

УДК 532.593, 517.958, 533.6.011

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СДВИГОВЫХ ПОТОКОВ БАРОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

Б. Н. Елемесова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается математическая модель, описывающая в длинноволновом приближении плоскопараллельные вихревые течения баротропной жидкости со свободной границей. Для частного класса решений доказана разрешимость задачи о распаде начального разрыва малой амплитуды и предложен алгоритм построения решения.

Условия гиперболичности системы уравнений длинных волн, распространяющихся в слое баротропной жидкости, получены в [1]. Математическая модель гидравлического прыжка на сдвиговом течении баротропной жидкости изучена в [2]. В [3, 4] рассмотрены свойства простых волн, соответствующих характеристическим скоростям дискретного спектра. В [5] доказано существование решения задачи о распаде произвольного разрыва для системы уравнений длинных волн, распространяющихся в завихренной несжимаемой жидкости, и предложен алгоритм определения возникающих волновых конфигураций.

1. Постановка задачи. Рассматривается начально-краевая задача

$$u_t + uu_x + vu_y + \rho^{-1} p_x = 0, \quad \rho^{-1} p_y = -g, \quad \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) = 0, \quad u(x, y, 0) = U_0(x, y),$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad \rho = \rho(p), \quad \rho' > 0, \quad 0 \leq y \leq h(x, t), \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

$$y = 0: \quad v(x, 0, t) = 0, \quad y = h(x, t): \quad h_t + u(x, h(x, t), t)h_x = v(x, h(x, t), t),$$

описывающая вихревые течения баротропной жидкости со свободной границей в приближении теории длинных волн. Здесь ρ — плотность; u, v — компоненты вектора скорости; h — уравнение свободной поверхности; p — давление. Интегрирование второго уравнения (1.1), выражающего гидростатичность распределения давления по глубине:

$$p_y = -\rho(p)g \quad (p(x, h(x, t), t) = p_0),$$

и уравнения неразрывности дает соотношения [1]

$$p = f(g(h - y)), \quad \rho = f'(g(h - y)), \quad v = -\rho^{-1} \int_0^y (\rho_t + (u\rho)_x) dy', \quad (1.2)$$

где функция f определяется в результате обращения зависимости $g(h - y) = \int_{p_0}^p \rho(s)^{-1} ds$.

Если известны функции $u, h(x, t)$, то величины v, p, ρ находятся из (1.2).

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта № 43 СО РАН «Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости» при финансовой поддержке Совета ведущих научных школ (код проекта 96-15-96283).

Условия гиперболичности системы (1.1) изучались в [1], где показано, что система уравнений (1.1) имеет дискретный и непрерывный спектры характеристических скоростей. Характеристические направления дискретного спектра $dx/dt = k_i$ определяются уравнением, которое в переменных x, y, t имеет вид

$$F(k_i) = R - g \int_0^{h(x,t)} (u(x,y,t) - k_i)^{-2} f'(g(h(x,t) - y)) dy = 0 \quad (R = \rho(\eta), \quad \eta = f(gh)). \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) при любых x, t имеет только два вещественных корня, таких что $k_1 < \min u$, $k_2 > \max u$. Непрерывный спектр заполняет весь интервал изменения функции u при фиксированных x, t .

В (1.1) от независимых переменных x, y, t перейдем к новым независимым переменным x, p, t . Новыми неизвестными величинами будут $u, \tau = p_t + up_x + vp_y, \psi, \eta$ (функция $p = \eta(x, t)$ задает распределение давления на дне). Неизвестная граница $y = h(x, t)$ в переменных x, p станет известной ($p = p_0$), и граничное условие преобразуется к виду

$$\tau = 0 \quad \text{при} \quad p = p_0. \quad (1.4)$$

Известная граница $y = 0$ в новых переменных станет неизвестной, и при $p = \eta(x, t)$ должно выполняться соотношение

$$\eta_t + u(x, \eta, t)\eta_x = \tau(x, \eta, t). \quad (1.5)$$

Система уравнений (1.1) в новых переменных преобразуется к виду

$$u_t + uu_x + \tau u_p + R(\eta)^{-1}\eta_x = 0, \quad u_x + \tau_p = 0, \quad p_0 \leq p \leq \eta(x, t), \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

Если течение безвихревое, то $u_p \equiv 0$ и система (1.6) сводится к аналогу одномерной газовой динамики [1] (в длинноволновом приближении завихренность ω равна $-u_y$, в переменных (x, p) — $\rho g u_p$).

Дифференцированием первого уравнения (1.6) по p с учетом второго получаем следствие системы

$$(u_p)_t + u(u_p)_x + \tau(u_p)_p = 0,$$

откуда вытекает, что (1.6) допускает частный класс решений с постоянной или кусочно-постоянной величиной u_p . Рассмотрим течение с постоянной величиной $u_p = \Omega = \text{const}$. В результате интегрирования этого соотношения по p от p_0 до η имеем $\eta = p_0 + (u_2 - u_1)/\Omega$, где $u_1 = u(x, p_0, t)$, $u_2 = u(x, \eta, t)$. Горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости соответственно равны $u = \Omega(p - p_0) + u_1$, $\tau = -u_{1x}(p - p_0)$. Для функций u_1, u_2 из (1.6) получаем систему уравнений

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} + (u_2 - u_1)_x (R\Omega)^{-1} = 0, \quad u_{2t} + u_2 u_{2x} + (u_2 - u_1)_x (R\Omega)^{-1} = 0. \quad (1.7)$$

Характеристическое уравнение системы (1.7) имеет два корня

$$k_{1,2} = (u_2 + u_1 \mp \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + 4(u_2 - u_1)R^{-1}\Omega^{-1}})/2, \quad (1.8)$$

а соотношения на характеристиках преобразуются к инвариантам Римана

$$r_{it} + k_i r_{ix} = 0, \quad r_{1,2} = u_1 - \int_0^{(u_2 - u_1)/\Omega} \frac{2}{R(s + p_0)(\Omega s \pm \sqrt{\Omega^2 s^2 + 4s/(R(s + p_0))})} ds. \quad (1.9)$$

Рассмотрим двухслойное течение, в котором слой $p_0 \leq p \leq \eta$ разделен контактной поверхностью $p = \delta$ на два подслоя, в каждом из которых величина u_p постоянна:

$$u_p = \begin{cases} \Omega_0, & p_0 \leq p \leq \delta(x, t), \\ \Omega, & \delta(x, t) \leq p \leq \eta(x, t). \end{cases}$$

На границе раздела $p = \delta$ вектор скорости (u, τ) считается непрерывным. Горизонтальная составляющая скорости имеет вид $u = \Omega_0(p - p_0) + u_1(x, t)$ при $p_0 \leq p \leq \delta(x, t)$ и $u = u_2(x, t) - \Omega(\eta - p)$ при $\delta \leq p \leq \eta$. Обозначим через $u_0 = \Omega_0(\delta - p_0) + u_1 = u_2 - \Omega(\eta - \delta)$ горизонтальную компоненту вектора скорости на границе раздела $p = \delta(x, t)$. Толщины нижнего и верхнего слоев связаны с u_0, u_1, u_2 соотношениями

$$\delta - p_0 = (u_0 - u_1)/\Omega_0, \quad \eta - \delta = (u_2 - u_0)/\Omega. \quad (1.10)$$

Из системы (1.6) следует, что вектор $U = (u_2, u_1, u_0)^\perp$ (индекс « \perp » обозначает транспонирование) должен удовлетворять уравнениям

$$U_t + AU_x = 0, \quad A = \begin{pmatrix} u_2 + (R\Omega)^{-1} & -(R\Omega_0)^{-1} & R^{-1}(1/\Omega_0 - 1/\Omega)^{-1} \\ (R\Omega)^{-1} & u_1 - (R\Omega_0)^{-1} & R^{-1}(1/\Omega_0 - 1/\Omega)^{-1} \\ (R\Omega)^{-1} & -(R\Omega_0)^{-1} & u_0 + R^{-1}(1/\Omega_0 - 1/\Omega)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Вертикальная компонента вектора скорости в нижнем и верхнем слоях определяется формулами $\tau = -(p - p_0)u_{1x}(x, t)$, $\tau = (\delta - p)(u_{2x} - \Omega\eta_x) - u_{1x}(\delta - p_0)$.

При изучении волновых процессов в двухслойном течении необходимо знать скорости распространения характеристик. Характеристическое уравнение для системы (1.11) можно получить по общему правилу нахождения характеристик или воспользоваться характеристическим уравнением для общего случая (1.3)

$$F(k_i) = R + \frac{1}{\Omega(u_2 - k_i)} - \frac{1}{\Omega_0(u_1 - k_i)} + \frac{1}{u_0 - k_i} \left(\frac{1}{\Omega_0} - \frac{1}{\Omega} \right) = 0. \quad (1.12)$$

Нахождение корней k_i уравнения (1.12) сводится к отысканию корней полинома третьей степени. Известно, что первый корень $k_1 < \min u_i$, а второй $k_2 > \max u_i$. В зависимости от Ω и Ω_0 существует 8 случаев взаимного расположения u_i и третьего корня k_3 :

- 1) $0 < \Omega < \Omega_0, \quad u_1 < k_3 < u_0 < u_2;$
- 2) $\Omega > \Omega_0 > 0, \quad u_1 < u_0 < k_3 < u_2;$
- 3) $0 > \Omega > \Omega_0, \quad u_2 < u_0 < k_3 < u_1;$
- 4) $\Omega < \Omega_0 < 0, \quad u_2 < k_3 < u_0 < u_1;$
- 5) $0 < \Omega, \Omega_0 < 0, \quad u_1 < k_3 < u_2 < u_0;$
- 6) $0 < \Omega, \Omega_0 < 0, \quad u_2 < k_3 < u_1 < u_0;$
- 7) $\Omega < 0, \Omega_0 > 0, \quad u_0 < u_1 < k_3 < u_2;$
- 8) $\Omega < 0, \Omega_0 > 0, \quad u_0 < u_2 < k_3 < u_1.$

Из (1.13) следует, что корень k_3 попадает на интервал изменения скорости либо в верхнем слое, либо в нижнем. Поскольку течения с постоянной величиной u_p являются частным классом решений системы (1.6), которая имеет непрерывный спектр характеристических скоростей, заполняющий весь интервал изменения скорости u при фиксированных x, t , то корень k_3 является неизолированным собственным значением.

Проверим условие сильной нелинейности для семейств характеристик $dx/dt = k_i$ ($i = 1, 2, 3$). Напомним, что семейство характеристик называется сильнонелинейным, если выполнено условие $\nabla k_i \cdot l_{ri} \neq 0$, где l_{ri} — правый собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению k_i ; $\nabla = (\partial/\partial u_2, \partial/\partial u_1, \partial/\partial u_0)$. Легко проверить, что $l_{ri} = ((u_2 - k_i)^{-1}, (u_1 - k_i)^{-1}, (u_0 - k_i)^{-1})$ является правым собственным вектором матрицы A . Используя уравнение (1.12), находим

$$\nabla k_i \cdot l_{ri} = K_i^{-1} L_i, \quad L_i = R'R + \frac{1}{\Omega(u_2 - k_i)^3} - \frac{1}{\Omega_0(u_1 - k_i)^3} + \frac{1}{(u_0 - k_i)^3} \left(\frac{1}{\Omega_0} - \frac{1}{\Omega} \right),$$

$$K_i = \frac{1}{\Omega(u_2 - k_i)^2} - \frac{1}{\Omega_0(u_1 - k_i)^2} + \frac{1}{(u_0 - k_i)^2} \left(\frac{1}{\Omega_0} - \frac{1}{\Omega} \right).$$

Поскольку все корни уравнения (1.12) различны, то величина $K_i = F'_k(k_i) \neq 0$ и от знакоопределенности функции L_i зависит, является ли семейство характеристик $dx/dt = k_i$ сильно-нелинейным или нет. Исследуем знак L_i для каждого семейства характеристик. Если функция $R = R(\eta)$ удовлетворяет условию [2]

$$3R - (\eta - p_0)R' > 0, \quad (1.14)$$

то L_1, L_2 — знакоопределенные функции. Действительно, для корней k_1, k_2 уравнения (1.12) величины $u_i - k_1, u_i - k_2$ либо положительны, либо отрицательны, поэтому $(u_1 - k_i)(u_0 - k_i) > 0, (u_2 - k_i)(u_0 - k_i) > 0$. Кроме того, $(u_0 - u_1)/\Omega_0 > 0, (u_2 - u_0)/\Omega > 0$. Используя неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, получаем

$$L_i \leq RR' - \frac{3(u_2 - u_0)}{\Omega(u_2 - k_i)^2(u_0 - k_i)^2} - \frac{3(u_1 - u_0)}{\Omega_0(u_1 - k_i)^2(u_0 - k_i)^2}, \quad i = 1, 2. \quad (1.15)$$

Из уравнения (1.12) и неравенства Коши — Буняковского следует

$$R \leq \left(\frac{u_2 - u_0}{\Omega} + \frac{u_0 - u_1}{\Omega_0} \right)^{1/2} \left(\frac{u_2 - u_0}{\Omega(u_2 - k_i)^2(u_0 - k_i)^2} + \frac{u_0 - u_1}{\Omega_0(u_1 - k_i)^2(u_0 - k_i)^2} \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Из последнего неравенства, (1.10) и (1.15) получаем

$$L_i \leq RR' - 3R^2(\eta - p_0)^{-1} = R(\eta - p_0)^{-1}((\eta - p_0)R' - 3R) < 0, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим функцию L_3 . Обозначим $\alpha = \Omega_0/\Omega$. Пусть выполнено условие (1.14) и условие [5]

$$1/2 < \alpha < 2. \quad (1.16)$$

Покажем, что тогда семейство характеристик, отвечающее корню k_3 , также удовлетворяет условию сильной нелинейности. Используя (1.14), получаем, что функция L_3 удовлетворяет неравенству $L_3 \leq R^3 \Omega_0^2 (\psi_1 + \psi_2)$, где $\psi_1 = 3(\alpha/z_2 - 1/z_1 + (1 - \alpha)/z_0)^{-1}$, $\psi_2 = \alpha z_2^3 - z_1^3 + (1 - \alpha)z_0^3$, $z_i = (R\Omega_0(u_i - k_3))^{-1}$, $i = 0, 1, 2$. Переменные z_i связаны характеристическим уравнением $\chi = 1 + \alpha z_2 - z_1 + (1 - \alpha)z_0 = 0$. Каждому случаю изменения параметров u_i, k_3 (1.13) соответствует определенная область изменения переменных z_i . Например, случаю 1 соответствует область $z_1 < 0, z_0 > z_2 > 0, \alpha > 1$, а случаю 2 — область $z_2 > 0, z_0 < z_1 < 0, 0 < \alpha < 1$. Функция $\psi = \psi_1 + \psi_2$ исследуется на условный экстремум с условием $\chi = 0$ в каждой из областей изменения переменных z_i , затем рассматривается поведение функции ψ на границах областей. В итоге показано, что ψ является отрицательной функцией только в случаях 1–4 при α , удовлетворяющем условию (1.16). В дальнейшем считаем, что выполнены условия (1.14) и (1.16).

2. Существование волны взаимодействия потоков. Заметим, что система уравнений (1.6) допускает решение вида $u = u(p), \tau = 0, \eta = \eta_0 = \text{const}$, которое в исходных переменных x, y, t описывает стационарный сдвиговой поток: $u = u(y), v = 0, h = h_0 = \text{const}$.

Рассмотрим вспомогательную задачу о взаимодействии двух стационарных сдвиговых потоков, характеризуемых постоянной величиной $u_p = \Omega$. Пусть при $x < x_1(t)$ и $x > x_2(t)$ течение является сдвиговым потоком (рис. 1); для левого потока ($x < x_1(t)$) $\Omega = \omega_1$, для правого ($x > x_2(t)$) $\Omega = \omega_2$. При $x_1(t) \leq x \leq x_2(t)$ к контактной поверхности $p = \delta(x, t)$ слева примыкает область течения с постоянной величиной $u_p = \omega_1$, а справа — область с постоянной величиной $u_p = \omega_2$. Предполагается, что на границах $x = x_1(t), x = x_2(t)$ выполнены условия непрерывного примыкания к сдвиговым потокам, на границе раздела жидкостей $p = \delta(x, t)$ — условие непрерывности скорости (u, τ) и условие $\delta_t + u\delta_x = \tau$.

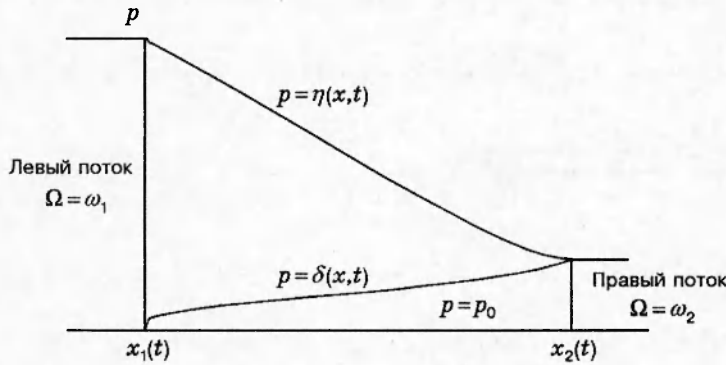


Рис. 1

Покажем, что при определенных ограничениях на скорости в сдвиговых потоках и выполнении неравенств (1.14), (1.16) существует простая волна — волна взаимодействия потоков, удовлетворяющая перечисленным выше условиям.

Поскольку при $x_1(t) \leq x \leq x_2(t)$ u_p — кусочно-постоянная функция, то течение жидкости в этой области описывается системой уравнений (1.11). Из (1.10) вытекает, что при $\delta \rightarrow p_0$ скорость на границе раздела u_0 стремится к скорости u_1 ($p = p_0$), а при $\delta \rightarrow \eta$ $u_0 \rightarrow u_2$ ($p = \eta$). Из характеристического уравнения следует, что $u_0 \rightarrow k_3$ при $u_0 \rightarrow u_1$ ($\delta \rightarrow p_0$) и при $u_0 \rightarrow u_2$ ($\delta \rightarrow \eta$). Следовательно, границы области взаимодействия движутся с характеристической скоростью $k = k_3$, и для описания течения в области $x_1 \leq x \leq x_2$ необходимо использовать простую волну, которая соответствует корню k_3 уравнения (1.12). Из (1.11) получаем уравнения простой волны $u_i = u_i(k(x, t))$, $k = k_3$:

$$(u_1 - k)u'_1 = -\eta' R(\eta)^{-1}, \quad (u_2 - k)u'_2 = -\eta' R(\eta)^{-1}, \quad (u_0 - k)u'_0 = -\eta' R(\eta)^{-1}. \quad (2.1)$$

Уравнение для $\eta(k)$ получается дифференцированием (1.12) по k :

$$\eta' / R(\eta) = -K_3(L_3)^{-1}. \quad (2.2)$$

Для системы (2.1), (2.2) характеристическое уравнение (1.12) является интегралом по построению.

Выясним качественное поведение параметров простой волны. Производная $\eta'(k)$ не имеет особенностей, так как выполнено условие сильной нелинейности. Функция L_3 всегда отрицательна, а функцию K_3 можно представить в виде

$$K_3 = F'(k_3) = -(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)[(u_2 - k_3)(u_1 - k_3)(u_0 - k_3)]^{-1}.$$

Следовательно, в случаях 1–4 взаимного расположения u_i и k_3 (1.13) производные u'_i и η' знакоопределены:

- 1) $\eta' < 0, u'_2 > 0, u'_0 > 0, u'_1 < 0$ ($\Omega_0 = \omega_2 > \Omega = \omega_1 > 0$);
- 2) $\eta' > 0, u'_2 < 0, u'_0 > 0, u'_1 > 0$ ($0 < \Omega_0 = \omega_2 < \Omega = \omega_1$);
- 3) $\eta' > 0, u'_2 > 0, u'_0 > 0, u'_1 < 0$ ($\Omega_0 = \omega_1 < \Omega = \omega_2 < 0$);
- 4) $\eta' < 0, u'_2 < 0, u'_0 > 0, u'_1 > 0$ ($0 > \Omega_0 = \omega_1 > \Omega = \omega_2$).

Для определенности будем рассматривать случай 1. В этом случае толщина нижнего слоя δ увеличивается с ростом k ($\delta' = (u'_0 - u'_1)/\omega_2 > 0$) и k изменяется в пределах $u_1^{(l)} \leq k \leq u_2^{(r)}$. Далее индекс l соответствует потоку слева ($x < x_1(t)$), а индекс r — потоку справа ($x > x_2(t)$).

Докажем существование простой волны взаимодействия потоков, установив априорные оценки решения.

Лемма. Пусть u_1, u_2, u_0, η — решение системы (2.1), (2.2). Тогда справедливы оценки

$$\frac{\omega_2 \omega_1 (\eta - \delta) (\delta - p_0)}{R(\eta) \omega_2^2 \omega_1^2 (\eta - \delta) (\delta - p_0) + \omega_1 \omega_2 (\eta - \delta) + \omega_2^2 (\delta - p_0)} \leq |u_0 - k| \leq \sqrt{\frac{\eta - \delta}{R(\eta)}}, \quad (2.3)$$

$$\omega_1 (\delta - p_0) \leq |u_1 - k| \leq \omega_2 (\delta - p_0), \quad \omega_1 (\eta - \delta) \leq |u_2 - k| \leq \omega_1 (\eta - \delta) + \sqrt{\frac{\eta - \delta}{R(\eta)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае 1 (1.13) справедливы неравенства

$$0 < u_0 - k < u_2 - k, \quad \omega_2 > \omega_1, \quad u_1 - k < 0. \quad (2.4)$$

Тогда из равенства

$$u_2 - k = u_2 - u_0 + u_0 - k \quad (2.5)$$

следует

$$u_2 - k \geq u_2 - u_0. \quad (2.6)$$

Из равенства $u_0 - u_1 = u_0 - k + k - u_1$ получаем оценку сверху

$$|u_1 - k| \leq u_0 - u_1. \quad (2.7)$$

Из характеристического уравнения (1.12) вытекает

$$-\frac{u_2 - u_0}{\omega_1 (u_2 - k) (u_0 - k)} - \frac{u_0 - u_1}{\omega_2 (u_0 - k) (u_1 - k)} < 0.$$

Отсюда в силу (2.4), (2.6) находим

$$|u_1 - k| > \frac{\omega_1 (u_0 - u_1)}{\omega_2 (u_2 - u_0)} (u_2 - k) > \omega_1 \omega_2^{-1} (u_0 - u_1). \quad (2.8)$$

Так как $(u_0 - u_1) (\omega_2 (u_0 - k) (u_1 - k))^{-1} < 0$, то из (1.12) получаем $R - (u_2 - u_0) (\omega_1 (u_0 - k) (u_2 - k))^{-1} < 0$. Из последнего неравенства и (2.4) следует оценка сверху

$$(u_0 - k)^2 \leq (u_0 - k) (u_2 - k) \leq (u_2 - u_0) (R \omega_1)^{-1}. \quad (2.9)$$

В силу (2.6), (2.8) из (1.12) получаем

$$\frac{1}{u_0 - k} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) = R + \frac{1}{\omega_1 (u_2 - k)} - \frac{1}{\omega_2 (u_1 - k)} \leq R + \frac{1}{\omega_1 (u_2 - u_0)} + \frac{1}{\omega_1 (u_0 - u_1)},$$

откуда имеем оценку снизу

$$u_0 - k \geq \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \frac{(u_2 - u_0) (u_0 - u_1)}{R \omega_1 (u_2 - u_0) (u_0 - u_1) + u_2 - u_1}. \quad (2.10)$$

Из (2.5) и (2.9) получаем оценку сверху

$$u_2 - k \leq u_2 - u_0 + \sqrt{(u_2 - u_0) / (R \omega_1)}. \quad (2.11)$$

Утверждение леммы следует из (1.10) и неравенств (2.6)–(2.11). Лемма доказана.

Из априорных оценок (2.3) вытекает, что на любом интервале $\delta \in [\sigma, A]$ ($p_0 < \sigma \leq \delta \leq A < \eta$) величины $|u_i - k|$ остаются ограниченными: $M_1(\sigma, A, p_0, \eta) < |u_i - k| < M_2(\sigma, A, p_0, \eta)$. Величина $u_1 - k$ обращается в нуль только при $\delta = p_0$ (граничная точка $k = u_1$), а $u_2 - k$ — только при $\delta = \eta$ (граничная точка $k = u_2$). Величина $u_0 - k$ может обратиться в нуль только в граничных точках $\delta = \eta$ и $\delta = p_0$.

Рассмотрим поведение решения (2.1) в граничных точках. При $k \rightarrow u_1$, $u_1 \rightarrow u_0$, $\delta \rightarrow p_0$ из (1.12) получаем $\lim_{k \rightarrow u_1} [(u_0 - k)/(u_1 - k)] = 1 - \alpha$. Из (2.2) следует, что функцию η'/R в окрестности точки $k = u_1^{(l)}$ можно представить в виде

$$\frac{\eta'}{R} = -\frac{u_0 - k}{2 - \alpha} + O((u_0 - k)^2).$$

Аналогично находятся пределы в окрестности точки $k = u_2^{(r)}$:

$$\lim_{k \rightarrow u_2} \frac{u_0 - k}{u_2 - k} = (\alpha - 1)\alpha^{-1}, \quad \frac{\eta'}{R} = -\frac{u_0 - k}{2\alpha - 1} + O((u_0 - k)^2).$$

Таким образом, производные u_i имеют конечные пределы в граничных точках $k = u_1^{(l)}$, $k = u_2^{(r)}$:

$$\begin{aligned} u_1'(u_1^{(l)}) &= (1 - \alpha)(2 - \alpha)^{-1}, & u_2'(u_1^{(l)}) &= 0, & u_0'(u_1^{(l)}) &= (2 - \alpha)^{-1}, \\ u_1'(u_2^{(r)}) &= 0, & u_2'(u_2^{(r)}) &= (\alpha - 1)(2\alpha - 1)^{-1}, & u_0'(u_2^{(r)}) &= \alpha(2\alpha - 1)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Считая поток слева известным, определим поток справа, который можно связать с заданным простой волной взаимодействия. Условие примыкания к потоку слева ($\delta = p_0$) запишем в виде

$$u_0 = u_1^{(l)}, \quad u_1 = u_1^{(l)}, \quad u_2 = u_2^{(l)} \quad \text{при} \quad k = u_1^{(l)}. \quad (2.13)$$

Из (2.12) вытекает, что задача Коши (2.1), (2.2), (2.13) имеет единственное решение в окрестности граничной точки $k = u_1^{(l)}$. Возможность продолжения решения следует из априорных оценок (в силу (2.3) получаем равномерную оценку на правые части системы (2.1), (2.2)). Так как в волне взаимодействия толщина нижнего слоя δ увеличивается с ростом k , то решение продолжается вплоть до точки $\delta = \eta$ ($k = k_*$, $u_2(k_*) = k_*$). Значение k_* определяется в ходе решения задачи. Тогда состояние, которое можно связать с левым состоянием простой волной взаимодействия, определяется соотношениями

$$u_1^{(r)} = u_1(k_*, u_1^{(l)}, u_2^{(l)}) = \varphi_1(u_1^{(l)}, u_2^{(l)}), \quad u_2^{(r)} = k_*(u_1^{(l)}, u_2^{(l)}) = \varphi_2(u_1^{(l)}, u_2^{(l)}). \quad (2.14)$$

Итак, доказано, что существует простая волна взаимодействия потоков, и получены необходимые условия ее существования.

3. Задача о распаде разрыва. Рассмотрим задачу о распаде начального разрыва для системы (1.1)

$$(u, \dot{n})|_{t=0} = \begin{cases} (u^l(y), h^l) & \text{при } x < 0, \\ (u^r(y), h^r) & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Начальные данные (3.1) описывают стационарные сдвиговые потоки слева и справа от границы разрыва ($x = 0$). Здесь $u^l(y)$, $u^r(y)$ — известные функции; h^l , h^r — заданные постоянные.

В переменных x , p начальные данные задачи о распаде произвольного разрыва (3.1) имеют вид

$$(u, \eta)|_{t=0} = \begin{cases} (u^l(p), \eta_1) & \text{при } x < 0, \\ (u^r(p), \eta_2) & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Далее рассмотрим начальные данные (3.2) с постоянными величинами $u_p^l = \omega_1$, $u_p^r = \omega_2$. Такой выбор объясняется стремлением упростить задачу, а также свойством

сохранения величины $\omega/(\rho g) = u_p$ при пересечении фронтов разрывов малой амплитуды и зон простых волн [2, 4].

В силу инвариантности уравнений, начальных данных и граничных условий относительно равномерного растяжения переменных x, t решение задачи о распаде произвольного разрыва (1.8) будем искать в классе автомодельных решений $u = u(x/t, p)$, $\eta = \eta(x/t, p)$, $\tau = t^{-1}\tau(x/t, p)$.

В области однослойных течений уравнения движения (1.7) запишем в виде

$$(\eta - p_0)_t + (u_c(\eta - p_0))_x = 0, \quad ((\eta - p_0)u_c)_t + (u_c^2(\eta - p_0))_x + (P(\eta - p_0))_x = 0, \quad (3.3)$$

где $u_c = (u_2 + u_1)/2$; $P(\eta - p_0) = \int_0^{\eta - p_0} sR(p_0 + s)^{-1} ds + \omega_i^2(\eta - p_0)^3/12$. Для уравнений (3.3) начальные данные задачи о распаде разрыва имеют вид

$$(u_c, \eta)|_{t=0} = \begin{cases} (u_{c1}, \eta_1) & \text{при } x < 0, \\ (u_{c2}, \eta_2) & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

(u_{ci}, η_i — заданные постоянные).

Система (3.3) является аналогом уравнений одномерной газовой динамики. Зависимость $P(\eta - p_0)$ определяет уравнение состояния. Известно [6], что свойства решений уравнений газовой динамики зависят от свойств функции $\varphi(V) = P(V)$ (V — удельный объем). Если $\varphi_V < 0$, $\varphi_{VV} > 0$, то возникающие при распаде начального разрыва централизованные волны всегда являются волнами разрежения, а разрывы — ударными волнами сжатия (в нашей постановке задачи гидравлическими прыжками повышения уровня) и всегда образуется по одной волне, обращенной вправо, и одной волне, обращенной влево. Для уравнения состояния $P(\eta - p_0)$ условие $\varphi_V < 0$ выполнено всегда, а условие выпуклости выполнено в силу условия (1.14).

Следуя алгоритму решения газодинамической задачи о распаде разрыва, определим множество состояний (u_c, η) , которое можно связать с начальным состоянием (u_{c0}, η_0) простой волной или сильным разрывом. Соотношения на разрыве для (3.3) имеют вид

$$[(\eta - p_0)(u_c - D)] = 0, \quad [(\eta - p_0)u_c(u_c - D) + P] = 0 \quad (3.5)$$

($[f] = f^+ - f^-$ — скачок функции на разрыве $x'(t) = D$). Пусть u_{c0}, η_0 — параметры течения перед скачком, тогда из (3.5) находятся u_c, η за фронтом:

$$u_c - u_{c0} = \pm \sqrt{(P - P_0)((\eta_0 - p_0)^{-1} - (\eta - p_0)^{-1})} \quad (3.6)$$

(для волны, обращенной вправо, выбираем знак «плюс», а для волны, обращенной влево, — «минус»).

Состояния, которые можно связать с (u_{c0}, η_0) простой волной, определяются соотношениями

$$r_2 = r_{20} = \text{const}, \quad r_1 = r_{10} = \text{const}. \quad (3.7)$$

Первое соотношение задает простую волну разрежения, обращенную влево (скорость распространения волны $k = k_1 < \min u_i$), второе — волну, обращенную вправо ($k = k_2 > \max u_i$). Преобразуем (3.7) к соотношениям между $\eta - p_0$ и u_c . Используя (1.9) и равенства $u_1 = u_c - \omega_i(\eta - p_0)/2$, $u_2 = u_c + \omega_i(\eta - p_0)/2$, перепишем (3.7) в виде

$$u_c - u_{c0} = \begin{cases} \Phi_1(\eta - p_0) - \Phi_1(\eta_0 - p_0) + \omega_i(\eta - \eta_0)/2, & r_1 = r_{10}, \\ \Phi_2(\eta - p_0) - \Phi_2(\eta_0 - p_0) + \omega_i(\eta - \eta_0)/2, & r_2 = r_{20}, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\Phi_i = \int_0^{\eta-p_0} \frac{2}{R(s+p_0)(\omega_i s \pm \sqrt{\omega_i^2 s^2 + 4s/(R(s+p_0))})} ds, \quad i = 1, 2.$$

Правые части (3.6), (3.8) — монотонные функции, обращающиеся в нуль при $\eta = \eta_0$.

Для заданных значений (u_{c1}, η_1) , которые назовем левым начальным состоянием, решение в волне (разрежения или ударной) $u_c^{(i)} = u_{c1} + U^l(\eta_1, \eta^{(i)})$ является функцией одной переменной $\eta^{(i)}$. Функция U^l задается вторым соотношением (3.8) при $\eta^{(i)} < \eta_1$ и формулой (3.6) со знаком «минус» при $\eta^{(i)} > \eta_1$. Для состояния (u_{c2}, η_2) , которое назовем правым, решение определяется как функция переменной $\eta^{(r)}$: $u_c^{(r)} = u_{c2} + U^r(\eta_1, \eta^{(r)})$. Функция U^r задается первым соотношением (3.8) при $\eta^{(r)} < \eta_2$ и формулой (3.6) со знаком «плюс» при $\eta^{(r)} > \eta_2$. В отличие от газодинамической задачи состояния за прошедшими волнами должны удовлетворять не условию совпадения скоростей и давлений, а условиям (2.14). Преобразуем (2.14) к виду

$$\begin{aligned} u_c^{(r)} &= (\varphi_1(u_1^{(l)}, u_2^{(l)}) + \varphi_2(u_1^{(l)}, u_2^{(l)}))/2 = U_1(u_c^{(l)}, \eta^{(l)}), \\ \eta^{(r)} - p_0 &= (\varphi_2(u_1^{(l)}, u_2^{(l)}) - \varphi_1(u_1^{(l)}, u_2^{(l)}))/\omega_2 = U_2(u_c^{(l)}, \eta^{(l)}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $u_c^{(r)} = (u_2^{(r)} + u_1^{(r)})/2$; $\eta^{(r)} - p_0 = (u_2^{(r)} - u_1^{(r)})/\omega_2$; $u_2^{(l)} = u_c^{(l)} + \omega_1(\eta^{(i)} - p_0)/2$; $u_1^{(l)} = u_c^{(l)} - \omega_1(\eta^{(l)} - p_0)/2$.

Решение задачи о распаде начального разрыва (3.3), (3.4) сводится к решению системы четырех уравнений для четырех неизвестных $u_c^{(l)}, \eta^{(l)}, u_c^{(r)}, \eta^{(r)}$:

$$\begin{aligned} \Psi_1 \equiv u_c^{(l)} - u_{c1} - U^l(\eta_1, \eta^{(l)}) &= 0, & \Psi_2 \equiv u_c^{(r)} - u_{c2} - U^r(\eta_2, \eta^{(r)}) &= 0, \\ \Psi_3 \equiv u_c^{(r)} - U_1(u_c^{(l)}, \eta^{(l)}) &= 0, & \Psi_4 \equiv \eta^{(r)} - U_2(u_c^{(l)}, \eta^{(l)}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Если сдвиговые потоки слева и справа совпадают: $u_{c1} = u_{c2}, \eta_1 = \eta_2, \omega_1 = \omega_2$, то $\alpha = 1$ и волна взаимодействия вырождается в сдвиговой поток

$$u = \omega_1(p - p_0) + u_1^{(l)}, \quad \eta = \eta_1, \quad u_1 = u_1^{(l)}, \quad u_2 = u_2^{(l)}, \quad k = u_0 = u_0^c \quad (u_1^{(l)} \leq k \leq u_2^{(l)}). \tag{3.11}$$

Условие (2.14) превращается в условие совпадения сдвиговых потоков слева и справа $u_c^{(r)} = u_c^{(l)}, \eta^{(r)} = \eta^{(l)}$, и система (3.10) совместна.

Пусть состояния слева и справа близки. Тогда $\omega_2 = (1 + \epsilon)\omega_1, \alpha = 1 + \epsilon$, где ϵ — малый параметр ($\epsilon > 0$). Рассмотрим малые возмущения сдвигового потока (3.11)

$$\eta = \eta_1 + \epsilon\eta^1, \quad u_1 = u_1^{(l)} + \epsilon u_1^1, \quad u_2 = u_2^{(l)} + \epsilon u_2^1, \quad u_0 = u_0^0 + \epsilon u_0^1 = k^0 + \epsilon u_0^1, \quad k = k^0 + \epsilon k^1.$$

Линеаризуем систему уравнений (2.1), оставляя только линейные члены по ϵ , и сносим все возмущения на невозмущенный уровень $k = u_0^0 = k^0$. Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (u_1^1)' &= -(\eta^1)' R_0^{-1} (u_1^{(l)} - k)^{-1}, & (u_2^1)' &= -(\eta^1)' R_0^{-1} (u_2^{(l)} - k)^{-1}, & u_0^1 &= -(\eta^1)' R_0^{-1}, \\ R_0 &= R(\eta_1) = \text{const}, & k &= u_0^0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Линеаризуя (1.9), с учетом $\eta_1 = (u_2^{(l)} - u_1^{(l)})\omega_1^{-1}$ имеем

$$\eta^1 = (u_2^1 - u_1^1)\omega_1^{-1} + (u_1^{(l)} - k)\omega_1^{-1}. \tag{3.13}$$

Величина k^1 находится из линеаризованного характеристического уравнения (1.12):

$$k^1 = u_0^1 - (R_0\omega_1 + (u_2^{(l)} - k)^{-1} - (u_1^{(l)} - k)^{-1})^{-1}.$$

Исключая η^1 при помощи (3.13) из первых двух уравнений (3.12), получаем

$$(u_1^1)' = \frac{(u_2^{(l)} - k)/(R_0\omega_1)}{(u_2^{(l)} - k)(u_1^{(l)} - k) - (u_2^{(l)} - u_1^{(l)})/(R_0\omega_1)}, \quad (3.14)$$

$$(u_2^1)' = \frac{(u_1^{(l)} - k)/(R_0\omega_1)}{(u_2^{(l)} - k)(u_1^{(l)} - k) - (u_2^{(l)} - u_1^{(l)})/(R_0\omega_1)}.$$

Поскольку должны выполняться условия (2.14), имеем $u_1^1(u_1^{(l)}) = u_2^1(u_1^{(l)}) = 0$. После интегрирования (3.14) находим решение линеаризованной задачи

$$u_1^1 = (I_1(k) - I_1(u_1^{(l)}))(R_0\omega_1\Delta)^{-1}, \quad u_2^1 = (I_2(k) - I_2(u_1^{(l)}))(R_0\omega_1\Delta)^{-1},$$

где $I_1(k) = \ln(k_2 - k)u_1^{(l) - k_2} (k - k_1)^{k_1 - u_1^{(l)}}$, $I_2(k) = \ln(k_2 - k)u_2^{(l) - k_2} (k - k_1)^{k_1 - u_2^{(l)}}$; Δ — дискриминант; k_1, k_2 — корни квадратного уравнения $(u_2^{(l)} - k)(u_1^{(l)} - k) - (u_2^{(l)} - u_1^{(l)})/(R_0\omega_1) = 0$ ($k_2 > k_1$). Тогда якобиан системы (3.10) при $u_{c1} = u_{c2}$, $\eta_1 = \eta_2$, $\omega_1 = \omega_2$ не равен нулю, и согласно теореме о неявной функции в окрестности (u_{c1}, η_1) существует единственное решение системы (3.10).

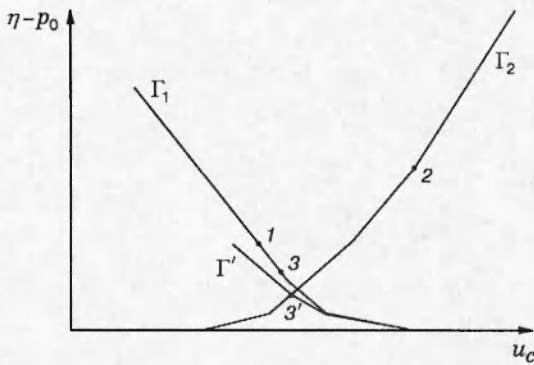


Рис. 2

Приведем алгоритм построения решения о распаде произвольного разрыва. Построим диаграммы Γ_1 и Γ_2 возможных переходов для левого и правого начальных состояний, обозначенных соответственно точками 1 и 2 на плоскости $(u_c, \eta - p_0)$ (рис. 2). Кривая Γ_1 задается функцией $u_c = u_{c1} + U^{(l)}$, а кривая Γ_2 — функцией $u_c = u_{c2} + U^{(r)}$. Состояния за прошедшими фронтами должны быть связаны условиями существования волны взаимодействия (2.14). Для того чтобы найти точку, определяющую состояния за фронтом, постро-

им кривую Γ' , заданную параметрическими уравнениями (3.9), где u_{c1}, η_1 принадлежат кривой Γ_1 . Точкой $3'$ пересечения кривых Γ_2 и Γ' определяется состояние за прошедшими волнами для начального состояния 2, а точкой 3 (прообразом точки $3'$ на кривой Γ_1) — состояние за фронтом волны для начального состояния 1. Конфигурация волн определяется по аналогии с газовой динамикой: если точка пересечения $3'$ (3) лежит выше начальной точки 2 (1), то по сдвиговому потоку пройдет ударная волна (гидравлический прыжок), если ниже, то пройдет простая волна разрежения. Состояния за фронтом связаны соотношениями (2.14), и построение простой волны взаимодействия завершает построение решения задачи о распаде произвольного разрыва. В отличие от [5] условия существования волны взаимодействия потоков (2.14) не заданы явно, а определяются через решение системы (2.1), (2.2), которое можно найти численно.

Опишем построение кривой Γ' . Выберем несколько точек (u_{c1}^i, η_1^i) на кривой Γ_1 . Значения $u_{1i}^{(l)}, u_{2i}^{(l)}$ однозначно определяются по (u_{c1}^i, η_1^i) формулами (3.9). Используя $u_{1i}^{(l)}$ и $u_{2i}^{(l)}$ как данные Коши, находим для каждого i решение $u_{1i}^{(r)}, u_{2i}^{(r)}$ системы (2.1), (2.2). Множество точек $(u_{ci}^{(r)}, \eta_i^{(r)})$ определяет кривую Γ' (значения $u_{ci}^{(r)}, \eta_i^{(r)}$ находятся по (3.9)). На рис. 2 приведены графики $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma'$ для левого состояния $u_1 = 1, u_2 = 2, \omega_1 = 2$ и правого состояния $u_1 = 2, u_2 = 5, \omega_2 = 3$ (политропное уравнение состояния $R(\eta) = \eta^{1/3}$).

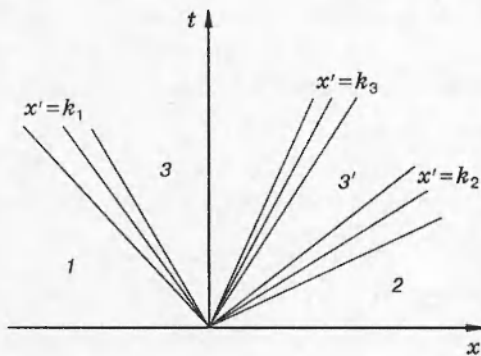


Рис. 3

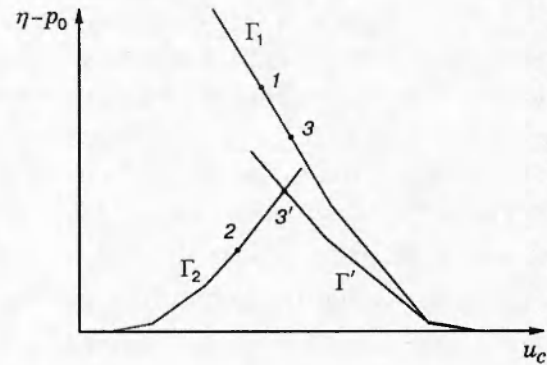


Рис. 4

Дифференциальные уравнения (2.1), (2.2) аппроксимируются явной разностной схемой [7]. В окрестности точки $k = u_1 = 1$ решение определяется по (2.11) и далее находится методом Рунге — Кутты второго порядка [7]. В этом случае по сдвиговым потокам пройдут простые волны разрежения. На рис. 3 приведена картина характеристик на плоскости (x, t) , соответствующая конфигурации волн на рис. 2. При изменении положения состояний 1 и 2 положение кривой Γ' , а следовательно, и волновые конфигурации будут меняться.

На рис. 4 приведены кривые $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma'$ для левого состояния $u_1 = 1, u_2 = 7, \omega_1 = 2$ и правого состояния $u_1 = 2, u_2 = 5, \omega_2 = 3$ (уравнение состояния $R(\eta) = \eta^{1/3}$). Как следует из рис. 4, по состоянию 1 пройдет волна разрежения, а по 2 — гидравлический прыжок. Картина характеристик, отвечающая этой волновой конфигурации, приведена на рис. 5.

Итак, пусть заданы состояния 1 слева (u_{c1}, η_1) и 2 справа (u_{c2}, η_2) . На плоскости $(\eta - p_0, u_c)$ строим диаграммы Γ_1 и Γ_2 возможных переходов для состояний 1 и 2 соответственно (см. рис. 2). Затем по кривой Γ_1 строим кривую Γ' . Точка $3'$ с координатами $(u_c^{(r)}, \eta^{(r)})$ пересечения кривых Γ' и Γ_2 определяет состояние за фронтом, соответствующее состоянию 2, а точка 3 с координатами $(u_c^{(l)}, \eta^{(l)})$ (прообраз точки $3'$ на кривой Γ_1) дает состояние за фронтом, соответствующее состоянию 1. Если точка $3'$ лежит выше точки 2 на кривой Γ_2 , то по сдвиговому потоку пройдет гидравлический прыжок; если точка $3'$ лежит ниже точки 2, то пройдет простая волна понижения уровня. Аналогично для состояния 1: если точка 3 лежит выше точки 1 на кривой Γ_1 , то пройдет гидравлический прыжок, если ниже, то пройдет простая волна понижения уровня. Для волновой конфигурации, приведенной на рис. 2, по потоку справа пройдет простая волна с характеристической скоростью $k_2 > \max u$ ($k_2 = k_2(u_{c2}, \eta_2)$ определяется по формуле (1.8) со знаком «плюс»). По потоку слева пройдет простая волна со скоростью $k_1 < \min u$ (k_1 определяется по (1.8) со знаком «минус»). В областях $-\infty < x/t < k_1(u_{c1}, \eta_1)$ и $k_2(u_{c2}, \eta_2) < x/t < +\infty$ (см. рис. 3) течение является сдвиговым потоком: $u_c = u_{c1}, \eta = \eta_1$ и $u_c = u_{c2}, \eta = \eta_2$ соответственно. В области простой волны, примыкающей к состоянию 1, решение задается формулами $x/t = k_1(u_c, \eta), r_2 = r_2(u_{c1}, \eta_1); k_1(u_{c1}, \eta_1) \leq k_1 \leq k_1(u_c^{(l)}, \eta^{(l)})$. В области простой волны, примыкающей к состоянию 2, решение задается формулами $x/t = k_2(u_c, \eta), r_1 = r_1(u_{c2}, \eta_2); k_2(u_{c2}, \eta_2) \leq k_2 \leq k_2(u_c^{(r)}, \eta^{(r)})$. На рис. 3 в областях $k_1(u_c^{(l)}, \eta^{(l)}) < x/t < u_1^{(l)}$

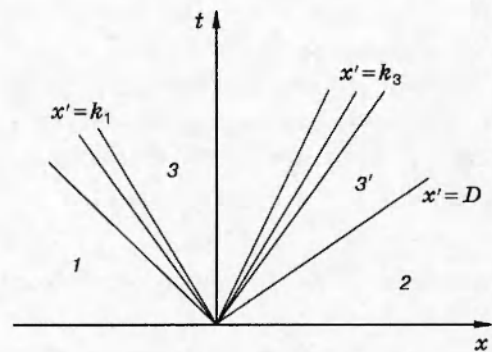


Рис. 5

и $u_2^{(r)} < x/t < k_2(u_c^{(r)}, \tau_1^{(r)})$ течение является сдвиговым потоком. Состояния, соответствующие точкам 3 и $3'$, удовлетворяют условиям (2.14), т. е. из всех возможных состояний найдены два, которые можно связать простой волной взаимодействия. Построение простой волны в области $u_1^{(r)} < x/t < u_2^{(r)}$ завершает решение задачи.

Для конфигурации волн, приведенной на рис. 4, решение строится аналогично. Скорость гидравлического прыжка D находится из первого соотношения (3.5) по состояниям перед и за фронтом разрыва. В нашем случае $D = ((\eta^{(r)} - p_0)u_c^{(r)} - (\eta_2 - p_0)u_{c2})(\eta^{(r)} - \eta_2)^{-1}$. Проанализируем соотношения на разрыве. Из (3.5) следует, что $u_c^{(r)} < D$ ($u_c^{(r)}$ — средняя скорость за фронтом разрыва). Однако максимальная скорость $u_2^{(r)}$ необязательно удовлетворяет этому условию (в рассматриваемом случае $\omega_2 > 0$). Используя соотношения (3.5) и (3.9), перепишем условие $u_2^{(r)} = D$ в виде

$$\omega_2^2(\eta_2 - p_0) = 12((\xi - 1)^2(3\xi^2 + 2\xi + 1))^{-1} \int_1^\xi sR(p_0 + s)^{-1} ds \quad (\xi = (\eta^{(r)} - p_0)(\eta_2 - p_0)^{-1}). \quad (3.15)$$

Функция в правой части (3.15) при $\xi \rightarrow 1$ стремится к $+\infty$ (неопределенность $0/0$ раскрываем по правилу Лопиталя), а при $\xi \rightarrow +\infty$ стремится к нулю, поэтому всегда существует по крайней мере один корень $\xi = \xi_*$ уравнения (3.13). Если $\omega_2^2(\eta_2 - p_0) \rightarrow +\infty$, то $\xi_* \rightarrow 1$; если $\omega_2^2(\eta_2 - p_0) \rightarrow 0$, то $\xi_* \rightarrow +\infty$. Следовательно, максимальная скорость за фронтом $u_2^{(r)}$ остается меньше скорости разрыва D , если величина $\omega_2^2(\eta_2 - p_0)$ мала. Поэтому конфигурация с гидравлическими прыжками относится к случаю малых величин $\omega_2^2(\eta - p_0)$. Отметим, что для волновой конфигурации с возникающими волнами разрежения таких ограничений нет.

Если кривые Γ' и Γ_2 не пересекаются, то в результате распада возникают две центрированные простые волны разрежения, за которыми «глубина» потока равна нулю.

Таким образом, доказано, что для малых величин $\omega_2^2(\eta_2 - p_0)$ при близких состояниях 1 и 2 задача о распаде произвольного разрыва имеет единственное решение.

Автор выражает благодарность профессору В. М. Тешукову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тешуков В. М. Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
2. Тешуков В. М. Гидравлический прыжок на сдвиговом течении баротропной жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 73–81.
3. Тешуков В. М. Простые волны на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 48–57.
4. Елемесова Б. Н. Простые волны в слое баротропной завихренной жидкости // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 56–64.
5. Тешуков В. М. Нестационарное взаимодействие равномерно завихренных потоков // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 5. С. 55–66.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 26/VI 1997 г.,
в окончательном варианте — 2/II 1998 г.