ПМТФ, № 3, 1974

УДК 532.5:532.135

К ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОТЫ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРУКТУРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

В. Е. Первушин

(Москва)

Рассматривается напорное структурное течение вязкопластичной жидкости в бесконечной круглой трубе с учетом диссипации энергии в предположении экспоненциальной зависимости пластичной вязкости и предельного напряжения сдвига от температуры.

Решение, полученное в предположении малости параметра, характеризующего интенсивность выделения тепла внутреннего трения, указывает на существенное влияние диссипации энергии на локальные характеристики течения и коэффициент гидравлического сопротивления, для которого приводится выражение, удобное в инженерных расчетах.

Исследование напорного установившегося структурного течения ньютоновских и неньютоновских жидкостей с учетом диссипации энергии и зависимости реологических характеристик жидкости от температуры проводилось в [1–7].

В [3] установлено существование критических градиентов давления, выше которых стационарный режим течения ньютоновской жидкости невозможен. В [4–6] была показана возможность гидродинамического теплового взрыва при течении ньютоновских [4] и неньютоновских жидкостей [5, 6].

Представляют интерес решения указанной задачи в области параметров, при которых существует устойчивый режим течения и теплообмена. При этом, чтобы не допустить значительной ошибки, необходимо принимать температурные зависимости реологических характеристик жидкости близкими к экспериментальным.

В [6,7], посвященных исследованию напорного течения вязкопластичной жидкости с учетом диссипации энергии, принималось, что пластичная вязкость зависит от температуры по гиперболическому закону, а предельное напряжение сдвига зависит от температуры по тому же закону [6] или постоянно [7].

Для таких вязкопластичных жидкостей, как парафинистые нефти, характерна сильная зависимость реологических характеристик от температуры [8, 9], которая удовлетворительно аппроксимируется экспонентой [9, 10].

Исследование напорного течения вязкопластичной жидкости для такого случая температурной зависимости реологических характеристик не проводилось.

Рассмотрим установившееся структурное течение вязкопластичной жидкости с реологическим уравнением Шведова — Бингама под действием перепада давления ($-dp / dz$) в круглой трубе радиуса R вдоль оси z. На стенке поддерживается постоянная температура T_0, градиент температуры вдоль потока равен нулю, неизотермичность течения обусловлена диссипацией энергии.

Предполагается, что зависимость пластичной вязкости и предельного напряжения сдвига может быть аппроксимирована экспонентой

(1) $$\eta(T) = \eta_0 \exp[-\beta_1 (T - T_0)], \quad \tau_0(T) = \tau_0 \exp[-\beta_2 (T - T_0)]$$

где η_0 и τ_0 — пластичная вязкость и предельное напряжение сдвига, вычисленные при температуре стенки, β_1 и β_2 — константы.

Система уравнений движения и теплопроводности в безразмерных переменных с учетом (1) имеет вид

(2) $$V_1 \equiv \mathrm{const}, \quad \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{d\theta_1}{d\xi}\right) = 0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$$

(3) $$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\xi e^{-\theta_2}\left(-Иe^{-(\beta-1)\theta_2} + 2\frac{dV_2}{d\xi}\right)\right] - \frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{dP}{d\zeta} = 0, \quad \xi_0 \leqslant \xi \leqslant 1$$

(4) $$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{d\theta_2}{d\xi}\right) + \alpha e^{-\theta_2}\left(-Иe^{-(\beta-1)\theta_2} + 2\frac{dV_2}{d\xi}\right)\left(\frac{dV_2}{d\xi}\right) = 0, \quad \xi_0 \leqslant \xi \leqslant 1$$

(5) $$Иe^{-\beta\theta_1} \geqslant -\frac{\mathrm{Re}}{4}\frac{dP}{d\zeta}\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$$

$$\xi = r/R, \quad \xi_0 = r_0/R, \quad \zeta = z/R, \quad V_i = v_{iz}/\langle v\rangle, \quad P = p/(\rho\langle v\rangle^2/2), \quad \beta = \beta_2/\beta_1$$
$$\theta_i = \beta_1(T_i - T_0), \quad \mathrm{Re} = 2R\langle v\rangle\rho/\eta_0, \quad И = 2\tau_0 R/\langle v\rangle\eta_0$$
$$\alpha = \beta_1\langle v\rangle^2\eta_0/2kJ$$

Здесь $i = 1$ и 2 для ядра и вязкопластичной области соответственно, r — текущий радиус, r_0 — радиус ядра, v_{iz} — продольная скорость, $\langle v\rangle$ — средняя скорость, определяемая отношением секундного объемного расхода жидкости к площади сечения трубы, p — давление, ρ — плотность жидкости, Re — параметр Рейнольдса, И — параметр Ильюшина, α — параметр, характеризующий интенсивность тепловыделения при вязком трении, k — коэффициент теплопроводности жидкости, J — механический эквивалент тепла.

Граничные условия

(6) $$d\theta_1/d\xi = 0, \quad \xi = 0$$

(7) $$V_1 = V_2, \quad \frac{dV_2}{d\xi} = 0, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi} = \frac{d\theta_2}{d\xi}, \quad \xi = \xi_0$$

(8) $$V_2 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \xi = 1$$

К граничным условиям (6) — (8) необходимо добавить выражение для безразмерного объемного расхода жидкости

(9) $$V_1\xi_0^2 + 2\int_{\xi_0}^{1} \xi V_2(\xi)\,d\xi = 1$$

Решением (2) с учетом (6) является

(10) $$\theta_1 = A$$

где A — константа.

Для радиуса ядра из (5) и (10) получаем

(11) $$\xi_0 = 4И \exp(-\beta A)\,\mathrm{Re}^{-1}(-dP/d\zeta)^{-1}$$

Интегрирование (3) с учетом второго граничного условия (7) и выражения для ядра (11) дает

(12) $$dV_2/d\xi = {}^1/_2\left(-\varkappa\xi e^{\theta_2} + Иe^{-(\beta-1)\theta_2}\right)$$

(13) $$\varkappa = -{}^1/_4\,\mathrm{Re}\,dP/d\zeta$$

В дальнейшем будем считать известной среднюю скорость течения, или параметры И, α и Re.

Подстановка (12) в (4) приводит к уравнению

$$\frac{d^2\theta_2}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\theta_2}{d\xi}+\frac{\alpha}{2}(\varkappa^2\xi^2e^{\theta_2}-И\varkappa\xi e^{-(\beta-1)\theta_2})=0 \tag{14}$$

Решение (14) не выражается в квадратурах, но может быть получено численно. В (14) входят три независимых параметра: И, α и β. (Параметр $\varkappa$, введенный выше, посредством (9) выражается как функция И, α и β.) Это значительно затрудняет табличное или графическое представление численного решения.

Во многих случаях, представляющих практический интерес, можно считать, что $\alpha \ll 1$.

Построим приближенное решение задачи методом возмущений [11], полагая

$$\begin{gathered}\theta_i=\theta_{i,0}+\alpha\theta_{i,1}+\alpha^2\theta_{i,2}+\ldots,\quad V_i=V_{i,0}+\alpha V_{i,1}+\\ +\alpha^2V_{i,2}+\ldots\ \xi_0=\xi_{0,0}+\alpha\xi_{0,1}+\alpha^2\xi_{0,2}+\ldots,\\ \varkappa=\varkappa_0+\alpha\varkappa_1+\alpha^2\varkappa_2+\ldots\end{gathered} \tag{15}$$

После подстановки разложений (15) в (12), (14) и граничные условия и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях α, получим рекуррентную систему линейных краевых задач для нулевого, первого и последующих приближений. Значению $\alpha=0$ соответствует однородное поле температур $\theta_{i,0}=0$. Нулевым приближением $V_{i,0}$ является известное решение [12]

$$\begin{gathered}V_{1,0}=\frac{1}{2}И(\xi_{0,0}-1)-\frac{\varkappa_0}{4}(1-\xi^2_{0,0}),\quad V_{2,0}=\frac{1}{2}И(\xi-1)+\\ +\frac{\varkappa_0}{4}(1-\xi^2),\quad \varkappa_0=И/\xi_{0,0}.\end{gathered} \tag{16}$$

Для определения радиуса ядра в изотермическом случае ($\alpha=0$) используем уравнение [12], которое в принятых обозначениях имеет вид

$$\xi_{00}^4-3\chi\xi_{0,0}+3=0,\qquad \chi={}^4/_3+8/И \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет единственный положительный корень, меньший единицы [12].

Первое приближение находится из решения следующей линейной краевой задачи:

$$\frac{dV_{2,1}}{d\xi}=\frac{1}{2}[-\varkappa_0\xi-(\beta-1)И]\,\theta_{2,1}-\frac{1}{2}\xi\varkappa_1 \tag{18}$$

$$\frac{d^2\theta_{2,1}}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\theta_{2,1}}{d\xi}+\frac{1}{2}(\varkappa_0^2\xi^2-\varkappa_0И\xi)=0 \tag{19}$$

$$V_{1,1}=V_{2,1},\ \theta_{1,1}=\theta_{2,1},\ d\theta_{2,1}/d\xi=0,\ \xi=\xi_{0,0} \tag{20}$$

$$V_{2,1}=0,\quad \theta_{2,1}=0,\quad \xi=1 \tag{21}$$

$$\varkappa_0\xi_{0,1}+\varkappa_1\xi_{0,0}=-\beta\,И\,\theta_{1,1} \tag{22}$$

$$V_{1,1}\xi^2_{0,0}+2\int_{\xi_{0,0}}^{1}\xi V_{2,1}(\xi)\,d\xi=0 \tag{23}$$

Интегрируя (19) и учитывая третье граничное условие (20), а также второе условие (21), получим

$$\theta_{2,1}=\frac{И^2}{2\xi^2_{0,0}}\left(\frac{1-\xi^4}{16}-\frac{(1-\xi^3)\,\xi_{0,0}}{9}-\frac{\xi^4_{0,0}\ln\xi}{12}\right) \tag{24}$$

Функция $\theta_{1,1}$ находится из второго граничного условия (20). Подставляя (24) в (18) и интегрируя с учетом первого граничного условия (21), получим

$$V_{2,1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\varkappa_1}{2}(1-\xi^2) + \varkappa_0\int\limits_{\xi}^{1}\xi\theta_{2,1}d\xi + И(\beta-1)\int\limits_{\xi}^{1}\theta_{2,1}d\xi\right\} \tag{25}$$

Вычисление интегралов в (25) может быть выполнено, однако ввиду громоздких конечных выражений удобнее получить результат для конкретного значения параметра И.

Из (25) и первого граничного условия (20) находим $V_{1,1}$. Подставляя (25) в (23) и интегрируя по частям, находим

$$\varkappa_1 = -4/(1-\xi_{0,0}^4)\left[\varkappa_0\int\limits_{\xi_{0,0}}^{1}\xi^3\theta_{2,1}d\xi + И(\beta-1)\int\limits_{\xi_{0,0}}^{1}\xi^2\theta_{2,1}d\xi\right] \tag{26}$$

Величина $\xi_{0,1}$ определяется из (22).

Для второго приближения имеем краевую задачу

$$dV_{2,2}/d\xi = -{}^1/_2[\varkappa_0\xi + И(\beta-1)]\theta_{2,2} + \tag{27}$$
$$+ {}^1/_4[-\varkappa_0\xi + (\beta-1)^2 И]\theta_{2,1}^2 - {}^1/_2\xi\varkappa_1\theta_{2,1} - {}^1/_2\varkappa_2\xi$$

$$\frac{d^2\theta_{2,2}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta_{2,2}}{d\xi} + \frac{1}{2}[\varkappa_0{}^2\xi^2 + (\beta-1)И\varkappa_0\xi]\theta_{2,1} + {}^1/_2(2\varkappa_0\xi^2 - И\xi)\varkappa_1 = 0 \tag{28}$$

$$\theta_{1,2} = \theta_{2,2}, \quad d\theta_{2,2}/d\xi = 0, \quad \xi = \xi_{0,0} \tag{29}$$

$$V_{2,2} = 0, \quad \theta_{2,2} = 0, \quad \xi = 1 \tag{30}$$

$$\varkappa_0\xi_{0,2} + \varkappa_1\xi_{0,1} + \varkappa_2\xi_{0,0} = -И\beta(\theta_{1,2} - {}^1/_2\beta\theta_{1,1}{}^2) \tag{31}$$

$$V_{1,2}\xi_{0,0}^2 + 2\int\limits_{\xi_{0,0}}^{1}\xi V_{2,2}d\xi = 0 \tag{32}$$

$$V_{1,2} = V_{2,2}(\xi_{0,0}) + \xi_{0,1}\frac{dV_{2,1}}{d\xi}(\xi_{0,0}) + \frac{\xi_{0,1}^2}{2}\frac{d^2V_{2,0}}{d\xi^2}(\xi_{0,0}) \tag{33}$$

Приведем результат

$$\theta_{2,2} = -{}^1/_2\ln\xi\int\limits_{\xi_{0,0}}^{\xi}f_1\theta_{2,1}d\xi - {}^1/_2\int\limits_{\xi}^{1}\ln\xi f_1\theta_{2,1}d\xi + \tag{34}$$
$$+ \varkappa_1/2\,[И\xi_{0,0}^3/6\ln\xi + \varkappa_0(1-\xi^4)/8 - И(1-\xi^3)/9]$$

$$V_{2,2} = {}^1/_4\varkappa_2(1-\xi^2) + {}^1/_2\int\limits_{\xi}^{1}(f_1\theta_{2,2}/\varkappa_0\xi^2 - f_2\theta_{2,1}^2/2 + \varkappa_1\xi\theta_{2,1})\,d\xi \tag{35}$$

$$\varkappa_2 = -4/(1-\xi_{0,0}^4)\left[\int\limits_{\xi_{0,0}}^{1}\xi^2(f_1\theta_{2,2}/\varkappa_0\xi^2 - f_2\theta_{2,1}^2/2 + \right. \tag{36}$$
$$\left. + \varkappa_1\xi\theta_{2,1})\,d\xi + \xi_{0,0}^2\xi_{0,1}^2\varkappa_0/2\right]$$

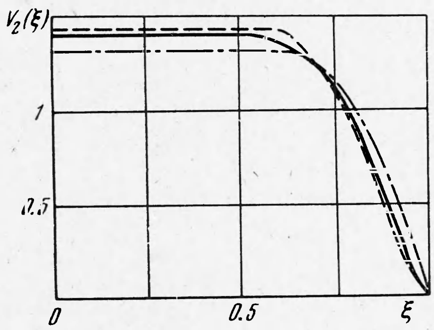
$$f_1 = \varkappa_0{}^2\xi^3 + И(\beta-1)\varkappa_0\xi^2, \quad f_2 = -\varkappa_0\xi + (\beta-1)^2 И$$

Формулы (16), (17), (22), (24) — (26) определяют решение задачи в первом приближении, (31), (33), (34) — (36) — во втором приближении.

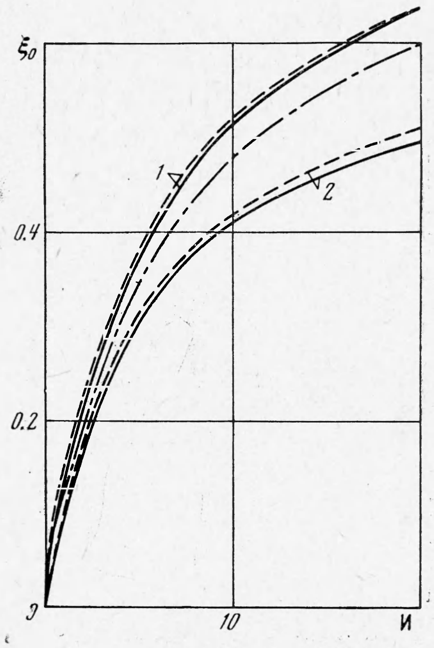
Несмотря на довольно громоздкий вид, решение для каждого конкретного случая может быть получено сравнительно легко, особенно на ЭЦВМ, так как последовательность действий сводится к нахождению корня уравнения (17) и вычислению определенных интегралов.

Следует отметить одну особенность описанной выше линеаризации системы (1) — (9), обусловленную поведением нулевого приближения и его производных в точке ξ_{00}. Она заключается в том, что k-му приближению соответствует размер ядра (k — 1)-го приближения.

Расчеты, проведенные на ЭЦВМ в диапазоне изменения параметров ($0 < И \leqslant 40$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$), показали, что диссипация энергии может существенно изменить локальные и интегральные характеристики течения, при этом отличия решений первого и второго приближений оказываются очень незначительными.



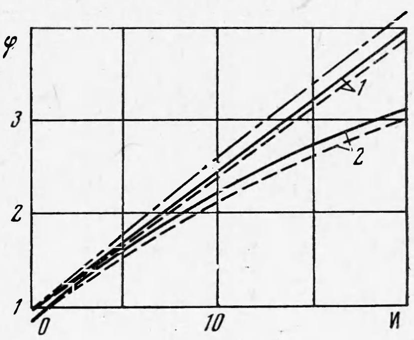
Фиг. 1



Фиг. 2

Некоторые результаты вычислений иллюстрируют фиг. 1—3. На всех фигурах изотермические решения изображены штрихпунктирными кривыми, решения первого приближения — пунктирными, второго — сплошными кривыми.

На фиг. 1 представлены характерные профили скорости, рассчитанные для следующих значений параметров: И $= 20$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 1$; $\alpha = 0$ соответствует изотермический профиль Букингама (16). Из представленных кривых отчетливо видно влияние внутреннего разогрева жидкости, приводящее к увеличению относительной скорости течения в зоне ядра и ее уменьшению в пристеночной зоне. Наибольшее отличие профилей скорости первого и второго приближений наблюдается в узкой зоне, примыкающей к границе ядра, что объясняется отмеченной выше особенностью линеаризации исходной системы.



Фиг. 3

На фиг. 2 представлен график изменения безразмерной границы ядра в координатах (ξ_0, И) в виде семейства кривых с параметром β, рассчитанных для одного значения $\alpha = 0.1$ (кривым *1* и *2* соответствуют значения $\beta = 0$ и 1). Значению $\alpha = 0$ соответствует зависимость размера ядра от параметра Ильюшина, рассчитанная по (17). Как видно из фиг. 2, радиус ядра может быть больше или меньше его значения при изотермическом течении (при фиксированной средней скорости) в зависимости от величины параметра β. Этот факт связан с тем, что в случае независимости предельного напряжения сдвига от температуры ($\beta = 0$) уменьшение вязкости жидкости вследствие диссипации приводит к снижению напряжения сдвига и увеличению ядра, при возрастании β преобладает эффект снижения предельного напряжения сдвига.

Для коэффициента гидравлического сопротивления круглой трубы с учетом (13) получим

$$\lambda = 2R\,(-\,dp\,/\,dz)\,/\,\rho\,\langle v^2\rangle\,/\,2, \quad \lambda = 64\,/\,\mathrm{Re}\,(\varkappa_0\,/\,8 + \alpha\varkappa_1\,/\,8 + \alpha^2\varkappa_2\,/\,8) = 64\,/\,\mathrm{Re}\,\varphi\,(\alpha,\ \text{И},\ \beta) \tag{37}$$

Первый член суммы в (37) представляет собой коэффициент гидравлического сопротивления при изотермическом течении [13] вязкопластичной жидкости в круглой трубе, второй и третий члены этой суммы являются поправкой соответственно первого и второго приближения, учитывающей диссипативный разогрев жидкости.

Функция $\varphi\,(\alpha,\ \text{И},\ \beta)$ изображена на фиг. 3 в виде семейства кривых с параметром β. (Соответствия между номером кривой и β те же, что на фиг. 2.) Все кривые рассчитаны для одного значения $\alpha = 0.1$. Штрихпунктирной кривой представлена функция φ_1 (И), являющаяся решением уравнения (17), в котором необходимо учесть соответствие $\xi_{0,0} = \text{И}\,/\,\varkappa_0$.

Как видно из фиг. 3, коэффициент гидравлического сопротивления при течении с диссипативным разогревом оказывается ниже, чем при изотермическом течении или при постоянных реологических характеристиках жидкости, при этом с ростом β различия могут быть очень значительны даже при сравнительно небольших значениях диссипативного параметра. Это обстоятельство должно учитываться при точных измерениях на капиллярных вискозиметрах.

Обычно экспериментальные кривые обрабатывают в виде зависимости среднего градиента скорости сдвига $\langle dv_z\,/\,dr\rangle = 4\,\langle v\rangle\,/\,R$ от напряжения сдвига на стенке $\tau_w = {}^1\!/_2\,R\,(-\,dp\,/\,dz)$. В случае вязкопластичной жидкости эта зависимость асимптотически стремится к прямой [14]. Если в результате эксперимента обнаруживается отклонение от прямой, принято считать, что модель Шведова — Бингама непригодна для описания реологического закона жидкости. Однако это обстоятельство для жидкостей, реологические характеристики которых очень чувствительны к изменению температуры, может быть следствием диссипативного эффекта.

Полученные выше результаты позволяют учесть этот эффект. При заданной средней скорости течения и известных реологических константах τ_0 и η_0 перепад давления с учетом диссипации энергии определяется по формуле (37).

Автор благодарит В. И. Марона за руководство работой.

Поступила 21 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hausenblas H.* Die nichtisoterme laminare Strömung einer zähen Flüssigkeit durch enge Spalte und Kapillarröhren. Ingr-Arch., 1950, Bd 18, H. 3.
2. *Регирер С. А.* Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
3. *Каганов С. А.* Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. ПМТФ, 1962, № 3.
4. *Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И.* О гидродинамическом тепловом взрыве. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 1.

5. *Бостанджиян С. А.*, *Черняева С. М.* О гидродинамическом тепловом «взрыве» неньютоновской жидкости. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 2.
6. *Беломытцев В. П.*, *Гвоздков Н. Н.* О потере тепловой устойчивости движения вязко-пластического материала. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 2.
7. *Расизаде Я. М.*, *Мамедов Р. М.* О влиянии теплоты внутреннего трения на гидравлические характеристики структурного режима движения вязко-пластичных сред в трубах. Изв. вузов, Нефть и газ, 1968, № 12.
8. *Barry E. G.* Pumping non-newtonian waxy grude oils. J. Inst. Petrol., 1971, vol. 57, No. 554.
9. *Абузова Ф. Ф.*, *Новоселов В. Ф.*, *Тугунов П. И.* Выбор формулы для зависимости статического напряжения сдвига парафинистых нефтей от температуры. Изв. вузов, Нефть и газ, 1972, № 1.
10. *Филонов П. А.* Движение нефти по трубам. М.— Л., Нефтяное изд-во, 1930.
11. *Положий Г. Н.*, *Пахарева Н. А.*, *Степаненко И. З.*, *Бондаренко П. С.*, *Великоиваненко И. М.* Математический практикум. М., Физматгиз, 1960.
12. *Мирзаджанзаде А. Х.* Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, Азернефтнешр, 1959.
13. *Мительман Б. И.*, *Розенберг Г. Д.* О структурном режиме течения вязкопластической жидкости по цилиндрической трубе круглого сечения. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
14. *Reiner M.* Rheology. Berlin, Springer-Verlag, 1958. (Рус. перев.: Реология. М., «Наука», 1965).