УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИНЫ В БАЛОЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о нестационарном распространении трещины в балочном приближении. Используются две модели теории балок: Эйлера и Тимошенко. Распространение трещины описывается с помощью уравнения баланса энергии.

Ключевые слова: упругая балка, балка Эйлера, балка Тимошенко, энергетический критерий роста трещины, плотность поверхностной энергии, метод нормальных мод, метод Рунге — Кутты.

Балочное приближение в теории трещин значительно проще теории трещин в трехмерной упругой среде, тем не менее на его основе можно исследовать различные задачи механики трещин. Балочное приближение применимо при исследовании расслоения многослойных материалов, расклинивания, а также при расчете прочности соединения облицовочных покрытий. Балочное приближение в теории трещин развивалось в работах [1–5], в которых получены точные соотношения в кончике трещины и автомодельные решения, но нестационарное движение трещины при произвольной нагрузке не рассматривалось. Предлагаемый в данной работе подход позволяет описать нестационарное движение трещины при условии несмыкания ее берегов при произвольной симметричной нагрузке для симметричной трещины и при произвольной нагрузке для трещины с одним концом закрепленным, а другим — свободным. Приведены результаты расчетов для симметричной трещины при равномерно распределенной нагрузке.

Для описания упругих свойств балки используются две балочные теории: Эйлера и Тимошенко. В качестве критерия роста трещины применяется уравнение баланса энергии с учетом поверхностной энергии, высвобождающейся при образовании новых поверхностей. Для решения задачи используется метод нормальных мод: прогиб балки представляется в виде разложения по зависящим от переменной длины балки собственным функциям с неизвестными коэффициентами. Для определения коэффициентов разложения и длины трещины получены система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенство, которые решаются методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

Рассматривается призматическая упругая балка, приклеенная к жесткой поверхности. На некотором участке длиной $2l_0$ балка отслоилась и лежит на ней. В момент времени $t = 0$ на балку начинает действовать постоянная равномерно распределенная нагрузка P, направленная вверх, под действием которой балка начинает двигаться вверх, отрываясь

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2260.2008.1).

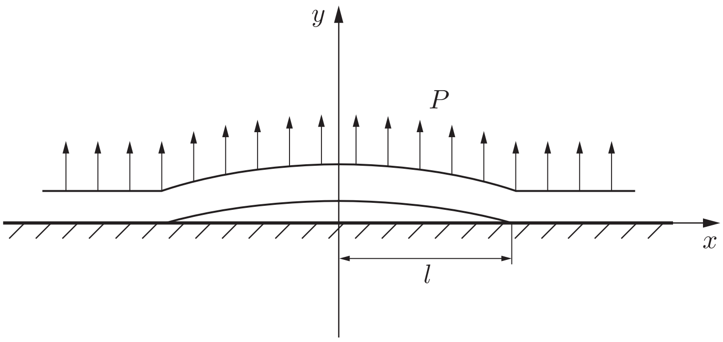

Рис. 1. Схема движения балки

от жесткой поверхности (рис. 1). На концах трещины ставятся условия жесткого защемления. Задача состоит в определении движения балки и зависимости длины отслоившегося участка от времени. Предполагается, что в клеевом слое плотность поверхностной энергии меньше, чем в материале балки (в противном случае трещина будет распространяться в самой балке).

1. Постановка задачи для балки Эйлера. Движение балки Эйлера описывается уравнением

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = P, \qquad (1.1)$$

где ρ — плотность материала балки; h, w — толщина и прогиб балки; E — модуль Юнга; $I = h^3/12$ — момент инерции сечения балки. Уравнение баланса энергии запишем в виде

$$\int\limits_{-l}^{l} P \frac{\partial w}{\partial t} \, dx = \frac{d}{dt} (T + \Pi) + 4\gamma l' \theta(l'), \qquad (1.2)$$

где γ — плотность поверхностной энергии, высвобождающейся при распространении трещины; θ — функция Хевисайда; $l = l(t)$ — полудлина трещины; T, Π — кинетическая и потенциальная энергия балки:

$$T = \frac{\rho h}{2} \int\limits_{-l}^{l} \Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)^2 dx, \qquad \Pi = \frac{EI}{2} \int\limits_{-l}^{l} \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^2 dx.$$

В последнем члене уравнения (1.2) коэффициент, равный четырем, учитывает наличие двух трещин на концах балки и двух свободных поверхностей, образующихся при продвижении трещины. Кроме того, должно быть выполнено неравенство

$$l'(t) \geqslant 0, \qquad (1.3)$$

которое следует из физического смысла задачи (образовавшаяся трещина не смыкается). Краевые и начальные условия имеют следующий вид:

$$w(l,t) = w_x(l,t) = 0, \qquad w(-l,t) = w_x(-l,t) = 0; \qquad (1.4)$$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \qquad l(0) = l_0, \qquad l'(0) = 0. \qquad (1.5)$$

2. Решение задачи для балки Эйлера. Прогиб балки представим в виде

$$w(x,t) = \sum_{k}^{N} A_k(t) W_k(x), \tag{2.1}$$

где $A_k(t)$ — неизвестные коэффициенты разложения; $W_k(x)$ — четные собственные функции для балки Эйлера с краевыми условиями (1.4); N — число мод разложения. Собственные функции $W_k(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^4 W_k}{dx^4} = \lambda_k^4 W_k(x)$$

и краевым условиям (1.4). Четные собственные функции имеют вид

$$W_k(x) = \cos(\lambda_k x) - \frac{\cos(\lambda_k l)}{\operatorname{ch}(\lambda_k l)} \operatorname{ch}(\lambda_k x),$$

где собственные числа $\lambda_k = \lambda_k(l)$ определяются соотношением

$$\operatorname{tg}(\lambda_k l) + \operatorname{th}(\lambda_k l) = 0. \tag{2.2}$$

При $k \to \infty$ $\operatorname{th}(\lambda_k l) \simeq 1$ и $\lambda_k \simeq (k - 1/4)\pi$. Отметим, что последнее приближенное равенство выполнено достаточно точно при $k \geqslant 2$. Собственные функции ортогональны:

$$\int_{-l}^{l} W_k(x) W_m(x)\, dx = B_k \delta_{km}, \qquad B_k = \int_{-l}^{l} W_k^2(x)\, dx \tag{2.3}$$

(δ_{km} — символ Кронекера).

Из (2.2) следует

$$\lambda_k l = \text{const}, \qquad \frac{d\lambda_k}{dl} = -\frac{\lambda_k}{l}, \qquad \frac{\partial}{\partial l} = -\frac{x}{l}\, \frac{\partial}{\partial x}.$$

Тогда из (2.1) получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} A_k'(t) W_k(x) - \frac{l'}{l} \sum_{k=1}^{N} A_k(t) x\, \frac{\partial W_k}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{N} A_k''(t) W_k(x) - 2\, \frac{l'}{l} \sum_{k=1}^{N} A_k'(t) x\, \frac{\partial W_k}{\partial x} - \\ - \Big(\frac{l''}{l} - 2\, \frac{l'^2}{l^2}\Big) \sum_{k=1}^{N} A_k(t) x\, \frac{\partial W_k}{\partial x} + \frac{l'^2}{l^2} \sum_{k=1}^{N} A_k(t) x^2\, \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2}.$$

Уравнение движения балки (1.1) принимает вид

$$\rho h \Big[\sum_{k=1}^{N} A_k''(t) W_k(x) - \Big(\frac{l''}{l} - 2\, \frac{l'^2}{l^2}\Big) \sum_{k=1}^{N} A_k(t) x\, \frac{\partial W_k}{\partial x} - 2\, \frac{l'}{l} \sum_{k=1}^{N} A_k'(t) x\, \frac{\partial W_k}{\partial x} + \\ + \frac{l'^2}{l^2} \sum_{k=1}^{N} A_k(t) x^2\, \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \Big] + EI \sum_{k=1}^{N} A_k(t) \lambda_k^4 W_k(x) = P.$$

Умножив это уравнение на $W_m(x)$ и проинтегрировав по x, получим

$$\rho h\Big[A_m'' B_m - \Big(\frac{l''}{l} - 2\,\frac{l'^2}{l^2}\Big)\sum_{k=1}^N C_{mk}A_k - 2\,\frac{l'}{l}\sum_{k=1}^N C_{mk}A_k' + \frac{l'^2}{l^2}\sum_{k=1}^N G_{mk}A_k\Big] + {}$$
$$+ EI\lambda_m^4 A_m(t)B_m = PU_m. \qquad (2.4)$$

Здесь

$$C_{mk} = \int\limits_{-l}^{l} xW_m(x)\,\frac{\partial W_k}{\partial x}\,dx, \quad G_{mk} = \int\limits_{-l}^{l} x^2W_m(x)\,\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2}\,dx, \quad U_m = \int\limits_{-l}^{l} W_m(x)\,dx. \qquad (2.5)$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергии имеют вид

$$T = \frac{\rho h}{2}\Big(\sum_{k=1}^N A_k'^2(t)B_k - 2\,\frac{l'}{l}\sum_{k=1}^N C_{mk}A_kA_m' + \frac{l'^2}{l^2}\sum_{k=1}^N D_{mk}A_kA_m\Big),$$

$$\Pi = \frac{EI}{2}\sum_{k=1}^N A_k^2(t)\lambda_k^4 B_k, \qquad D_{mk} = \int\limits_{-l}^{l} x^2\,\frac{\partial W_m}{\partial x}\,\frac{\partial W_k}{\partial x}\,dx.$$

Вычисляя интегралы, для коэффициентов матриц и векторов получаем выражения

$$G_{mk} = -2C_{mk} - D_{mk}, \quad B_m = l\bar B_m, \quad U_m = l\bar U_m, \quad C_{mk} = l\bar C_{mk}, \quad D_{mk} = l\bar D_{mk}, \qquad (2.6)$$

где коэффициенты $\bar B_m$, $\bar U_m$, $\bar C_{mk}$, $\bar D_{mk}$ не зависят от l:

$$\bar B_m = \frac{2}{\mathrm{th}^2(\lambda_m l) + 1}, \quad \bar U_m = 4\,\frac{\sin(\lambda_m l)}{\lambda_m l}, \quad \bar C_{mk} = 8\,\frac{\lambda_m^2\lambda_k^2\cos(\lambda_m l)\cos(\lambda_k l)}{\lambda_k^4 - \lambda_m^4},$$

$$\bar D_{mk} = \frac{8\lambda_k^2\lambda_m^2}{\lambda_m^4 - \lambda_k^4}\Big(\frac{4(\lambda_m^4 + \lambda_k^4)}{\lambda_m^4 - \lambda_k^4}\cos(\lambda_k l)\cos(\lambda_m l) + {} \qquad (2.7)$$
$$+ \lambda_m l\sin(\lambda_m l)\cos(\lambda_k l) - \lambda_k l\sin(\lambda_k l)\cos(\lambda_m l)\Big), \quad m \ne k,$$

$$\bar D_{kk} = 2\,\frac{(\lambda_k l)^2\,\mathrm{th}^2(\lambda_k l)/3 - \lambda_k l\,\mathrm{th}(\lambda_k l) + 3/2}{\mathrm{th}^2(\lambda_k l) + 1}.$$

При этом $\bar C_{km} = -\bar C_{mk}$ в случае $k \ne m$, $\bar C_{kk} = -\bar B_k/2$, $\bar D_{mk} = \bar D_{km}$.

Уравнение баланса энергии (1.2) принимает вид

$$P\sum_{k=1}^N A_k' l\bar U_k + l'P\sum_{k=1}^N A_k\bar U_k = \rho h\Big[\sum_{m=1}^N A_m'A_m'' l\bar B_m + \frac{l'}{2}\sum_{m=1}^N A_m'^2\bar B_m - l''\sum_{k,m=1}^N \bar C_{mk}A_kA_m' + {}$$
$$+ \Big(\frac{l'l''}{l} - \frac{l'^3}{2l^2}\Big)\sum_{k,m=1}^N \bar D_{mk}A_kA_m - l'\sum_{k,m=1}^N \bar C_{mk}(A_k'A_m' + A_kA_m'') + \frac{l'^2}{l}\sum_{k,m=1}^N \bar D_{mk}A_kA_m'\Big] + {}$$
$$+ EI\sum_{m=1}^N A_mA_m'\lambda_m^4 l\bar B_m - 3\,\frac{EIl'}{2l^4}\sum_{m=1}^N A_m^2(\lambda_m l)^4\bar B_m + 4\gamma l'\theta(l'). \qquad (2.8)$$

Умножим уравнение (2.4) на A'_m и просуммируем по m, а затем вычтем полученное уравнение из уравнения (2.8). В результате имеем

$$P\sum_{k=1}^{N}A_k\bar{U}_k = \rho h\Big[\Big(\frac{l''}{l}-\frac{l'^2}{2l^2}\Big)\sum_{k,m=1}^{N}\bar{D}_{mk}A_kA_m - \sum_{k,m=1}^{N}\bar{C}_{mk}A_kA''_m + {}$$
$$+ 2\,\frac{l'}{l}\sum_{k,m=1}^{N}\bar{D}_{mk}A_kA'_m\Big] - 3\,\frac{EI}{2l^4}\sum_{m=1}^{N}A_m^2(\lambda_m l)^4\bar{B}_m + 4\gamma\theta(l').$$

Подставляя в это уравнение выражение для $A''_m(t)$, находим

$$\frac{l''}{l}\sum_{k,m=1}^{N}F_{mk}A_kA_m = \frac{P}{\rho h}\sum_{k=1}^{N}A_k\Big(\bar{U}_k+\sum_{m=1}^{N}\frac{\bar{C}_{mk}\bar{U}_m}{\bar{B}_m}\Big) + 3\,\frac{EI}{2\rho h l^4}\sum_{m=1}^{N}A_m^2(\lambda_m l)^4\bar{B}_m - {}$$
$$- \frac{4\gamma\theta(l')}{\rho h} - 2\,\frac{l'}{l}\sum_{k,m=1}^{N}F_{mk}A_kA'_m + \frac{l'^2}{l^2}\sum_{k,m=1}^{N}H_{mk}A_kA_m, \qquad (2.9)$$

$$F_{mk} = \bar{D}_{mk} - \sum_{j=1}^{N}\frac{\bar{C}_{jk}\bar{C}_{jm}}{\bar{B}_j}, \qquad H_{mk} = \frac{\bar{D}_{mk}}{2} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\bar{C}_{jk}\bar{D}_{jm}}{\bar{B}_j}.$$

Из начальных условий (1.5) следует

$$A_m(0) = A'_m(0) = 0, \qquad l(0) = l_0, \qquad l'(0) = 0. \qquad (2.10)$$

Таким образом, для расчета движения балки имеем уравнения (2.4), (2.9) и неравенство (1.3). Подставив в уравнение (2.4) выражение для l'' из (2.9), получим систему нелинейных уравнений второго порядка, разрешенную относительно старших производных. К этой системе необходимо добавить неравенство (1.3) с начальными условиями (2.10). Полученная система сводится к системе уравнений первого порядка и решается вместе с неравенством (1.3) методом Рунге — Кутты четвертого порядка [6]. Поскольку все члены уравнений (2.4), (2.9) дифференцируемы и $l(t) \geqslant l_0$, для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство $R = \sum_{j=1}^{N}F_{mk}A_mA_k \geqslant \varepsilon > 0$ [7]. Матрица F симметрична. Исследовались собственные значения матрицы F при различном числе мод. Оказалось, что в спектре матрицы имеются как положительные собственные значения, так и отрицательные. Таким образом, величина R может менять знак, и поэтому ветвление решений в данной задаче возможно. В начальный момент $R = 0$, что следует из начальных условий. Однако в начальный момент трещина не растет: $l'(0) = 0$, поэтому на первом шаге по времени решалось уравнение (2.4) с фиксированной длиной трещины. На следующих шагах по времени величина $R(t)$ контролировалась и в проведенных расчетах была положительной. Результаты расчетов с различным числом мод (5, 10, 20) хорошо согласуются, что свидетельствует об устойчивости расчетной модели.

3. Постановка задачи для балки Тимошенко. Движение балки Тимошенко описывается системой уравнений [8, 9]

$$\rho h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + hG\Big(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = P, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$
$$\rho I\,\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} + hG\Big(\beta - \frac{\partial w}{\partial x}\Big) - EI\,\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} = 0,$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; β — угол поворота поперечного сечения балки при пренебрежении сдвигом; наклон касательной к балке определяется соотношением $\partial w/\partial x = \beta + \psi$; ψ — угол сдвига.

Кроме того, используются уравнение баланса энергии (1.2), где

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l} \Big[\rho h\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)^2 + \rho I\Big(\frac{\partial \beta}{\partial t}\Big)^2\Big]\,dx, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l} \Big[EI\Big(\frac{\partial \beta}{\partial x}\Big)^2 + Gh\Big(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta\Big)^2\Big]\,dx,$$

и неравенство (1.3). Краевые и начальные условия имеют следующий вид:

$$w(l,t) = \beta(l,t) = 0, \qquad w(-l,t) = \beta(-l,t) = 0; \tag{3.1}$$

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \quad \beta(x,0) = \beta_t(x,0) = 0, \quad l(0) = l_0, \quad l'(0) = 0. \tag{3.2}$$

4. Решение задачи для балки Тимошенко. Как и для балки Эйлера, решение будем искать в виде разложения по собственным функциям. Собственные функции для балки Тимошенко с краевыми условиями, аналогичными (3.1) и (3.2), найдены в [9]. Введем следующие обозначения (см. [3]):

$$c_0^2 = E/\rho, \qquad c_2^2 = G/\rho, \qquad a^2 = c_0^2 h^2/12.$$

Тогда для собственных функций $W_n(x)$, $\beta_n(x)$ получим систему

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta_n}{\partial x} = -\frac{\omega_n^2}{c_2^2}\,W_n, \\ \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial x^2} + \frac{c_2^2}{a^2}\Big(\frac{\partial W_n}{\partial x} - \beta_n\Big) = -\frac{\omega_n^2}{c_0^2}\,\beta_n. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Исключая из этой системы β_n, находим уравнение для W_n

$$\frac{\partial^4 W_n}{\partial x^4} + \omega_n^2\Big(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_0^2}\Big)\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} + \Big(\frac{\omega_n^4}{c_2^2 c_0^2} - \frac{\omega_n^2}{a^2}\Big)W_n = 0. \tag{4.2}$$

Решение уравнения (4.2) будем искать в виде $W_n(x) = \exp(k_n x)$. Тогда коэффициенты k_n определяются выражением

$$k_n^2 = -\frac{\omega_n^2}{2}\Big(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_0^2}\Big) \pm \sqrt{\frac{\omega_n^4}{4}\Big(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_0^2}\Big)^2 - \frac{\omega_n^4}{c_2^2 c_0^2} + \frac{\omega_n^2}{a^2}}.$$

Отсюда получаем четыре корня:

$$k_n^{1,2} = \pm i\lambda_n, \qquad k_n^{3,4} = \begin{cases} \pm\mu_n, & \omega_n^2 < 12c_2^2/h^2, \\ \pm i\mu_n, & \omega_n^2 > 12c_2^2/h^2, \end{cases}$$

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\omega_n^2}{2}\Big(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_0^2}\Big) + \sqrt{\frac{\omega_n^4}{4}\Big(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_0^2}\Big)^2 - \frac{\omega_n^4}{c_2^2 c_0^2} + \frac{\omega_n^2}{a^2}}},$$

$$\mu_n = \sqrt{\Big|\sqrt{\frac{\omega_n^4}{4}\Big(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_0^2}\Big)^2 - \frac{\omega_n^4}{c_2^2 c_0^2} + \frac{\omega_n^2}{a^2}} - \frac{\omega_n^2}{2}\Big(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_0^2}\Big)\Big|}.$$

С учетом симметрии задачи относительно оси Oy найдем четные функции $W_n(x)$ и соответствующие им нечетные функции $\beta_n(x)$. Тогда при $\omega_n^2 < 12c_2^2/h^2$ имеем представление

$$W_n(x) = a_n\cos(\lambda_n x) + b_n\operatorname{ch}(\mu_n x), \qquad \beta_n(x) = c_n\sin(\lambda_n x) + d_n\operatorname{sh}(\mu_n x), \tag{4.3}$$

а при $\omega_n^2 > 12c_2^2/h^2$ — представление

$$W_n(x) = a_n \cos(\lambda_n x) + b_n \cos(\mu_n x), \qquad \beta_n(x) = c_n \sin(\lambda_n x) + d_n \sin(\mu_n x). \tag{4.4}$$

Подставляя выражения (4.3), (4.4) в систему (4.1), находим

$$c_n = a_n(\omega_n^2/c_2^2 - \lambda_n^2)/\lambda_n, \qquad d_n = \begin{cases} b_n(\omega_n^2/c_2^2 + \mu_n^2)/\mu_n, & \omega_n^2 < 12c_2^2/h^2, \\ b_n(\omega_n^2/c_2^2 - \mu_n^2)/\mu_n, & \omega_n^2 > 12c_2^2/h^2. \end{cases}$$

Коэффициенты a_n, b_n и собственные частоты ω_n определяются из краевых условий (3.1). Ненулевое решение системы возможно только в том случае, если определитель системы обращается в нуль. Тогда получаем

$$b_n = \begin{cases} -a_n \cos(\lambda_n l)/\operatorname{ch}(\mu_n l), & \omega_n^2 < 12c_2^2/h^2, \\ -a_n \cos(\lambda_n l)/\cos(\mu_n l), & \omega_n^2 > 12c_2^2/h^2. \end{cases}$$

При этом собственные частоты определяются уравнениями

$$\frac{\omega_n^2/c_2^2 + \mu_n^2}{\mu_n} \operatorname{th}(\mu_n l) - \frac{\omega_n^2/c_2^2 - \lambda_n^2}{\lambda_n} \operatorname{tg}(\lambda_n l) = 0, \qquad \omega_n^2 < \frac{12c_2^2}{h^2}; \tag{4.5}$$

$$\frac{\omega_n^2/c_2^2 - \mu_n^2}{\mu_n} \operatorname{tg}(\mu_n l) - \frac{\omega_n^2/c_2^2 - \lambda_n^2}{\lambda_n} \operatorname{tg}(\lambda_n l) = 0, \qquad \omega_n^2 > \frac{12c_2^2}{h^2}. \tag{4.6}$$

В [9] показано, что собственные функции удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{-l}^{l} [\rho h W_n(x) W_m(x) + \rho I \beta_n(x) \beta_m(x)]\, dx = B_m \delta_{nm},$$

$$\int_{-l}^{l} \Big(EI \,\frac{\partial \beta_n}{\partial x}\, \frac{\partial \beta_m}{\partial x} + Gh(W_n' - \beta_n)(W_m' - \beta_m) \Big)\, dx = \omega_m^2 B_m \delta_{nm},$$

$$B_m = \int_{-l}^{l} [\rho h W_m^2(x) + \rho I \beta_m^2(x)]\, dx.$$

Решение задачи будем искать в виде

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t) W_k(x), \qquad \beta(x,t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t) \beta_k(x).$$

Отметим, что в разложениях для $w(t)$ и $\beta(t)$ коэффициенты $A_k(t)$ одни и те же. Имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} A_k'(t) W_k(x) + l' \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\, \frac{\partial W_k}{\partial l},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{N} A_k''(t) W_k(x) + 2l' \sum_{k=1}^{N} A_k'(t)\, \frac{\partial W_k}{\partial l} + l'' \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\, \frac{\partial W_k}{\partial l} + l'^2 \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\, \frac{\partial^2 W_k}{\partial l^2},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} A_k'(t) \beta_k(x) + l' \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\, \frac{\partial \beta_k}{\partial l},$$

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}=\sum_{k=1}^N A_k''(t)\beta_k(x)+2l'\sum_{k=1}^N A_k'(t)\,\frac{\partial\beta_k}{\partial l}+l''\sum_{k=1}^N A_k(t)\,\frac{\partial\beta_k}{\partial l}+l'^2\sum_{k=1}^N A_k(t)\,\frac{\partial^2\beta_k}{\partial l^2},$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^N A_m'^2(t)B_m+l'\sum_{k,m=1}^N C_{mk}A_k(t)A_m'(t)+\frac{l'^2}{2}\sum_{k,m=1}^N D_{mk}A_k(t)A_m(t),$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^N A_m^2(t)\omega_m^2B_m.$$

Здесь

$$C_{mk}=\int\limits_{-l}^{l}\Big(\rho hW_m(x)\,\frac{\partial W_k}{\partial l}+\rho I\beta_m(x)\,\frac{\partial\beta_k}{\partial l}\Big)\,dx,$$

$$D_{mk}=\int\limits_{-l}^{l}\Big(\rho h\,\frac{\partial W_m}{\partial l}\,\frac{\partial W_k}{\partial l}+\rho I\,\frac{\partial\beta_m}{\partial l}\,\frac{\partial\beta_k}{\partial l}\Big)\,dx.$$

Подставим эти выражения в уравнения движения балки и умножим первое уравнение на $W_m(x)$, второе — на $\beta_m(x)$, проинтегрируем их по x и сложим. В результате с учетом соотношений ортогональности получим

$$[A_m''(t)+\omega_m^2A_m]B_m+2l'\sum_{k=1}^N C_{mk}A_k'(t)+l''\sum_{k=1}^N C_{mk}A_k(t)+l'^2\sum_{k=1}^N G_{mk}A_k(t)=PU_m, \qquad (4.7)$$

где

$$U_m=\int\limits_{-l}^{l}W_m(x)\,dx,\qquad G_{mk}=\int\limits_{-l}^{l}\Big(\rho hW_m(x)\,\frac{\partial^2W_k}{\partial l^2}+\rho I\beta_m(x)\,\frac{\partial^2\beta_k}{\partial l^2}\Big)\,dx.$$

Уравнение баланса энергии принимает вид

$$P\sum_{k=1}^N\Big(A_k'U_k+l'A_k\,\frac{\partial U_k}{\partial l}\Big)=\sum_{m=1}^N(A_m''+\omega_m^2A_m)A_m'B_m+$$
$$+\frac{l'}{2}\sum_{m=1}^N\Big(A_m'^2\,\frac{\partial B_m}{\partial l}+A_m^2\,\frac{\partial\,(\omega_m^2B_m)}{\partial l}\Big)+l''\sum_{k,m=1}^N C_{mk}A_kA_m'+l'^2\sum_{k,m=1}^N\frac{\partial C_{mk}}{\partial l}\,A_kA_m'+$$
$$+l'\sum_{k,m=1}^N C_{mk}(A_k'A_m'+A_kA_m'')+l'l''\sum_{k,m=1}^N D_{mk}A_kA_m+\frac{l'^3}{2}\sum_{k,m=1}^N\frac{\partial D_{mk}}{\partial l}\,A_kA_m+$$
$$+l'^2\sum_{k,m=1}^N D_{mk}A_kA_m'+4\gamma l'\theta(l'). \qquad (4.8)$$

Умножим уравнение (4.7) на A'_m и просуммируем по m. Полученное уравнение вычтем из (4.8). С учетом соотношения $\partial C_{mk}/\partial l = G_{mk} + D_{mk}$ находим

$$P\sum_{m=1}^{N} A_m \frac{\partial U_m}{\partial l} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\Big(A'^2_m \frac{\partial B_m}{\partial l} + A^2_m \frac{\partial(\omega^2_m B_m)}{\partial l}\Big) + 2l'\sum_{k,m=1}^{N} D_{mk}A_kA'_m +$$
$$+\sum_{k,m=1}^{N} C_{mk}(A_kA''_m - A'_kA'_m) + l''\sum_{k,m=1}^{N} D_{mk}A_kA_m + \frac{l'^2}{2}\sum_{k,m=1}^{N}\frac{\partial D_{mk}}{\partial l}A_kA_m + 4\gamma\theta(l').$$

Подставив в это уравнение выражение для A''_m из (4.7), получаем уравнение распространения трещины в виде

$$l''\sum_{k,m=1}^{N} F_{mk}A_kA_m = P\sum_{k=1}^{N} A_k\Big(\frac{\partial U_k}{\partial l} - \sum_{m=1}^{N}\frac{C_{mk}U_m}{B_m}\Big) -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\Big(A'^2_m \frac{\partial B_m}{\partial l} + A^2_m \frac{\partial(\omega^2_m B_m)}{\partial l}\Big) + \sum_{k,m=1}^{N} C_{mk}\omega^2_m A_kA_m + \sum_{k,m=1}^{N} C_{mk}A'_kA'_m -$$
$$-2l'\sum_{k,m=1}^{N} F_{mk}A_kA'_m - \frac{l'^2}{2}\sum_{k,m=1}^{N} H_{mk}A_kA_m - 4\gamma\theta(l'), \qquad (4.9)$$

$$F_{mk} = D_{mk} - \sum_{j=1}^{N}\frac{C_{jk}C_{jm}}{B_j}, \qquad H_{mk} = \frac{\partial D_{mk}}{\partial l} - 2\sum_{j=1}^{N}\frac{C_{jk}G_{jm}}{B_j}.$$

Выражения для коэффициентов матриц достаточно громоздки и здесь не приводятся. Производная $\partial\omega^2_n/\partial l$ вычисляется дифференцированием уравнений (4.5), (4.6), далее с ее помощью вычисляются остальные производные.

Из начальных условий (3.2) следует

$$A_m(0) = A'_m(0) = 0, \qquad l(0) = l_0, \qquad l'(0) = 0. \qquad (4.10)$$

Таким образом, для расчета движения балки имеем уравнения (4.7), (4.9), неравенство (1.3) и начальные условия (4.10). Эта система нелинейных уравнений второго порядка сводится к системе уравнений первого порядка и вместе с неравенством (1.3) решается методом Рунге — Кутты четвертого порядка [6]. Как и для балки Эйлера, для единственности решения системы необходимо, чтобы выполнялось неравенство $R = \sum_{j=1}^{N} F_{mk}A_mA_k \geqslant \varepsilon > 0$. Первый шаг по времени рассчитывается при фиксированных границах трещины. На следующих шагах по времени величина $R(t)$ контролировалась и в проведенных расчетах была положительной. Результаты расчетов с различным числом мод (5, 10, 19) хорошо согласуются.

5. Численные результаты. В качестве примера рассмотрим деревянную балку со следующими параметрами: $E = 10^9$ Н/м^2, $\nu = 0{,}3$, $\rho = 500$ кг/м^3, $l_0 = 0{,}3$ м. Плотность поверхностной энергии клеевого слоя принята равной 0,5 Н/м. Толщина балки 0,02 и 0,03 м, величина приложенной нагрузки меняется в пределах $P = 500 \div 900$ Н/м^2 для балки толщиной 0,02 м и $P = 1100 \div 1500$ Н/м^2 для балки толщиной 0,03 м.

Поскольку действующая нагрузка постоянна во времени, можно вычислить критическую нагрузку, используя теорию равновесных трещин Баренблатта [10]. В работах [1, 5] рассмотрена трещина, распространяющаяся в балке Эйлера (расслоение этой балки). Для балки Эйлера в [5] с помощью теории [10] получено условие роста трещины для стационарной задачи, а в [1] с помощью принципа наименьшего действия — для нестационарной задачи. Эти условия одни и те же. В рассматриваемом случае с учетом того, что балка одна и содержит трещину с двумя концами, это условие принимает вид

$$M(l,t) = EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 2\sqrt{\gamma EI}. \tag{5.1}$$

В [1] отмечено, что в балочном приближении условие (5.1) играет ту же роль, что и условие конечности напряжений Баренблатта [10].

Решение статической задачи об изгибе балки Эйлера имеет вид

$$w(x) = P(x^2 - l_0^2)^2/(24EI).$$

Из (5.1) получаем условие роста трещины

$$P > P_0 = 6\sqrt{\gamma EI}/l_0^2.$$

Для балки толщиной 0,02 м $P_0 \simeq 1217$ Н/м^2. Решение нестационарной задачи с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$w(x,t) = \frac{P}{EI}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k}{\lambda_k^4 B_k}\,[1 - \cos(\omega_k t)]W_k(x), \qquad \omega_k^2 = \frac{EI\lambda_k^4}{\rho h},$$

где U_k, B_k определяются выражениями (2.3), (2.5)–(2.7). Из (5.1) получаем условие роста трещины $P > P_m$. Для балок толщиной 0,02 и 0,03 м $P_m \simeq 600$, 1103 Н/м соответственно.

В [3] для балки Тимошенко получено условие в конце трещины, обеспечивающее ее рост. В рассматриваемом случае это условие имеет вид

$$K \equiv \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\frac{c_2^2}{a^2}\Big[1 - \frac{1}{c_2^2}\Big(\frac{dl}{dt}\Big)^2\Big] + \Big(\frac{\partial \beta}{\partial x}\Big)^2\Big[1 - \frac{1}{c_0^2}\Big(\frac{dl}{dt}\Big)^2\Big] = \frac{4\gamma}{EI}. \tag{5.2}$$

Численные расчеты нестационарной задачи по приведенному алгоритму показали следующее. При нагрузке $P = 600$ Н/м трещина не росла, движение балки соответствовало решению задачи с фиксированными концами трещины. Для обеих моделей балки незначительный рост трещины начинался при нагрузке $P = 615$ Н/м. При умеренной сверхкритической нагрузке рост трещины имел скачкообразный характер: периоды роста трещины чередовались с периодами ее остановки. Достигнув некоторой длины, при которой заданная нагрузка уже не является сверхкритической, трещина прекращала расти. Так, при нагрузке $P = 700$ Н/м трещина росла и в случае балки Эйлера, и в случае балки Тимошенко. Наиболее существенное увеличение длины трещины произошло в течение 0,01 с, затем имели место небольшие периоды роста, в которые длина трещины увеличивалась незначительно. В случае балки Эйлера рост трещины продолжался в течение 0,615 с, ее конечная длина составляла 0,321 м. Для балки Тимошенко время роста трещины 0,898 с, конечная длина 0,322 м.

При большой сверхкритической нагрузке в расчетах наблюдается интенсивный неограниченный рост трещины. Однако линейная модель балки применима лишь при ее малых прогибах, т. е. на начальной стадии роста трещины, в дальнейшем необходимо использовать нелинейную модель. Так, при приложении нагрузки $P = 800$ Н/м для обеих моделей балки длина трещины начала увеличиваться, затем движение ее прекратилось, после чего начался интенсивный рост трещины. При приложении нагрузки $P = 900$ Н/м сразу начался интенсивный рост трещины. Смена типов решений, соответствующих ограниченному и неограниченному росту трещины, в случае балки Эйлера произошла при нагрузке $P = 779$ Н/м, в случае балки Тимошенко — при $P = 778$ Н/м.

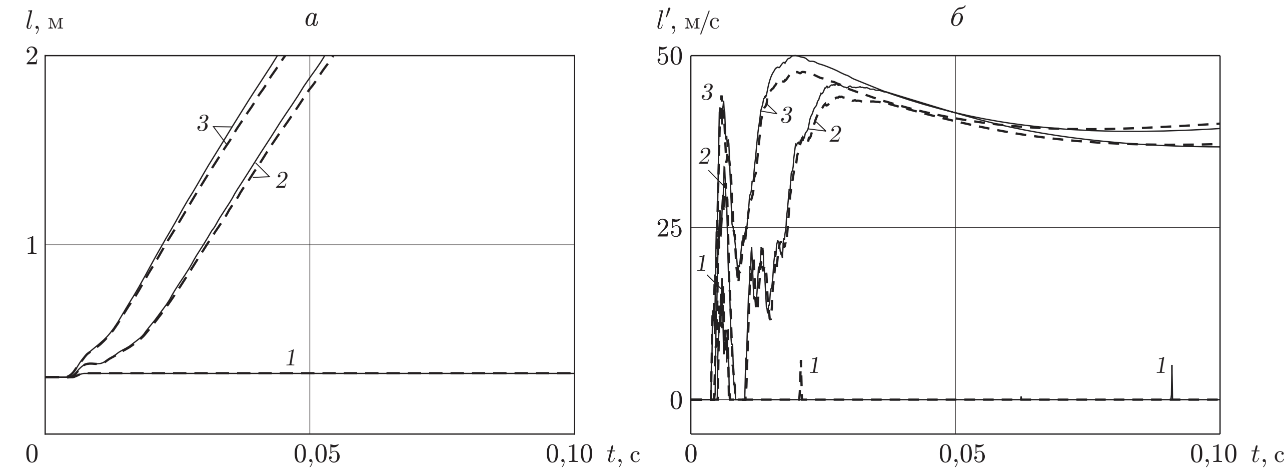

Рис. 2. Зависимости $l(t)$ (a) и $l'(t)$ ($б$) при различных значениях нагрузки:
сплошные линии — балка Эйлера; штриховые линии — балка Тимошенко; *1* — $P =$ 700 Н/м; *2* — $P = 800$ Н/м; *3* — $P = 900$ Н/м

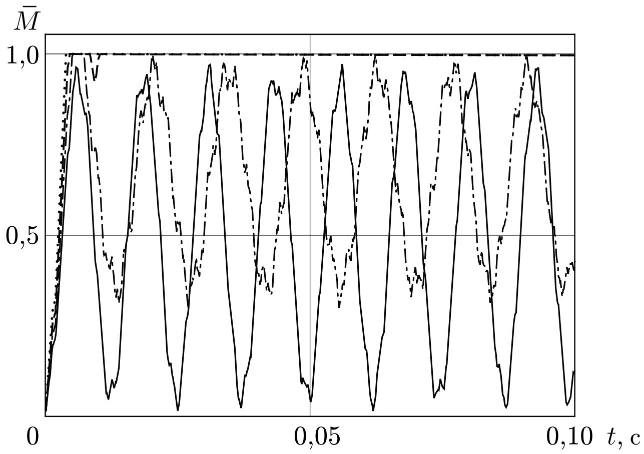

Рис. 3

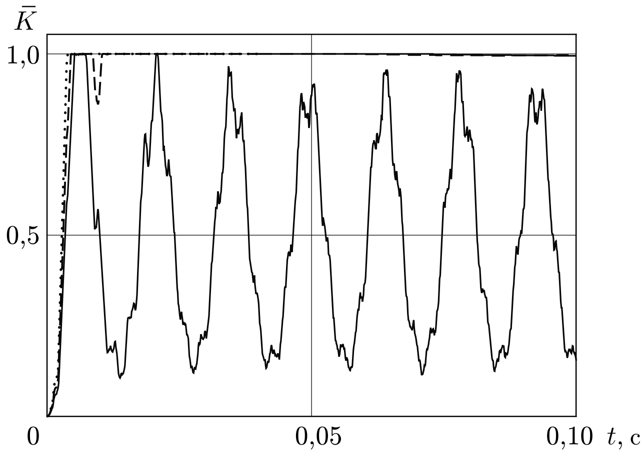

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость безразмерного момента $\bar{M}$ от времени при различных значениях нагрузки:
сплошные линии — $P = 600$ Н/м; штрихпунктирные — $P = 700$ Н/м; штриховые — $P = 800$ Н/м; пунктирные линии — $P = 900$ Н/м

Рис. 4. Зависимость $\bar{K}(t)$ при различных значениях нагрузки:
сплошные линии — $P = 700$ Н/м; штриховые — $P = 800$ Н/м; пунктирные линии — $P = 900$ Н/м

На рис. 2 приведены зависимости $l(t)$ и $l'(t)$ при различных значениях нагрузки. Видно, что решения по обеим моделям балки (Эйлера и Тимошенко) хорошо согласуются. В [3] утверждается, что в случае балки Эйлера скорость распространения трещины может быть сколь угодно велика. Однако в рассмотренном примере и в других расчетах этого не наблюдалось. Более того, для моделей балки Эйлера и Тимошенко скорости распространения трещины близки, причем процесс роста трещины имеет скачкообразный характер.

На рис. 3 представлена зависимость приведенного изгибного момента в кончике трещины от времени $\bar{M}(t) = M(l,t)/(2\sqrt{\gamma EI}\,)$ для балки Эйлера, а на рис. 4 — зависимость

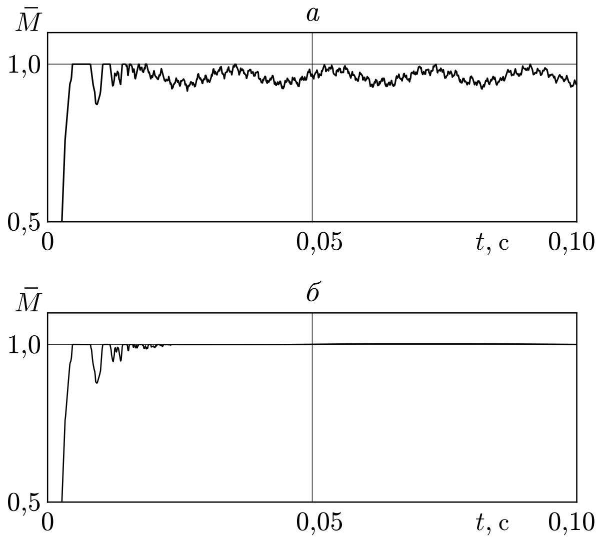

Рис. 5

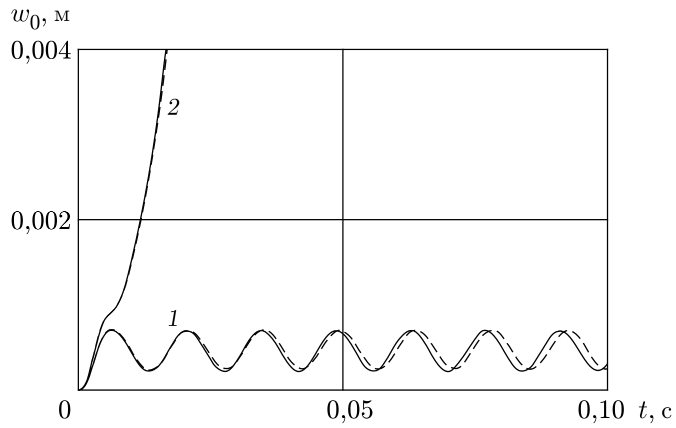

Рис. 6

Рис. 5. Зависимость $\bar{M}(t)$ для балки Эйлера:
а — $P = 778$ Н/м; *б* — $P = 779$ Н/м

Рис. 6. Зависимость прогиба балки в ее середине от времени $w_0(t) = w(0, t)$:
сплошные линии — балка Эйлера; штриховые — балка Тимошенко; *1* — $P = 700$ Н/м,
2 — $P = 900$ Н/м

величины $\bar{K} = KEI/(4\gamma)$ от времени для балки Тимошенко. Из рис. 2–4 следует, что в период роста трещины условия (5.1) для балки Эйлера и (5.2) для балки Тимошенко выполняются с большой точностью, хотя в алгоритм решения задачи эти условия не введены. На рис. 5 показаны зависимости $\bar{M}(t)$ при $P = 778$, 779 Н/м, на которых видна смена типов решений. Периодам роста трещины соответствуют значения $\bar{M} = 1$, периодам прекращения роста — значения $\bar{M} < 1$. При увеличении нагрузки значение $\bar{M}(t)$ приближается к единице.

На рис. 6 представлена зависимость прогиба балки в ее середине от времени $w_0(t) = w(0, t)$ при $P = 700$, 900 Н/м. При нагрузке $P = 700$ Н/м, несколько большей критической, движение балки имеет колебательный характер. При $P = 900$ Н/м — нагрузке, существенно превышающей критическую, — длина трещины и прогиб балки увеличиваются монотонно.

Аналогичные расчеты проведены для $h_0 = 0{,}03$ м, соответствующие кривые для моделей балки Эйлера и Тимошенко различаются незначительно. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что модель балки Эйлера может быть использована для расчета прочности облицовочных покрытий и балок.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Михайлов А. М.** Динамические задачи теории трещин в балочном приближении // ПМТФ. 1966. № 5. С. 167–172.
2. **Михайлов А. М.** Некоторые задачи теории трещин в балочном приближении // ПМТФ. 1967. № 5. С. 128–133.
3. **Михайлов А. М.** Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин // ПМТФ. 1969. № 3. С. 171–174.

4. **Михайлов А. М.** Распространение трещин скола в монокристаллах фтористого лития // ПМТФ. 1970. № 4. С. 119–122.
5. **Слепян Л. И.** Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981.
6. **Годунов С. К.** Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. М.: Наука, 1977.
7. **Петровский И. Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
8. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959.
9. **Jan Kvalswold.** Hydroelastic modelling of wetdeck slamming on multihull vessels: Dr. ingng thesis. Trondheim: Department of Marine Hydrodynamics The Norwegian Inst. of Technol., 1994.
10. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.

Поступила в редакцию 12/IV 2007 г.,
в окончательном варианте — 1/VIII 2007 г.