УДК 539.393

Ю.А. Боган

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Данная работа — это продолжение [1]. В ней рассмотрены еще один вариант задачи Синьорини и краевые задачи теории упругости для цилиндра с гофрированной быстроосциллирующей боковой поверхностью. Изученный здесь вариант задачи Синьорини, когда ограничение задано на боковой поверхности цилиндрической области, а напряжения равны нулю на плоскостях $x_3 = \text{const}$, представляет интерес ввиду ее некоэрцитивности. В настоящей работе в некоторой степени усилен один результат из [2]. При изучении тела с быстроосциллирующей боковой поверхностью принято, что граничные условия — это цилиндр, зажатый в жесткую обойму. Показано, что быстрая осцилляция границы приводит к тому, что в краевых условиях предельной задачи появляется множитель Γ — отношение длины невозмущенной части границы к длине возмущенной. При этом граничные условия на боковой поверхности должны быть достаточно специфичными. Подобного рода зависимость отсутствует, например, при нулевых смещениях на боковой поверхности.

1. Напомним постановку задачи из [1]. Рассматривается упругий трансверсально-изотропный цилиндр $Q = \omega \times (-h/2, h/2)$, где ω — ограниченная область на плоскости с достаточно гладкой границей γ. Пусть E — модуль Юнга в плоскости изотропии материала $x_3 = \text{const}$, E' — модуль Юнга в ортогональной плоскости. В качестве малого параметра ε возьмем квадратный корень из отношения E/E'. В реальной физической ситуации параметр ε мал для упругого цилиндра, армированного в направлении вертикальной оси семейством борных или углеродных волокон, осевой модуль Юнга которых значительно выше модуля Юнга в окружном направлении.

Разделим напряжения на модуль Юнга E, сохранив для безразмерных напряжений прежние обозначения, и по закону Гука выразим напряжения через деформации:

$$\sigma_{11} = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{22} + a_{13}e_{33},\ \sigma_{12} = 2(1+\nu)^{-1}e_{12},$$
$$\sigma_{22} = a_{12}e_{11} + a_{11}e_{22} + a_{13}e_{33},\ \sigma_{13} = 2b\varepsilon^{-2}e_{13},$$
$$\sigma_{33} = a_{13}(e_{11} + e_{22}) + a_{33}\varepsilon^{-2}e_{33},\ \sigma_{23} = 2b\varepsilon^{-2}e_{23}.$$

Здесь

$$a_{11} = (1-\mu^2\varepsilon^2)(1+\nu)^{-1}a_0^{-1};\ a_{12} = (\nu + \mu^2\varepsilon^2)(1+\nu)^{-1}a_0^{-1};$$
$$a_{13} = \mu a_0^{-1};\ a_{33} = (1-\nu)a_0^{-1};\ a_0 = 1 - \nu - 2\mu^2\varepsilon^2;$$
$$e_{ij} = 2^{-1}(u_{i,j} + u_{j,i})(i,j = 1,2,3, u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j)$$

(по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3); $b = E'/G'$ — отношение модуля Юнга E' к модулю сдвига G' в направлении, ортогональном плоскости изотропии; ν — коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; μ — побочный коэффициент Пуассона; $u_k(k = 1,2,3)$ — перемещения. Из положительности потенциальной энергии деформации следует, что $0 < \nu < 1$, $a > 0$, $b > 0$.

В [1] для системы уравнений теории упругости была изучена смешанная задача

$$-\sigma_{ij,j} + f_i = 0,\ f_i \in L^2(Q),\ i = 1,2,3,$$
$$\sigma_{i3}|_{x_3} = \pm h/2 = 0,\ u_i|_{\gamma \times (-h/2, h/2)} = 0$$

и доказано, что ее решение слабо сходится в H^1 к задаче растяжения — сжатия и изгиба изотропной пластины. В дальнейшем, чтобы учесть зависимость решения от параметра ε, будем отмечать напряжения и перемещения вверху индексом ε, обозначая при этом через σ_{ij}^0, u_i^0 напряжения и перемещения в предельной задаче. Положим

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = 2^{-1}\int_Q \sigma_{ij}(u^\varepsilon)e_{ij}(v)dx.$$

2. Рассмотрим вариант задачи Синьорини с заданным ограничением на боковой поверхности цилиндра. Пусть в $W = [H^1(Q)]^3$ задан замкнутый выпуклый конус K_1:

$$K_1 = \{u \in W;\ u_n \leqslant 0 \text{ на } S = \gamma \times (-h/2, h/2)\}.$$

Изучим асимптотическое поведение при $\varepsilon \to +0$ решения вариационного неравенства

(2.1) $$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v - u^\varepsilon) \geqslant (f, v - u^\varepsilon)\ \forall\, v \in K_1.$$

Квадратичная форма $a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon)$ некоэрцитивна на K_1. Для существования минимума функционала

$$J(u^\varepsilon) = a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) - F(u^\varepsilon),\ F(u^\varepsilon) = \int_Q f_k u_k^\varepsilon dx$$

на K_1 по теореме 10.1 из [3] необходимо, чтобы выполнялось условие

(2.2) $$F(\rho) \leqslant 0\ \forall\, \rho \in R',\ R' = R \cap K_1$$

(R — пространство жестких перемещений). Если условие (2.2) выполняется в сильном смысле, т.е. знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\rho \in R^*$ (R^* — подмножество R', образованное двусторонними перемещениями, т.е. такими, что как ρ, так и $-\rho$ совместимы с наложенными на тело связями), то $J(u^\varepsilon)$ имеет абсолютный минимум на K_1. Напомним необходимую в дальнейшем теорему 1.4 из [4].

Теорема. *Пусть $\|u\|'$ — полунорма на гильбертовом пространстве H,*

$$K = \{u \in H;\ \|u\|' = 0,\ \dim R < \infty\}.$$

Предположим, что

$$C_1\|u\| \leqslant \|u\|' + \|P_R u\| \leqslant C_2\|u\|$$

(P_R — оператор ортогонального проектирования на R). Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество и $\mathscr{P}$ — оператор штрафа. Предположим, что дифференциал $\mathscr{P}$ положительно однороден, т.е. $D\mathscr{P}(tu,h) = tD\mathscr{P}(u,h)$ для любого $t > 0$. Пусть $f \in H$, $K \cap R \neq \{0\}$ и $-(f,h) > 0$ при $h \in K \cap R$, $h \neq 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\|u\|'^2 + \mathscr{P}(u) - (f,u) \geqslant C_1\|u\| - C_2.$$

Рассмотрим вопрос о предельном переходе при $\varepsilon \to +0$ в неравенстве (2.1). Как и в § 2 из [1], свяжем с (2.1) задачу с штрафом:

(2.3) $$a^\varepsilon(u^{\varepsilon,\eta}, v) + \eta^{-1}\int_S [u_n^{\varepsilon,\eta}]^+ v_n dS = \int_Q fv dx.$$

Ее решение определено с точностью до поля жестких смещений:

$$\rho_1 = a + \gamma x_2 - \beta x_3,\ \rho_2 = b - \gamma x_1 + \alpha x_3,\ \rho_3 = c + \beta x_1 - \alpha x_2.$$

Для задачи (2.3) справедлива оценка

$$a^\varepsilon(u^{\varepsilon,\eta}, u^{\varepsilon,\eta}) \geqslant C\|u^{\varepsilon,\eta}\|_W^2 - C_2.$$

Действительно, если положить

$$\mathscr{P}(u) = 2^{-1}\int_S ([u^{\varepsilon,\eta}]^+)^2 dS,\ (f, u) = \int_Q f_k u_k dx,$$

$$\| u \|' = (\int_Q e_{ij}(u) e_{ij}(u) dx)^{1/2},$$

то приведенная выше теорема позволяет получить требуемую оценку, так как тогда сохраняются оценки (1.6) из [1]. Поэтому из последовательности $u^{\varepsilon,\eta}$ можно выделить слабосходящуюся в W к элементу $u^{0,\eta}$ подпоследовательность (для которой сохраним прежнее обозначение). Ввиду сильной компактности следов в $L^2(S)$ член с штрафом сходится к выражению

$$h\eta^{-1} \int_\gamma [g_1^\eta n_1 + g_2^\eta n_2]^+ (\psi_1 n_1 + \psi_2 n_2) ds + \frac{h^3}{12} \frac{1}{\eta} \int_\gamma \left(\frac{\partial u_3^{0,\eta}}{\partial n} \right)^+ \frac{\partial v_3}{\partial n} ds.$$

Здесь ds — элемент длины дуги. Условия разрешимости исходной задачи (2.1) при этом трансформируются: на S имело место неравенство

$$\rho_k n_k |_S \leqslant 0,$$

откуда следует, что в формулах для жестких смещений $\alpha = \beta = 0$ (ввиду произвола по x_3), и тогда

$$\rho_1 = a + \gamma x_2, \rho_2 = b - \gamma x_1, \rho_3 = c.$$

Проинтегрировав по x_3 в условии разрешимости

$$\int_Q (f_1 \rho_1 + f_2 \rho_2 + f_3 \rho_3) dx \leqslant 0,$$

получим, что для разрешимости предельной задачи необходимо

$$\int_\omega [\langle f_1 \rangle (a + \gamma x_2) + \langle f_2 \rangle (b - \gamma x_1) + c \langle f_3 \rangle] \, dx \leqslant 0,$$

и потому

$$\int_\omega [\langle f_1 \rangle (a + \gamma x_2) + \langle f_2 \rangle (b - \gamma x_1)] dx' \leqslant 0,$$

$$\int_\omega \langle f_3 \rangle dx' = 0, \; dx' = dx_1 dx_2.$$

Предельный переход при $\eta \to +0$ обосновывается известными способами [5]. При этом происходит расщепление исходного вариационного неравенства на два: первое имеет вид

$$d(g, g - \psi) \geqslant (\langle f \rangle, g - \psi) \; \forall \, \psi \in K_2, \tag{2.4}$$

где K_2 — замкнутый выпуклый конус в $[H^1(\omega)]^2$, выделяемый условием $g_n|_\gamma \leqslant 0$, соответствующий двумерной задаче Синьорини (необходимое условие ее разрешимости выполнено), и второе

$$b(u_3^{0,0}, v_3 - u_3^{0,0}) \geqslant (\langle f_3 \rangle, v_3 - u_3^{0,0}) \; \forall \, v_3 \in K_3. \tag{2.5}$$

Здесь K_3 — замкнутый выпуклый конус в $H^2(\omega)$, выделяемый условием $\partial v_3 / \partial n|_\gamma \leqslant 0$; $b(u,v)$, $d(u,v)$ — билинейные симметричные формы, стоящие множителями при h и h^3 в формуле (1.9) из [1]. В (2.4), (2.5) $\langle f \rangle$ — среднее от f по толщине цилиндра.

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2.1. *При* $\varepsilon \to +0$ *функции* u_1^ε, u_2^ε, *являющиеся решением вариационного неравенства* (2.1), *слабо сходятся к решению вариационного неравенства* (2.4), *а* u_3^ε — *к решению неравенства* (2.5).

Отметим, что задача решения неравенства (2.5) изучалась в [2], где доказана его разрешимость в более сильных предположениях:

$$\int_\omega \langle f_3 \rangle x_k dx' = 0, \; k = 1,2, \; \int_\omega \langle f_3 \rangle dx' = 0$$

(ω — ограниченное выпуклое множество с регулярной границей). Уменьшение числа условий разрешимости связано с тем, что функция u_3^0 определена с точностью до константы. Из теоремы 2.1 вытекает, что выпуклость области также не является необходимой.

3. Рассмотрим еще один вариант граничных условий на боковой поверхности цилиндра. Пусть на S

(3.1)
$$\sigma_\tau = 0,\ \sigma_n + ku_n = 0,\ k > 0.$$

Механическая интерпретация граничных условий (3.1) [5] следующая: касательное напряжение обращается в нуль, тогда как нормальные силы являются силами упругой инерции и пропорциональны абсолютной величине нормального перемещения. Пусть V_1 — гильбертово пространство:

$$V_1 = \{v \in W;\ v_3|_S = 0,\ v_\tau|_S = 0\},$$
$$v_n = v_1 n_1 + v_2 n_2,\ v_\tau = -v_1 n_1 + v_2 n_1.$$

Положим

$$a_2^\varepsilon(u,v) = a^\varepsilon(u^\varepsilon,v) + k\int_S u_n^\varepsilon v_n dS.$$

Вариационная постановка задачи состоит в определении функции $u^\varepsilon \in W$, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$a_2^\varepsilon(u^\varepsilon,v) = (f,v)\ \forall\, v \in V_1.$$

Аналогично теореме 4.2 из [2] можно доказать, что существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что

$$a_2^\varepsilon(u^\varepsilon,u^\varepsilon) \geqslant \alpha \|u^\varepsilon\|_W^2 .$$

Поэтому данная задача имеет единственное решение, и для нее справедливы оценки (1.6) из [1]. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в члене

$$k\int_S u_n^\varepsilon v_n dS,$$

после интегрирования по x_3 получим выражение

(3.2)
$$kh\int_\gamma g_n\psi_n ds + \frac{kh^3}{12}\int_\gamma \frac{\partial u_3^0}{\partial n}\frac{\partial v_3}{\partial n}ds.$$

Положим

$$n_{11} = \varepsilon_{11}(g) + \nu\varepsilon_{22}(g), n_{22} = \nu\varepsilon_{11}(g) + \varepsilon_{22}(g), n_{12} = 2(1-\nu)\varepsilon_{12}(g),$$
$$M_1 = (1-\nu)\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 + \left(\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2}\right) n_2,$$
$$M_2 = -(1-\nu)\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} n_2 - \left(\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2}\right) n_1,$$
$$M_\tau = -M_1 n_2 + M_2 n_1.$$

Так как $u_3^0 \in H_0^1(\omega)$, формулу Грина для u_3^0 можно записать в виде

$$b(u_3^0,v) = (< f_3 >, v) - \left(M_\tau, \frac{\partial v_3}{\partial n}\right)\gamma.$$

Из (3.2) следует, что g_1, g_2 решают задачу: определить $g_1, g_2 \in H^1(\omega)$ из интегрального тождества

(3.3)
$$d(u,\psi) + kh\int_\gamma g_n\psi_n d\gamma = (< f_i >, \psi_i)\ \forall\, \psi \in V_1^0 ,$$

$$V_1^0 = \{v \in [H^1(\omega)]^2,\ v_\tau = -v_1 n_2 + v_2 n_1|_\gamma = 0\}.$$

При этом u_3^0 — это решение задачи

(3.4) $$b(u_3^0, v_3) + k\frac{h^3}{12}\int_\gamma \frac{\partial u_3^0}{\partial n}\frac{\partial v_3}{\partial n}d\gamma = (<f_3>, v_3)$$

$$\forall\ v_3 \in H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega),\ M_\tau - k\partial u_3^0/\partial n|_\gamma = 0.$$

Решения задач (3.2), (3.3) единственны.

Теорема 3.1. *При* $\varepsilon \to +0$ u_1^ε, u_2^ε *слабо сходятся в* W *к решению задачи* (3.3), *а* u_3^ε *— к решению задачи* (3.4).

4. Изучим задачу, аналогичную рассматриваемой в п. 3, в предположении, что боковая поверхность области гофрирована. Подобная задача с быстроосциллирующей границей рассматривалась в [2] для уравнения Лапласа. Отметим, что краевые задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела с гофрированной боковой поверхностью изучались в [6] методом регулярного возмущения границы, отличного от применяемого в данной работе.

Пусть $Q_\varepsilon = \omega_\varepsilon \times (-h/2, h/2)$, ω_0 — ограниченная область на плоскости с гладкой границей $\partial\omega_0$ и единичной внешней нормалью N. Обозначим через s криволинейную абсциссу кривой $\partial\omega_0$. В окрестности $\partial\omega_0$ s, N — криволинейные координаты на плоскости. В прямоугольных координатах y_1, y_2 рассмотрим гладкую периодическую функцию $y_2 = F(y_1)$ с периодом 1. Определим границу $\partial\omega_\varepsilon$ области ω_ε уравнением $N = \varepsilon \times F(s/\varepsilon)$($\varepsilon$ — малый положительный параметр). Предполагается, что малый параметр осцилляции границы совпадает с малым параметром анизотропии. Это непринципиально и принимается только для упрощения записи.

Рассмотрим ситуацию, когда отсутствует сингулярное возмущение в системе уравнений теории упругости ($\varepsilon = 1$ в обобщенном законе Гука). Положим, как в п. 3,

$$V_1 = \{v \in W;\ v_3|_{S_\varepsilon} = 0,\ v_\tau|_{S_\varepsilon} = 0,\ S_\varepsilon = \partial\omega_\varepsilon \times (-h/2, h/2)\}.$$

Вектор-функция u^ε определяется из интегрального тождества

(4.1) $$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) + k\int_{S_\varepsilon} u_n^\varepsilon v_n dS_\varepsilon = (f, v)\ \forall\ v \in V_1.$$

Как в [2], определим коэффициент «волнистости» Γ как отношение длины $\partial\omega_\varepsilon$ к длине $\partial\omega_0$.

Теорема 4.1. *Решение задачи* (4.1) *слабо сходится в* $[H^1(Q_0)]^3$ *к решению задачи*

$$a(u^0, v) + k\Gamma\int_{S_0} u_n^0 v_n dS_0 = (f, v)\ \forall\ v \in V_1,$$

$$S_0 = \partial\omega_0 \times (-h/2, h/2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8.1 из [2] и здесь опускается.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в системе уравнений присутствует сингулярное возмущение. Тогда член

$$k\int_{S_\varepsilon} u_n^\varepsilon v_n dS_\varepsilon$$

в формуле (4.1) по лемме 8.1 из [2] сходится к

$$kh\Gamma\int_\gamma g_n\psi_n d\gamma_0 + k\Gamma\frac{h^3}{12}\int_\gamma \frac{\partial u_3^0}{\partial n}\frac{\partial v_3}{\partial n}d\gamma_0$$

и предельные задачи для определения u_3^0, g_1, g_2 имеют вид (3.2), (3.3), где перед интегралом по γ следует ввести множитель Г.

Теорема 4.2. *Решение задачи* (4.1) *при наличии в системе уравнений сингулярного возмущения в пределе при* $\varepsilon \to +0$ *расщепляется на решения задач:*

$$d(g,\psi) + kh\Gamma\int_\gamma g_n\psi_n d\gamma = (\langle f_i\rangle, \psi_i)\ \forall \psi \in V_1^0, \tag{4.2}$$

$$V_1^0 = \{v \in [H^1(\omega)]^2,\ v_\tau = -v_1 n_2 + v_2 n_1|_\gamma = 0\};$$

$$b(u_3^0, v_3) + k\frac{h^3}{12}\Gamma \int_\gamma \frac{\partial u_3^0}{\partial n}\frac{\partial v_3}{\partial n} d\gamma = (\langle f_3\rangle, v_3) \tag{4.3}$$

$$\forall v_3 \in H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega),\ M_\tau - k\Gamma\, \partial u_3^0/\partial n|_\gamma = 0.$$

Сделаем ряд замечаний по поводу полученных выше результатов. Из формул (4.2) и (4.3) следует, что граничные условия исходной задачи при переходе к пределу трансформируются. Краевые условия предельной задачи содержат множитель Г. Это связано с тем, что граничные условия исходной задачи — цилиндр, зажатый в жесткую обойму. При деформировании граница распрямляется, что и приводит к изменению граничных условий. Подобного рода изменение граничных условий невозможно, например, при задании перемещений на боковой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боган Ю.А.** Некоторые вариационные задачи с малым параметром в теории упругости // Прикладная математика и механика. — 1985. — Т. 49, вып. 4. — С. 604—607.
2. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1983.
3. **Фикера Г.** Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1974.
4. **Necas J., Hlavacek I.** Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: an introduction. — Amsterdam a.o.: Elsevier, 1981.
5. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. — М.: Мир, 1980.
6. **Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.** Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. — Киев: Вища шк., 1982.

г. Новосибирск

Поступила 14/XII 1993 г.,
в окончательном варианте — 16/II 1994 г.