К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

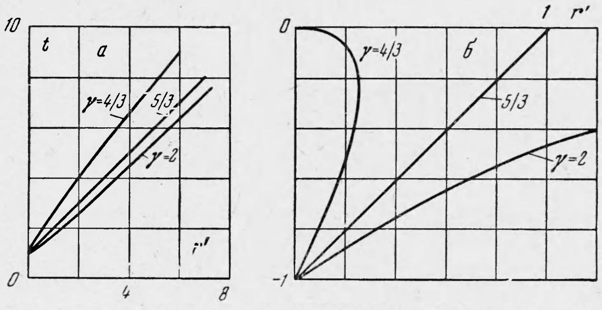
С. А. Холин (Москва)

За последнее время были исследованы вопросы устойчивости движения газа постоянной плотности в собственном поле тяготения [1-3]. Аналогичными способами можно исследовать поведение сферически-симметричной массы сжимаемого газа с постоянной по пространству плотностью без тяготения.

За основные параметры движения принимаем плотность ρ и скорость $\mathbf{u}$

$$\rho = \frac{\rho_0}{|t|^3}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{t}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — эйлеров радиус, ρ_0 — константа, $t \to +\infty$ при расширении, $t \to -0$ при сжатии. Это движение соответствует всестороннему расширению или сжатию; движение остается сферически - симметричным относительно любой точки пространства. В дальнейшем движение считается адиабатическим с показателем адиабаты $2 > \gamma > 1$ (реальный газ).



Фиг. 1

1. Сначала полезно качественно обсудить причину появления неустойчивости. При наличии тяготения основная причина неустойчивости — сила тяжести; и давление, и вязкость способны только ослаблять неустойчивость (в ньютоновской теории).

При отсутствии тяготения причиной неустойчивости является кинематика. Оказывается, всякое движение сжимаемого вещества с постоянной по пространству плотностью

$$\rho = \frac{\mathrm{const}}{t^\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

обладает следующей особенностью. Если в отдельной области пространства реализуется то же движение, но с опережением во времени,

$$\rho' = \frac{\mathrm{const}}{|t+\Delta|^\alpha} \qquad (\Delta > 0, \ |t| > \Delta)$$

(пренебрегая областью сшивания решений, Δ — мало), то

$$\frac{\rho' - \rho}{\rho} = -\frac{\Delta}{t}\alpha$$

При сжатии ($t \to -0$) опережающее решение начинает убегать от основного. Если опережающее решение рассматривать как возмущение на основном решении (такие возмущения рассматривал Я. Б. Зельдович в [3]), то поведение его существенно зависит от уравнения состояния.

Качественно это следует из того, что в задаче есть две скорости: Эйлера $\mathbf{u} = \mathbf{r} / t$, зависящая от радиуса, и скорость звука c — постоянная по пространству

$$c \sim \rho^{1/2(\gamma-1)}, \qquad c = c_0 t^{-3/2(\gamma-1)}, \qquad c_0 = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

Если в какой-либо точке пространства есть сферически-симметричное возмущение, то всегда можно выбрать его центр за начало системы координат. Если к тому же пренебречь его начальными размерами, то при расплывании возмущения в плоскости r, t траекторией его границы будет кривая

$$r = \pm \frac{c_0}{{}^3/_2(\gamma - 1)}\left[|t|^{3/2(5/3-\gamma)} - At\right] \qquad (A = \mathrm{const}) \tag{1.2}$$

Здесь знаки плюс и минус соответствуют сжатию и расширению соответственно. Из этого примера и фигуры (где $r' = {}^3/_2(\gamma - 1)\, c_0^{-1} r$) видно, что при $\gamma < {}^5/_3$ сжатие неустойчиво, с другой стороны, расширение носит такой характер, что при $t \to +\infty$ возмущение оказывается размазанным по конечной массе ($M \sim r^3 / t^3$), т. е. $\rho^{-1}\delta\rho \to \mathrm{const}$.

2. Приведем более точный анализ. Возмущенное движение представим в виде

$$\rho = \frac{\rho_0}{|t|^3}[1 + \omega(r, t)], \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{t}[1 + V(r, t)] \tag{2.1}$$

Если перейти к лагранжевым координатам (масса $\sim \rho r^3 \sim r^3 / t^3$, $R = r / t$), то легко написать уравнения непрерывности и Навье—Стокса (2.2)

$$t \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (VR^3) = 0, \quad t \frac{\partial V}{\partial t} + V = \frac{c^2}{R} \frac{\partial \omega}{\partial R} + \frac{4}{3} \eta \frac{|t|^3}{\rho_0 t} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{4}{R} \frac{\partial V}{\partial R} \right]$$

Первое уравнение указывает, что если на радиусе R_1 еще нет возмущения, то

$$\int_0^{R_1} \omega R^2 dR = \text{const} \tag{2.3}$$

Комбинируя уравнения (2.2) и (2.3), можно получить уравнение для $\omega (R, t)$. Решение этого уравнения разложим в ряд (или в интеграл, в зависимости от граничных условий)

$$\omega (R, t) = \sum_k \omega (kt) \frac{\sin kR}{kR}$$

Функция $\omega (k, t)$ удовлетворяет уравнению

$$t^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2t \left(1 + \frac{2}{3} \eta \frac{|t|^3}{\rho_0 t} k^2 \right) \frac{\partial \omega}{\partial t} + c^2 k^2 \omega = 0 \tag{2.4}$$

Вязкость газа пропорциональна $\sqrt{T}$, где T — температура, т. е.

$$\eta \sim T^{1/2} \sim \rho^{1/2(\gamma-1)} \sim t^{-3/2(\gamma-1)}$$

Очевидно, что для любой длины волны при сжатии найдется такой момент времени, начиная с которого вязкостью можно пренебречь, а при расширении вязкостью можно пренебречь в моменты, близкие к возникновению возмущения. Поэтому можно рассматривать движение без вязкости. Тогда уравнение перейдет в уравнение Бесселя ($c^2 = c_0^2 \, |t|^{-3(\gamma-1)}$). Его решение ($\gamma \neq 1$)

$$\omega (k, t) = |t|^{1/2} \{ C_1 J_\nu (x) + C_2 J_{-\nu} (x) \}$$

где

$$\nu = \frac{1}{3(\gamma - 1)}, \qquad x = \frac{2c_0 |k|}{3(\gamma - 1)} |t|^{-3/2(\gamma-1)} \quad \text{при } t \to -0 \tag{2.5}$$

$$\omega (k, t) \to |t|^{3/4(\gamma - 5/3)} \cos [x \mp 1/2 \pi \nu - 1/4 \pi] \tag{2.6}$$

Отсюда видно, что при сжатии, если $\gamma < 5/3$, движение неустойчиво. Амплитуда стоячей волны, колеблясь, растет. Если $\gamma > 5/3$ — движение устойчиво. Амплитуда стоячей волны убывает.

В случае расширения в момент, близкий к моменту возникновения возмущения (t возрастает, оставаясь еще близким к $+0$), картина обратная. Движение с $\gamma < 5/3$ устойчиво, с $\gamma > 5/3$ — неустойчиво. При расширении, когда $t \to +\infty$

$$\omega (k, t) \to \text{const} \tag{2.7}$$

возмущение стремится к конечному значению. Таким образом, результаты точного рассмотрения полностью подтверждают качественный анализ.

Движение может быть неустойчивым. Неустойчивость определяется уравнением состояния и не зависит от длины волны (при $\gamma \neq 1$).

В изотермическом случае ($\gamma = 1$) в пренебрежении вязкостью уравнение (2.4) имеет решение

$$\omega (k, t) = C_1 t^{\alpha_1} + C_2 t^{\alpha_2}, \qquad \alpha_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - C^2 - k^2}$$

Здесь C_1 и C_2 — константы, когда α — комплексно, то $C_1 = C_2^*$. В изотермическом случае движение неустойчиво, и рост амплитуды, в отличие от общего случая, зависит от длины волны.

Во всех случаях при расширении на больших временах начинает играть роль вязкость, которая, как видно из (2.4), обеспечивает затухание.

Поступила 9 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц Е. М. О гравитационной устойчивости расширяющегося мира. Ж. эксперим. и теор. физ., 1946, т. 16, стр. 587.
2. Bonnor W. B. Jean's formula for gravitational instability. Monthly Not. R. A. S., 1957, vol. 117, p. 104.
3. Зельдович Я. Б. Образование звезд и галактик в расширяющейся вселенной. Вопросы космологии, 1963, т. 9, стр. 240.