэтому имеет смысл пойти на еще большее упрощение задачи и описывать процесс передачи энергии излучением в приближении теплопроводности, которое получается из диффузионного приближения при $l/a \rightarrow 0$. Решение некоторых задач в приближении теплопроводности [3] показывает, что отличие в значениях температуры, в обоих приближениях, невелико.

Получив распределение температуры, можно уже при помощи уравнений диффузионного приближения получить величину потоков тепла.

Из первого уравнения системы (1.1) следует, что плотность излучения при $l/a \rightarrow 0$ стремится к равновесной и второе уравнение имеет вид

$$A \frac{\partial}{\partial x} T^4 = \frac{l}{\alpha} \Delta T^4$$

Граничные условия

$$\frac{\partial T^4}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| > 1, \quad \lambda \frac{l}{a} \frac{\partial T^4}{\partial y} = T^4 \quad \text{при } y = 0, |x| < 1$$

Произведем замену зависимой переменной [5]

$$Z(x, y) = e^{-Bx} (1 - T^4), \quad B = \frac{a}{l} \frac{A}{2}$$

Получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - B^2 Z = 0 \quad (2.1)$$

и граничные условия

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| > 1, \quad \lambda \frac{l}{a} \frac{\partial Z}{\partial y} = Z - e^{-Bx} \quad \text{при } y = 0, |x| < 1$$

Фундаментальным решением уравнения (2.1), ограниченным при $r \rightarrow \infty$, будет функция Бесселя $K_0(Br)$; формула Грина для (2.1)

$$Z(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int \left[Z \frac{\partial}{\partial y} K_0(Br) - K_0(Br) \frac{\partial Z}{\partial y} \right] d\sigma$$

которая в силу граничного условия запишется в виде

$$2\pi Z = - \int_{-1}^1 \frac{a}{l\lambda} K_0(Br) (Z - e^{-B\zeta}) d\zeta + By_0 \int_{-\infty}^{\infty} Z \frac{K_1(Br)}{r} d\zeta$$

Переходя вновь к переменной T^4 , получаем

$$T^4(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{a}{l} \int_{-1}^1 T^4(\zeta, 0) e^{-B(\zeta-x_0)} K_0(Br) d\zeta - \\ - \frac{By_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - T^4(\zeta, 0)] e^{-B(\zeta-x_0)} \frac{K_1(Br)}{r} d\zeta \quad (2.2)$$

Если $y_0 = 0$, то формула (2.2) переходит в выражение

$$T^4(x_0, 0) = 1 - \frac{a}{\pi \lambda l} \int_{-1}^1 T^4(\zeta, 0) e^{-B(\zeta - x_0)} K_0(B_0 |\zeta - x_0|) d\zeta \quad (2.3)$$

Таким образом, распределение температуры находится в результате решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.3).

3. Исследуем поведение решения уравнения (2.3) при $a/l \rightarrow 0$. При этом $B = (a/l) (A/2) \rightarrow 0$. При величине длины пробега излучения значительно большей длины пластинки можно получить решение в конечном виде. Рассмотрим интервал $-1 < x < 1$

$$1 - T^4(x) \approx \frac{a}{\pi \lambda l} \int_{-1}^1 e^{-B(\zeta - x)} K_0(B |\zeta - x|) d\zeta \quad (3.1)$$

При $B \rightarrow 0$ можно заменить функцию Бесселя на ее приближенное выражение вблизи нуля

$$K_0(t) \approx -[\ln(t/2) + C]$$

где $C = 0.5772$ — постоянная Эйлера, а экспоненту — на единицу. После интегрирования получаем выражение

$$T^4(x, 0) = 1 - \frac{4B}{\pi \lambda A} \{1.12 - 0.5 [(1+x) \ln B(1+x) + (1-x) \ln B(1-x)]\} \quad (3.2)$$

из которого следует, что при $a/l \rightarrow 0$ температура газа около пластинки сохраняет свое значение в невозмущенном набегающем потоке.

Теперь рассмотрим поведение решения при B конечном и при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

Так как интегрирование в выражении (2.3) ведется в интервале от -1 до 1 , то вне этого интервала вдали от пластинки можно заменить $K_0(B |\zeta - x|)$ на асимптотическое выражение

$$2 (\pi B |\zeta - x|)^{-0.5} e^{-B |\zeta - x|}$$

При $x \rightarrow -\infty$ эта замена дает

$$T^4(x, 0) = 1 - \frac{a}{\pi \lambda l} [\pi B (-x)]^{-0.5} e^{2Bx} \int_{-1}^1 T^4(\zeta, 0) e^{-2B\zeta} d\zeta \quad (3.3)$$

Значение функции быстро стремится к единице из-за экспоненты во втором слагаемом. При $x \rightarrow \infty$ получаем

$$T^4(x, 0) = 1 - \frac{a}{\pi \lambda l} (\pi B x)^{-0.5} \int_{-1}^1 T^4(\zeta, 0) d\zeta \quad (3.4)$$

Функция стремится к единице, но теперь уже медленнее. Решение не-симметрично относительно пластинки.

Рассмотрим поведение решения на передней кромке $x = -1$. При $a/l \rightarrow \infty$, когда длина пробега излучения мала по сравнению с длиной пластинки

$$\begin{aligned} T^4(-1, 0) = 1 - \frac{a}{\pi \lambda l} & \left(\int_{-1}^{-1+\varepsilon} T^4(\zeta, 0) e^{-B(\zeta+1)} K_0(B |\zeta+1|) d\zeta + \right. \\ & \left. + \int_{-1+\varepsilon}^1 T^4(\zeta, 0) e^{-B(\zeta+1)} K_0(B |\zeta+1|) d\zeta \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь ε — малое конечное число. При $a/l \rightarrow \infty$ величина B тоже стремится к бесконечному значению, и второй интеграл равен нулю.

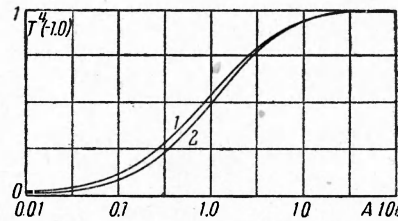
В первом же интеграле величину $T^4(\zeta, 0)$ можно принять равной $T^4(-1, 0)$ и вынести из-под знака интеграла; после замены $B(1 + \zeta) = t$ получим

$$\begin{aligned} T^4(-1, 0) \int_{-1}^{-1+\varepsilon} e^{-B(1+\zeta)} K_0(B|1+\zeta|) d\zeta = \\ = \frac{T^4(-1, 0)}{B} \int_0^{B\varepsilon} e^{-t} K_0(|t|) dt \rightarrow \frac{T^4(-1, 0)}{B} \int_0^{\infty} e^{-t} K_0(|t|) dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

Значение последнего интеграла равно единице [6]. Таким образом

$$\lim_{a/l \rightarrow \infty} T^4(-1, 0) = \left[1 + \frac{2}{\pi\lambda A}\right]^{-1} \quad (3.7)$$

значение температуры в передней точке при бесконечно малом пробеге излучения зависит только от параметра A , характеризующего отношение энергии излучения и внутренней энергии потока газа, как и в упомянутой задаче И. В. Немчинова [2]. На фиг. 2 приведено сравнение значений температуры в зависимости от параметра A при $a/l \rightarrow \infty$



Фиг. 2

для указанных двух решений (где 1 — пластинка, 2 — решетка).

4. В общем случае изменения параметров A и a/l уравнение (2.3) или уравнение (2.2) надо решать численно. Численные расчеты подтверждают справедливость указанных выше оценок для предельных случаев.

Ядро уравнения имеет особенность при $\zeta = x$, поэтому запишем его в виде, более удобном для численного счета [7]

$$\begin{aligned} T^4(x, 0) \left[1 + (\pi\lambda)^{-1} \frac{a}{l} \chi_x\right] = \\ = 1 + \frac{1}{\pi\lambda} \frac{a}{l} \int_{-1}^1 [T^4(x, 0) - T^4(\zeta, 0)] e^{-B(\zeta-x)} K_0(B|\zeta-x|) d\zeta \end{aligned}$$

Интеграл

$$\chi_x = \int_{-1}^1 e^{-B(\zeta-x)} K_0(B|\zeta-x|) d\zeta$$

легко вычисляется (значения этого интеграла даны в таблице), а интеграл, стоящий справа, заменяется на сумму с использованием интерполяционной формулы трапеций

$$\begin{aligned} T^4(x_n) \left[1 + (\pi\lambda)^{-1} \frac{a}{l} \chi_n\right] = \\ = 1 + \frac{1}{\pi\lambda} \frac{a}{l} \sum_{k=1}^N C_k [T^4(x_n) - T^4(x_k)] e^{-B(x_k-x_n)} K_0(B|x_n-x_k|) \\ C_1 = C_N = \frac{2}{2N-2}, \quad C_2 = C_3 = \dots = C_{N-1} = \frac{2}{N-1} \end{aligned}$$

Таблица

x	-1	-0.75	-0.50	-0.25	0	0.25	0.50	0.75	1.0
B	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9
0.0025	12.78	13.53	13.91	14.11	14.18	14.13	13.93	13.57	12.84
0.025	8.031	8.808	9.223	9.468	9.578	9.563	9.412	9.086	8.392
0.25	3.095	3.924	4.429	4.790	5.039	5.177	5.191	5.032	4.493
2.5	0.382	0.8897	1.187	1.423	1.625	1.802	1.955	2.056	1.880
25	0.040	0.2556	0.3580	0.4371	0.5039	0.5628	0.6161	0.6651	0.6543
250	0.004	0.0778	0.1106	0.1358	0.1570	0.1757	0.1926	0.2082	0.2186

Полагая, последовательно $x_n = x_1, x_2, \dots, x_N$, получаем систему уравнений, которая решается методом последовательных приближений. Ниже N принято равным девяти. Контрольные расчеты с увеличением N

показали, что получающаяся разница составляет величину порядка нескольких десятых долей процента.

На фиг. 3 и 4 приведены результаты численного счета для параметров $A^* = 3\pi\lambda [2(1+\pi)]^{-1}A = 0.1, 1, 10$ и для каждого из них в случаях

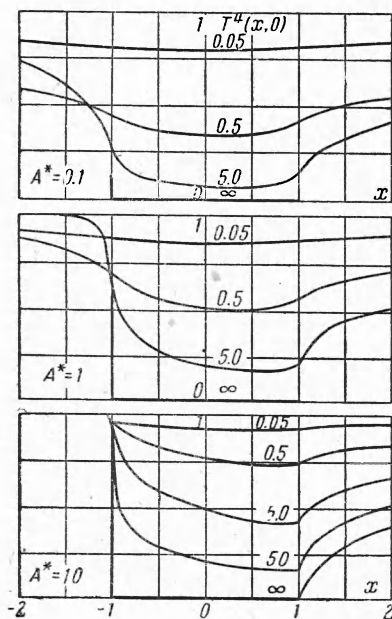
$$2(1+\pi)(3\pi\lambda)^{-1}a/l = 0.05, 0.5, 5.$$

На фиг. 4 показано распределение температуры для случая

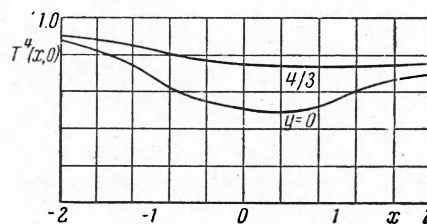
$$3\pi\lambda [2(1+\pi)]^{-1}A = 1$$

$$2(1+\pi)(3\pi\lambda)^{-1}a/l = 0.5$$

в плоскости пластинки и вдали от нее.



Фиг. 3



Фиг. 4

Приближенно можно считать, что поток энергии в точке $x = -1, y = 0$ соответствует температуре в точке $x = -1, y = 4/3$, и аналогично в других точках пластинки.

Результаты приближенного решения задачи об обтекании пластинки конечной длины излучающим газом позволяют сделать вывод о том, что необходимо при определении теплового воздействия со стороны газа учитывать влияние на величину потоков тепла отношения длины пробега излучения к длине пластинки, которое оказывает существенное влияние на распределение температуры газа в потоке, обтекающем пластинку.

Автор благодарен за помощь в проведении расчетов лаборантам В. Сушакову, С. Суховерховой и Н. Михайлович.

Поступила 6 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Logan J. Recent advances in Determination of Radiative Properties of gases at High Temperatures. Jet Propulsion, 1958, vol. 28, No 12, pp. 795—798. (Русск. пер. Логана Д. Г. Последние достижения в изучении излучения газов при высоких температурах. Вопросы ракетной техники, 1959, № 7, стр. 18—24).
2. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 1, стр. 36—57.
3. Онуфриев А. Т. Об охлаждении излучением полубесконечного объема газа. ПМТФ, 1961, № 2, стр. 31—39.
4. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., ГИТТЛ, 1951.
6. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1948.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., ГИТТЛ, 1950.