

УДК 536.3+536.42

К РЕШЕНИЮ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В СЛОЕ ПОЛУПРОЗРАЧНОГО МАТЕРИАЛА*

Н.А. РУБЦОВ

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Проводится анализ радиационных граничных условий, используемых в методе средних потоков (СП-метод), применительно к решению однофазной задачи Стефана в слое полупрозрачного материала. Рассматриваются непоглощающие, полностью поглощающие и смешанные (поглощающие, пропускающие и отражающие) свойства границ слоя в рамках серой и селективной моделей и их связь с фазовыми превращениями.

Однофазная задача Стефана в слое полупрозрачной среды моделирует сложные процессы нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных футеровках стекловаренных печей, в теплозащитных полупрозрачных для теплового излучения покрытиях технических устройств, в заготовках стеклоподобных материалов в процессе их плавления и кристаллизации.

Однофазная задача Стефана является частным случаем двухфазной задачи Стефана, в которой одна из фаз является изотермической при температуре фазового перехода. Таким образом, математическая модель сводится к уравнению радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачной фазе с переменной температурой и условиям Стефана на границе фаз. В классическом решении однофазной задачи Стефана предполагается, что тепловой поток со стороны фазы с постоянной температурой равен нулю [1]. В практических задачах граничные условия задачи совпадают с условием Стефана, содержащим результирующий (радиационный, кондуктивный и конвективный) поток тепловой энергии отличный от нуля и меняющийся в процессе перемещения границы фаз. При этом указанная граница предполагается бесконечно тонкой и высокотеплопроводной. Таким образом, реальная однофазная задача занимает промежуточное положение между одно- и двухфазной классическими задачами Стефана.

Постановка однофазной задачи Стефана сопряжена с необходимостью конкретного учета граничных условий. Возникающие при этом трудности связаны с взаимным влиянием на результирующий теплообмен границ излучающей системы и заполняющей ее полупрозрачной среды. Такое влияние осуществляется как локально, так и глобально, по всему объему системы, и находит отражение в разрывном характере плотности потока объемного (сферического) падающего излучения $\eta_{\text{пад},\nu}$, имеющего смысл потенциала двойного слоя (прямое граничное и внутреннее предельное значения) [2]. С учетом ориентации площадки, бесконечно близкой к поверхности, внутреннее предельное значение потенциала вырождается в плот-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (грант № НШ-523.2003.1).

ность потока поверхностного (полусферического) результирующего излучения, $E_{\text{рез},v}$.

Если граница излучающей системы, заполненной произвольно ослабляющей и излучающей средой, подчиняется закону Ламберта, то потенциал двойного слоя принимает вид [2, 3]:

$$\lim_{M_i \rightarrow M} \eta_{\text{пад},v}(M_i) = E_{\text{рез},v}(M) + 2E_{\text{эф},v}(M), \quad M \in F, \quad M_i \in \Delta V, \quad (1)$$

где

$$\eta_{\text{пад},v}(M_i) = \int_{4\pi} I_v(M_i, S) d\Omega(M_i, S), \quad M_i \in \Delta V,$$

$$E_{\text{рез},v}(M) = \int_{4\pi} I_v(M, S) \cos(s, n_M) d\Omega(M, S), \quad E_{\text{эф},v}(M) = E_{\text{соб},v}(M) + E_{\text{отр},v}(M). \quad (2)$$

Здесь $I_v(M, S)$ — интенсивность монохроматического излучения, падающего по направлению луча S в пределах элементарного телесного угла $d\Omega(M, S)$ в точку $M \in F$ или $M \rightarrow M_i \in \Delta V$, ΔV — элемент объема V системы вблизи границы, содержащий точку M_i , n_M — нормаль к элементарной площадке в точке M ; $E_{\text{эф},v}$ — плотность потока поверхностного эффективного излучения, складывающаяся из собственного $E_{\text{соб},v}$ и отраженного $E_{\text{отр},v}$ монохроматических излучений элементарной площадки с точкой M .

Соотношения (1), дополненные уравнением переноса энергии излучения, определяющим $I_v(M, S)$, могут быть использованы в качестве исходного для вывода интегральных и дифференциальных уравнений излучения [3]. Последние связаны с представлениями о встречных потоках, используемых в уравнениях сохранения энергии и момента количества движения и вытекающих из уравнения переноса энергии. В зависимости от способа представления встречных потоков дифференциальные уравнения излучения характеризуются соответствующими методами. Применительно к рассматриваемому в дальнейшем случаю одномерного переноса (координата x) энергии излучения в плоском слое среды система дифференциальных уравнений метода средних потоков (СП-метод) записывается относительно плотностей потоков поверхностного (полусферического) падающего излучения,

$$E_v^\pm(x) = \pm 2\pi \int_{0(-1)}^{1(0)} I_v^\pm(x, \mu) \mu d\mu, \quad \text{в виде:}$$

$$\frac{1}{\alpha_v} \frac{d}{dx} (E_v^+ - E_v^-) + (m_v^+ E_v^+ - m_v^- E_v^-) = 4n_v^2 \pi B_v,$$

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}_v} \frac{d}{dx} (m_v^+ I_v^+ E_v^+ - m_v^- I_v^- E_v^-) + (E_v^+ - E_v^-) = 0. \quad (3)$$

Здесь α_v — коэффициент объемного поглощения, $\tilde{\kappa}_v = \kappa_v (1 - \omega_v \bar{\zeta}_v) = \alpha_v + \beta_v (1 - \bar{\zeta}_v)$ — коэффициент объемного ослабления излучения средой с учетом анизотропии процессов рассеяния, β_v — коэффициент ослабления, $\omega_v = \beta_v / \kappa_v$ — альbedo однократного рассеяния, $\kappa_v = \alpha_v + \beta_v$ — коэффициент ослабления, $\bar{\zeta}_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_v(\mu) \mu d\mu$ —

средний косинус угла рассеяния, где $p_v(\mu)$ — индикатриса рассеяния; $m_v^\pm = \frac{\eta_v^\pm}{E_v^\pm}$,

$l_v^\pm = \frac{\Pi_v^\pm}{\eta_v^\pm}$ — коэффициенты распределения интенсивности и диффузии излучения в среде по направлениям в пределах полусфер $\Omega = \pm 2\pi$, принимающие значения на границах, равные осредненным ($m^\pm = \pm 2$, $l^\pm = \pm 1/3$); $\eta_v^\pm(x) = 2\pi \int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I_v^\pm(x, \mu) d\mu$,

$\Pi_v^\pm(x) = 2\pi \int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I_v^\pm(x, \mu) \mu^2 d\mu$, где $I^\pm(x, \mu)$ — интенсивность прямого ($\mu > 0$) и

обратного ($\mu < 0$) направлений (рис. 1), $\eta_v^+(x) + \eta_v^-(x) = \eta_{\text{пад},v}(x)$ — плотность потока излучения, падающего в элемент объема с точкой x , $\Pi_v^+(x) + \Pi_v^-(x) = \Pi_v(x)$ — тензор излучения в элементе объема с точкой x .

Коэффициенты переноса, представленные в системе уравнений (3), уточняются в процессе итераций до приемлемой для расчетов точности [4].

Запись системы дифференциальных уравнений (3) относительно $E^\pm(x)$ дает возможность выразить соответствующие им граничные условия в виде соотношений плотностей потоков полусферического падающего излучения, имеющих очевидный физический смысл. Так, в слое между двумя непрозрачными границами с постоянными температурами $T_1 = T(x=0)$, $T_2 = T(x=L)$ и излучающими по закону Ламберта граничные условия для (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} E_v^+(x) &= \varepsilon_{1v} n_v^2 \sigma_0 T_1^4 + R_{1v} E_v^-(x), & x=0, \\ E_v^-(x) &= \varepsilon_{2v} n_v^2 \sigma_0 T_2^4 + R_{2v} E_v^+(x), & x=L, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $R_{nv} = 1 - A_{nv}$, $\varepsilon_{nv} = A_{nv}$, T_n — коэффициент полусферического отражения, поглощательной способности (A_{nv}), степень черноты (ε_{nv}) и температура границ слоя ($n=1,2$), L — толщина слоя.

Уравнения сохранения энергии в полупрозрачном слое

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - E(x,t) \right) = c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \quad (5)$$

записываются с граничными условиями первого рода

$$\begin{aligned} x=0: & T(x,t) = T_1 = \text{const}, \quad t \geq 0 \\ x=L: & T(x,t) = T_2 = \text{const}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

а также начальным условием

$$t=0: T(x,t) = T_1 = \text{const}, \quad T_2 > T_1, \quad (7)$$

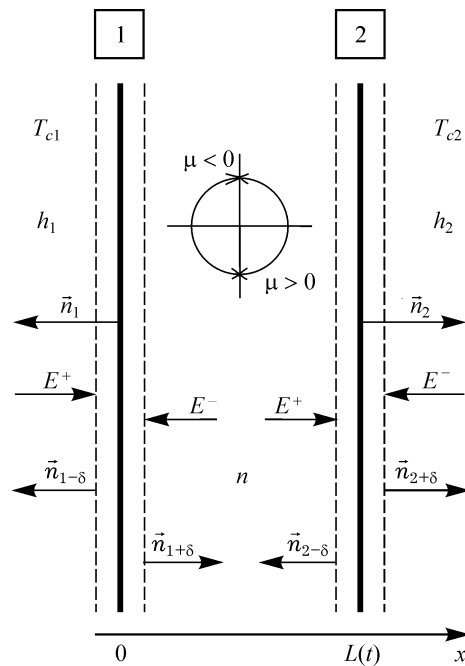


Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

которые соответствуют радиационным граничным условиям (4). При этом входящие в (5) значения плотности результирующего излучения $E_v = E_v^+ - E_v^-$ определяются непосредственно из решения (3). Система дифференциальных уравнений (3) записана для монохроматического излучения. Она может быть использована непосредственно в предположении, что среда и границы слоя обладают оптическими свойствами $(A_{mv}, \varepsilon_{mv}, R_{mv})$ модельного, серого излучения и тогда индекс частоты V в (3) и (4) опускается. В случае, когда указанные свойства обладают селективным характером, уравнения (3), (4) преобразуются в систему дифференциальных уравнений и граничных условий, число которых определяется числом выделяемых в спектре излучения полос или групп линий. Используя тот или иной способ осреднения коэффициентов, характеризующих оптические свойства среды и границ $(\alpha_v, \beta_v, \kappa_v, n_v, \bar{\zeta}_v, \varepsilon_v, R_v)$, перенос излучения $(m, l)_j$, а также функции Планка B_j (j — номер полосы), вытекающая из (3) и (4) система уравнений решается относительно E_j^\pm , определяется $\eta_j^\pm = m_j^\pm E_j^\pm$, интегральное значение $\eta^\pm = \sum_j \eta_j^\pm$ и, наконец, интегральное по спектру значение плотности потока объемного падающего излучения $\eta_{\text{над}} = \eta^+ + \eta^-$. Найденное значение $\eta_{\text{над}}$ может быть использовано в уравнении энергии (5) через выражение дивергенции для плотности потока объемного результирующего излучения, записанного в одномерном рассмотрении в виде:

$$-\frac{\partial E}{\partial x} \equiv \eta_{\text{рез}}(x) = \alpha \eta_{\text{над}}(x) - \eta_{\text{соб}}(x),$$

где $\eta_{\text{соб}}(x) = \alpha n^2 \eta_e(x)$, $\eta_e = 4E_e(x) = 4\sigma_0 T^4(x)$ — плотность потока собственного интегрального по спектру излучения при значении температуры, определенной на предыдущей итерации. Решение (5) определяет температурное поле, которое в случае необходимости используется для вычисления E^\pm , η^\pm и $\eta_{\text{над}}$ в последующей итерации [4].

Постановка задачи (3) – (7) сводится к определению тепловых характеристик процесса нагрева (охлаждения) слоя с температурой $T_1 = \text{const}$ за счет подвода (отвода) тепла в момент $t > 0$ в результате формирования совершенного контакта границы $x = L$, обладающей температурой $T_2 > T_1$, со средой пластины.

Если $T_2 \geq T_f$, где T_f — температура фазового перехода материала пластины, то процесс нагрева (охлаждения) при $t \geq 0$ оказывается совмещенным с процессом фазового перехода, и проблема в целом рассматривается в рамках двухфазной задачи Стефана [5].

Большими возможностями, с точки зрения приложений, обладают задачи радиационно-кондуктивного теплообмена с граничными условиями второго рода, характеризующимися заданием конвективных или радиационно-конвективных потоков тепловой энергии на границах слоя. В этом случае граничные условия приобретают форму сопряжения в виде баланса плотностей потоков вблизи границ со стороны слоя и внешней среды:

$$\bar{q}_{i-\delta} \bar{n}_{i-\delta} + \bar{q}_{i+\delta} \bar{n}_{i+\delta} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь $\bar{n}_{i\pm\delta}$ — векторы внешних и внутренних единичных нормалей по отношению к слою уменьшенному или увеличенному на бесконечно малую величину δ , $\bar{q}_{i\pm\delta}$ —

векторы суммарных значений плотностей потоков за счет теплопроводности (конвекции) и излучения вблизи границ, \vec{n}_i — векторы внешних, по отношению к слою, единичных нормалей (см. рис. 1).

Принимая во внимание соотношения:

$$\vec{n}_{1-\delta} = +\vec{n}_1, \quad \vec{n}_{1+\delta} = -\vec{n}_1, \quad \vec{n}_{2-\delta} = -\vec{n}_2, \quad \vec{n}_{2+\delta} = +\vec{n}_2,$$

получаем:

$$\vec{q}_{1-\delta} \vec{n}_{1-\delta} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x-\delta} + E_{\text{рез},1}(x-\delta), \quad x=0,$$

$$\vec{q}_{1+\delta} \vec{n}_{1+\delta} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\delta} - E_{\text{рез},1}(x+\delta), \quad x=0,$$

$$\vec{q}_{2-\delta} \vec{n}_{2-\delta} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x-\delta} - E_{\text{рез},2}(x-\delta), \quad x=L,$$

$$\vec{q}_{2+\delta} \vec{n}_{2+\delta} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\delta} + E_{\text{рез},2}(x+\delta), \quad x=L.$$

Имея в виду, что кондуктивный теплообмен от внешних границ слоя $(0, L)$ может осуществляться в форме конвекции в представленных выше соотношениях, следует полагать

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x-\delta} \rightarrow -h_1 (T - T_{c1}) \Big|_{x-\delta} \quad \text{при } x=0, \text{ если } T \geq T_{c1},$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\delta} \rightarrow -h_2 (T - T_{c2}) \Big|_{x+\delta} \quad \text{при } x=L, \text{ если } T \geq T_{c2}$$

или

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\delta} \rightarrow -h_2 (T_{c2} - T) \Big|_{x+\delta} \quad \text{при } x=L, \text{ если } T \leq T_{c2},$$

где h_i — коэффициенты конвективной теплоотдачи на границах слоя $i=1, 2$. Таким образом граничные условия (8) для уравнения энергии (5) в плоском слое примут вид:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\delta} + h_1 (T - T_{c1}) \Big|_{x-\delta} + |E_{\text{рез},1}| = 0, \quad x=0, \quad T \geq T_{c1}, \quad (9)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x-\delta} - h_2 (T_{c2} - T) \Big|_{x+\delta} - |E_{\text{рез},2}| = 0, \quad x=L, \quad T \leq T_{c2}, \quad (10)$$

где

$$|E_{\text{рез},i}| = E_{\text{рез},i}(x-\delta) - E_{\text{рез},i}(x+\delta), \quad i=1, 2$$

— перепад значений плотностей потоков результирующего излучения на границе сопряжения слой–среда. Заметим, что граничные условия (9) – (10) записываются в форме сопряжения потоков энергии, столь характерной для условий на границе разрывов, рассматриваемых в механике сплошных сред. При этом негласно учитываются условия сопряжения температур:

$$T|_{x=0-\delta} = T|_{x=0+\delta}, \quad T|_{x=L+\delta} = T|_{x=L-\delta}.$$

Если на одной из границ, например, правой при $x = L$, наступает фазовый переход, то

$$T|_{x=L+\delta} = T|_{x=L-\delta} = T_f,$$

а правая нулевая часть уравнения (10) приравнивается теплоте фазового превращения $\rho_f \gamma \partial L / \partial t$, $t > 0$, где γ — скрытая удельная теплота фазового превращения, определяемая при температуре плавления T_f , ρ_f — плотность среды слоя при температуре фазового перехода T_f , $\partial L / \partial t$ — скорость движения плоского фронта фазового перехода (условие Стефана).

Значение T_f , равно как и γ , определяется из экспериментов, проводимых в равновесных условиях. В неравновесных условиях рассматриваемой модельной задачи условие $T|_{x=L+\delta} = T|_{x=L-\delta} = T_f$ является допущением, подтверждаемым, однако, в случае непрозрачных материалов экспериментально. В то же время в некоторых случаях температура плавления веществ оказывается зависящей от характера протекания теплового процесса. Можно предположить, что подобная особенность фазового перехода свойственна полупрозрачным для теплового излучения диэлектрикам. Таким образом, истинная температура плавления оказывается неизвестной, и для замыкания рассматриваемой математической модели необходимо дополнительное уравнение, определяющее температуру плавления. С этой целью можно воспользоваться энтропийной модификацией условия Стефана, которая применительно к (10) записывается в виде $|S| = \rho_f \gamma (1/T_f - 1/T) \partial L / \partial t$, $L = L(t)$, где S — суммарная плотность потока энтропии. В первом приближении можно полагать, что $|S| = |q|/T$, где $|q|$ определяется левой частью уравнения (10), а $T = T(x, t)$ представляет собой искомую температуру правой границы $x = L(t)$, определяемую после достижения этой границей в процессе нагрева температуры T_f и являющуюся истинной температурой плавления полупрозрачного для теплового излучения материала. Заметим, что в общем случае $|S| \geq 0$, где знак равенства соответствует условиям перехода энтропии через границу слоя без диссипации энергии, а знак $>$ свидетельствует об увеличении энтропии, связанном с необратимыми процессами фазовых переходов, за счет ее производства в области правой границы.

В рамках рассмотренных граничных условий ниже анализируется тепловое состояние твердого полупрозрачного материала, поверхностный слой одной из границ (правой) которого нагревается интенсивным потоком теплового излучения до температуры плавления T_f и уносится (аблируется) диффузионно-конвективным способом. Аблируемая поверхность, являясь фронтом фазового перехода, перемещается и, следовательно, температурное поле в слое оказывается функционалом времени и координаты, зависящей от времени, $T = T(x(t), t)$. Следовательно, $\partial T(x(t), t) / \partial t = \partial T(x, t) / \partial t + (\partial T(x(t), t) / \partial x) (\partial x(t) / \partial t)$. И тогда уравнение сохранения энергии (5) принимает вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial x} = c\rho \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - E \right), \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+\delta} + h_1 (T - T_{c1}) \Big|_{x-\delta} + |E_{\text{рез},1}| &= 0, \quad x = 0, \quad T \geq T_{c1}, \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x-\delta} - h_2 (T_{c2} - T_f) - |E_{\text{рез},2}| &= \rho_f \gamma \frac{\partial L}{\partial t}, \quad x = L(t), \quad T \leq T_{c2}. \end{aligned} \quad (12)$$

При определении $|E_{\text{рез},i}|$ следует учитывать, что $E_{\text{рез},i} = \vec{E}_i \vec{n}_i$, где \vec{E}_i — вектор излучения на границе i . Тогда с учетом схемы на рис. 1 получаем:

$$\mp E_{\text{рез},i}(x \pm \delta) = E_{\text{нал},i}(x \pm \delta) - E_{\text{эф},i}(x \pm i), \quad i = 1, 2; \quad x = 0, L.$$

При этом используется определение из уравнения (2):

$$E_{\text{эф},i} = E_{\text{соб},i} + R_i E_{\text{нал},i}, \quad i = 1, 2,$$

в котором $E_{\text{эф},i}$, $E_{\text{соб},i}$, $E_{\text{нал},i}$ имеют смысл реальных или условных значений плотностей полусферических потоков эффективного, собственного и падающего излучений. Если границы слоя представлены непрозрачными высокотеплопроводными тонкими пластинами, обладающими интегральными по спектру, либо серыми поглощательными A_i и излучательными ε_i способностями, то:

$$|E_{\text{рез},1}| = A_1 (E^-(x+\delta) + \sigma_0 T_{c1}^4) - \varepsilon_1 (1+n^2) \sigma_0 T^4(x), \quad x = 0, \quad (13)$$

$$|E_{\text{рез},2}| = A_2 [E^+(x-\delta) + E^*] - \varepsilon_2 (1+n^2) \sigma_0 T^4(x), \quad x = L$$

или

$$|E_{\text{рез},2}| = A_2 [E^+(x-\delta) + E^*] - \varepsilon_2 (1+n^2) \sigma_0 T_f^4, \quad x = L(t), \quad t > 0.$$

Граничные условия для расчета процессов излучения СП-методом записываются согласно (4) в виде соотношений:

$$E^+(x+\delta) = \varepsilon_1 n^2 \sigma_0 T^4(x) + R_1 E^-(x+\delta), \quad x = 0, \quad (14)$$

$$E^-(x-\delta) = \varepsilon_2 n^2 \sigma_0 T^4(x) + R_2 E^+(x-\delta), \quad x = L$$

или

$$E^-(x-\delta) = \varepsilon_2 n^2 \sigma_0 T_f^4 + R_2 E^+(x-\delta), \quad x = L(t), \quad t > 0,$$

используемых на стадии как прогрева слоя, так и теплообмена с учетом фазового перехода.

Здесь $E^* \equiv E_{\text{нал}}(x+\delta)$ — суммарное значение плотности потока излучения, падающего на $x = L$; применительно к стеклоплавильной печи это может быть излучение обмуровки и газа, омывающего полупрозрачную стенку (футеровку) печи; E^\pm — плотности потоков, определяемые в соответствии с рис. 1 и имеющие смысл потоков падающего ($E^+(x-\delta)$, $E^-(x+\delta)$), либо эффективного ($E^+(x+\delta)$),

$E^-(x-\delta)$) излучений. Подобная модель была предложена в [6] и получила развитие в [7] с привлечением СП-метода для расчета излучения.

Рассмотрим случай, когда поверхности слоя не поглощают, но отражают и пропускают излучение. В этом случае $A_i = 0$, $D_i + R_i = 1$, где $D_i = 1 - R_i$, R_i — коэффициенты полусферического пропускания и отражения границ слоя $i = 1, 2$. С помощью рассуждений, изложенных выше, а также учитывая оптический инвариант [8],

$$(1 - R_i) n^2 = (1 - R_i) n_{ci}^2, \quad (15)$$

где R_i, R_i' — коэффициенты наружного и внутреннего (со стороны среды слоя) отражений, $n, n_{ci} = 1, i = 1, 2$ — коэффициенты преломления слоя и окружающей среды, получаем

$$\begin{aligned} E_{\text{рез},1}(x-\delta) = E_{\text{рез},1}(x+\delta) &= D_1 \left[\sigma_0 T_{c1}^4 - \frac{1}{n^2} E^-(x+\delta) \right], \quad x=0, \\ E_{\text{рез},2}(x-\delta) = E_{\text{рез},2}(x+\delta) &= -D_2 \left[E^* - \frac{1}{n^2} E^+(x-\delta) \right], \quad x=L=L(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, в случае монохроматического или модельного серого излучения в граничных условиях (9), (10) для уравнения энергии (5), а также (12) для уравнения энергии (11) следует полагать

$$|E_{\text{рез},1}| = |E_{\text{рез},2}| = 0.$$

При этом предполагается, что при нагреве слоя до температуры фазового перехода границ $x = L = L(t)$ их оптические свойства остаются неизменными.

Радиационные граничные условия для системы дифференциальных уравнений (3) записываются с учетом оптического инварианта (15) следующим образом:

$$\begin{aligned} E^-(x+\delta) &= D_1 \sigma_0 T_{c1}^4 + (1 - D_1/n^2) E^-(x+\delta), \quad x=0, \\ E^-(x-\delta) &= D_2 E^* + (1 - D_2/n^2) E^+(x-\delta), \quad x=L. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что если $R_i = 0$, то $n = 1$, $D_i = 1$, и из (16) вытекают условия при $x = 0$:

$$E_{\text{рез},1} = E^+(x+\delta) - E^-(x+\delta), \quad \text{где } E^+(x-\delta) = \sigma_0 T_{c1}^4,$$

при $x = L$:

$$E_{\text{рез},2} = E^+(x-\delta) - E^-(x+\delta), \quad \text{где } E^-(x+\delta) = E^*,$$

характеризующие определение плотности потоков результирующего излучения через разность плотностей потоков излучений, падающих на границы слоя из противоположных направлений; из (17) при этих предположениях вытекает условие

$$E^-(x-\delta) = E^-(x+\delta), \quad x=0, L,$$

характеризующее принцип непрерывности потоков при переходе через границы.

Более реальной представляется ситуация, при которой границы слоя частично поглощают, отражают и пропускают, т. е. условие, в котором безразмерное балансное соотношение потоков для поверхностных слоев выражается в виде

$$A_i + R_i + D_i = 1, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

Это условие, записываемое для оптических свойств слоев при внешнем (со стороны среды) воздействии излучения, выполняется и для внутренних (со стороны слоя) облучений поверхностей — $A'_i + R'_i + D'_i = 1$.

В случае квазиравновесного состояния излучающей системы можно полагать, что $A_i = A'_i$, $D_i = D'_i$, а между R_i и R'_i существует связь, вытекающая из оптического инварианта (15) в виде

$$R'_i = 1 - \frac{1}{n^2}(1 - R_i).$$

При этом

$$|E_{\text{рез.1}}| = A_1 [E^-(x + \delta) + \sigma_0 T_{cl}^4] - \varepsilon_1 (1 + n^2) \sigma_0 T^4(x), \quad x = 0, \quad (19)$$

$$|E_{\text{рез.2}}| = A_2 [E^+(x - \delta) + E^*] - \varepsilon_2 (1 + n^2) \sigma_0 T^4(x), \quad x = L \quad (20)$$

или

$$|E_{\text{рез.2}}| = A_2 [E^+(x - \delta) + E^*] - \varepsilon_2 (1 + n^2) \sigma_0 T_f^4, \quad x = L(t), \quad t > 0, \quad (21)$$

если температура правой границы слоя достигает T_f и начинается фазовый переход.

Радиационные граничные условия для СП-метода принимают вид:

$$E^+(x + \delta) = \varepsilon_1 n^2 \sigma_0 T^4(x) + D_1 \sigma_0 T_{cl}^4 + (1 - (1 - R_1)/n^2) E^-(x + \delta), \quad x = 0, \quad (22)$$

$$E^-(x - \delta) = \varepsilon_2 n^2 \sigma_0 T^4(x) + D_2 E^* + (1 - (1 - R_2)/n^2) E^+(x - \delta), \quad x = L \quad (23)$$

или

$$E^-(x - \delta) = \varepsilon_2 n^2 \sigma_0 T_f^4 + D_2 E^* + (1 - (1 - R_2)/n^2) E^+(x - \delta), \quad x = L(t), \quad t > 0. \quad (24)$$

Из соотношений (19) – (24) вытекают в качестве частного случая выражения (13), (14) для непрозрачных ($D_i = 0$) и соотношения (16), (17) для прозрачных ($D_i = 1$) границ.

Представленные рассуждения связаны с образованием полупрозрачных тонких покрытий поверхностей слоя, вызванных условиями технологических процессов (адсорбция пыли и сажи, а также фазовые переходы). Образующиеся покрытия обладают преимущественно либо поглощательными (сажа), либо отражательными (пыль, фазовый переход) свойствами. В последнем случае реально формирующийся подслой, претерпевающий фазовый переход, обладает интенсивным рассеянием, вызванным флуктуациями плотности полупрозрачной среды, а следовательно, отражением излучения. В процессе фазового перехода указанный подслой мутнеет, а потому может рассматриваться приближенно в рамках серой модели. Образуется своеобразный серый фильтр на поверхности слоя, оптические свойства которого могут рассматриваться как в рамках серой, так и в селективной модели объемного ослабления излучения.

В предположении селективного характера оптических свойств образующегося в процессе фазового перехода поверхностного подслоя могут быть использованы следующие физические соображения.

В силу происходящих структурных превращений объемные оптические свойства (α_v , β_v , ω_v , n_v) поверхностного подслоя меняются свои значения; вследствие этого меняются и полусферические характеристики A_v , R_v , D_v , являющиеся функциями оптических свойств поверхности и прилегающего к ней подслоя

среды. Несмотря на малые размеры рассматриваемого подслоя, его оптическая толщина $h_v = \kappa_v \delta$ в полосах интенсивного ослабления ($\kappa_v \rightarrow \infty$) может оставаться конечной величиной.

Для монохроматического излучения балансовое отношение (18), записываемое для рассматриваемой границы 2, имеет вид $A_{2v} + R_{2v} + D_{2v} = 1$.

Для интегрального по спектру излучения имеем $A_2 + R_2 + D_2 = 1$, где

$$A_2 = \int_0^{\infty} A_{2v} dv, \quad R_2 = \int_0^{\infty} R_{2v} dv, \quad D_2 = \int_0^{\infty} D_{2v} dv.$$

В случае селективного излучения, аппроксимируемого набором квазисерых прямоугольных полос получаем $A_{2m} + R_{2m} + D_{2m} = 1$, где m — число выделяемых полос ослабления в спектре излучения. При этом существующие в спектре окна прозрачности (m^0) исключаются из рассмотрения, так как $A_{2m^0} = R_{2m^0} = 0$, $D_{2m^0} = 1$.

Процессы переноса излучения в полосах связаны с соответствующими потоками и потому определения суммарных по спектру полос сопряжены с осреднениями по потокам в пределах каждой полосы. Тем самым граничное условие (12) для правой границы слоя записываются с учетом того, что выражение (21) для $|E_{\text{рез},2}|$ преобразуется к виду

$$|E_{\text{рез},2}| = A'_{2m} E_{2m}^+(x - \delta) + A'_{2m} E_m^* - \varepsilon_{2m} (1 + n^2) E_{bm}(T_f), \quad (25)$$

а граничное условие (28) записывается следующим образом:

$$E_m^-(x - \delta) = \varepsilon_{2m} n^2 E_{bm}(T_f) + D_{2m} E_m^* + E_{m^0}^* + R'_{2m} E_m^+(x - \delta), \quad x = L(t), \quad t > 0. \quad (26)$$

Здесь A'_{2m} , R'_{2m} — поглощательные и отражательные способности границы 2 при падении излучения со стороны слоя определяются из следующих соображений:

$$A'_{2m} E_m^+ = \sum_{k=1}^m A'_{2\Delta v_k} E_{\Delta v_k}^+,$$

где по теореме о среднем $A'_{2\Delta v_k} = \frac{\int_{\Delta v_k} A_{2v} E_v^+ dv}{\int_{\Delta v_k} E_v^+ dv}$, $E_{\Delta v_k}^+ = \int_{\Delta v_k} E_v^+ dv$, $E_m^+ = \sum_{k=1}^m E_{\Delta v_k}^+$ и,

следовательно, $A'_{2m} = \frac{\sum_{k=1}^m A'_{2\Delta v_k} E_{\Delta v_k}^+}{E_m^+}$, аналогичным образом $R'_{2m} = \frac{\sum_{k=1}^m R'_{2\Delta v_k} E_{\Delta v_k}^+}{E_m^+}$ и

тогда $D'_{2m} = 1 - A'_{2m} - R'_{2m}$. Для случая, в котором излучение падает на внешнюю

границу, получаем $A_{2m} E_m^* = \sum_{k=1}^m A_{2\Delta v_k} E_{\Delta v_k}^*$, где $A_{2\Delta v_k} = \frac{\int_{\Delta v_k} A_{2v} E_v^* dv}{E_{\Delta v_k}^*}$, поэтому

$A_{2m} = \frac{\sum_{k=1}^m A_{2\Delta v_k} E_{\Delta v_k}^*}{E_m^*}$, и по аналогии с предыдущим получаем $D_{2m} = \frac{\sum_{k=1}^m D_{2\Delta v_k} E_{\Delta v_k}^*}{E_m^*}$,

$R_{2m} = 1 - A_{2m} - D_{2m}$; $E_{m_0}^*$ — часть потока E^* , прошедшего через границу 2 в окнах прозрачности, для которых $D_{2m_0} = 1$. В уравнениях (25) и (26) делается допущение, что $n \neq n(v)$ и $\varepsilon_{2m} E_{bm}(T_f) = \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} \varepsilon_{2\Delta v_k} E_{b\Delta v_k}(T_f)$, где m_ε — число полос поглощения (излучения), $E_{b\Delta v_k}(T_f) = \int_{\Delta v_k} E_{bv}(T_f) dv$ — плотность потока равновесного излучения в пределах k -ой полосы.

Приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что $A'_{2m} = A_{2m}$ лишь в предельном случае, когда используемые сопряженные потоки E_m^+ , E_m^* и $E_{bm}(T_f)$ оказываются сопоставимыми по величине. В этом случае система слоев — окружающая среда близка к термодинамическому равновесию и тогда коэффициенты полусферического отражения R'_{2m} и R_{2m} могут быть связаны между собой с помощью оптического инварианта излучения вида (15). В общем случае при существенной неравновесности системы, когда $E_m^* \gg E_{bm}(T_f)$, указанные соображения не выполняются и постановка граничных условий, записываемая в форме уравнений, учитывающих (25) и (26), оказывается сопряженной с использованием дополнительных параметров задачи (оптических свойств внутренних и внешних границ слоя). Заметим, что подобные соображения следует иметь в виду и в частных случаях, представленных выше, с использованием интегральных по спектру и модельных (серых) представлений оптических свойств границ. Анализ селективных оптических свойств границ в большей степени чем модельное, серое, представление отражает физическое содержание происходящих процессов: возникновение структурных преобразований материала вблизи нагреваемой границы как в периоды времени предшествующие началу фазового перехода, так и в последующие, в которые осуществляется фазовый переход и унос жидкой фазы. В указанные периоды времени следует осуществлять переходы в граничных условиях: от (20) и (23) к (21), (24) — при использовании серой модели и соответственно привлекать в (25) и (26) при учете селективного излучения.

В связи с вышеизложенным встает вопрос о модернизации рассматриваемой постановки задачи за счет выделения поверхностного подслоя конечной толщины, обладающего высокой теплопроводностью из-за флуктуаций плотности и потому являющегося практически изотермическим. Такой подслой может содержать частицы твердой фазы переменной концентрации в расплаве и потому являться двухфазным слоем. Наружная поверхность подслоя покрыта чистым расплавом, который может исчезать за счет процессов испарения (абляции). Оптические свойства указанного подслоя принципиально отличаются от оптических свойств твердой фазы, а задача в целом условно трансформируется в двухфазную постановку задачи. Если процессы абляции сопровождаются увлечением расплавленного подслоя спутным потоком газа, то уравнения энергии подобной системы дополняются уравнениями движения расплавленного подслоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мейрманов А.М. Задача Стефана. — Новосибирск: Наука, 1986. — 239 с.
2. Суринов Ю.А. Лучистый теплообмен при наличии поглощающей и рассеивающей среды // Изв. АН СССР, ОТН. — 1952. — № 9. — С. 1331–1352.
3. Рубцов Н.А. К определению граничных условий в теории радиационного теплообмена // Теплофизика и Аэромеханика. — 2004. — Т. 11, № 2. — С. 313–324.
4. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах. — Новосибирск: Наука, 1984. — 277 с.

5. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А. Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. — 198 с.
6. Le Dez V., Yousefian F., Vaillon D., Lemonnier D., Lallemand M. Problème de Stefan direct dans un milieu semi-transparent gris // J. Phys. III France. — 1996. — Vol. 6. — P. 373–390.
7. Рубцов Н.А., Саввинова Н.А., Слепцов С.Д. Однофазная задача Стефана для полупрозрачной среды с учетом отражения излучения // Теплофизика и Аэромеханика. — 2003. — Т. 10, № 2. — С. 255–264.
8. Рубцов Н.А. К определению граничных условий радиационного теплообмена на плоской поверхности раздела двух сред // Там же. — 2003. — Т. 10, № 1. — С. 87–102.

Статья поступила в редакцию 4 мая 2005 г.