

УДК 519.676

Параметрический анализ стохастических осцилляторов методом статистического моделирования*

М.А. Якунин

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
E-mail: yma@osmf.sccc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 13, 2020.

Якунин М.А. Параметрический анализ стохастических осцилляторов методом статистического моделирования // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 3. — С. 339–350.

С помощью метода статистического моделирования исследуется влияние винеровских и пуассоновских случайных шумов на поведение линейного осциллятора и осциллятора Ван-дер-Поля. Для линейного осциллятора получено аналитическое выражение автоковариационной функции решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ), позволяющее совместно с формулами для математического ожидания и дисперсии решения проводить параметрический анализ и исследовать точность оценок моментов численного решения СДУ, полученного на основе обобщенного явного метода Эйлера. Для осциллятора Ван-дер-Поля численно исследовано влияние пуассоновской составляющей на характер колебаний первого и второго моментов решения СДУ при большой величине скачков.

DOI: 10.15372/SJNM20200308

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, винеровская и пуассоновская составляющие, обобщенный метод Эйлера, стохастические осцилляторы.

Yakunin M.A. Parametric analysis of stochastic oscillators by the statistical modeling method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 3. — P. 339–350.

We investigate the influence of the Wiener and the Poisson random noises on the behavior of the linear and Van der Pol oscillators with the help of the statistical modeling method. For a linear oscillator, the analytical expression of the autocovariance function of the solution to stochastic differential equation (SDE) is obtained. This expression along with the formulas of mathematical expectation and variance of the SDE solution allows us to carry out the parametric analysis and to investigate the accuracy of estimates of moments of the numerical solution to the SDE obtained with the help of the generalized Euler explicit method. For the Van der Pol oscillator, the influence of the Poisson component on the oscillation nature of the first and the second moments of the SDE solution with a large value of jumps is numerically investigated.

Keywords: stochastic differential equations, Wiener and Poisson components, generalized Euler method, stochastic oscillators.

Введение

Исследование влияния случайных шумов на поведение осциллирующих решений стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) ранее проводилось в работах [1–7].

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0315-2019-0002).

Сложность исследования нелинейной системы СДУ состоит в том, что для нее, в отличие от линейной, невозможно получить конечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) даже на первый момент ее решения, которая в линейном случае легко получается из сопутствующей системы ОДУ, т.е. системы СДУ с нулевыми интенсивностями шумов. В [1] приводится большое количество примеров математических моделей физических процессов в виде систем СДУ, описывающих линейные и нелинейные стохастические колебания, проведен численный анализ решений этих систем, введены новые статистические характеристики, в частности частотные аналоги интегральной кривой и фазовой траектории. В [2, 3] исследованы первые два момента гармонического осциллятора с аддитивным и мультипликативным шумами. Рассмотрены варианты случайного затухания и случайной частоты колебаний и влияние на моменты внешнего периодического воздействия. В [4–6] для некоторых нелинейных стохастических осцилляторов с внешними и мультипликативными шумами, включая осцилляторы типа Ван-дер-Поля, построены аппроксимации распределений их решений, для класса осцилляторов с предельными циклами получены точные результаты. Универсальным методом численного анализа решений нелинейных СДУ является метод статистического моделирования.

Настоящая работа является продолжением работы [7] по исследованию влияния винеровских и пуассоновских случайных шумов на поведение линейного осциллятора и осциллятора Ван-дер-Поля и оценок функционалов от численных решений СДУ, которыми они задаются, на основе обобщенного явного метода Эйлера. При численном решении СДУ используется адаптированная к скачкам временная сетка, представляющая собой суперпозицию заданной равномерной временной сетки и множества моментов скачков моделируемой траектории решения [8]. Используемая численная схема решения СДУ, не имеющая ошибки дискретизации пуассоновской составляющей, удобна при очень малом размере шага интегрирования метода Эйлера, что необходимо, например, при решении уравнения Ван-дер-Поля, при этом среднее число скачков на интервале интегрирования существенно меньше числа шагов интегрирования. В этом случае пуассоновская составляющая не так существенно увеличивает среднее время моделирования одной траектории решения СДУ, как винеровская, поскольку не требует моделирования случайной величины на каждом шаге. Для линейного осциллятора получено аналитическое выражение автоковариационной функции решения СДУ, позволяющее совместно с формулами для математического ожидания и дисперсии решения, полученными ранее в [7], проводить параметрический анализ и исследовать точность оценок моментов численного решения СДУ. Для осциллятора Ван-дер-Поля численно исследовано влияние пуассоновской составляющей на характер колебаний первого и второго моментов решения СДУ, приводящее при большой величине скачков к появлению эффекта “биений”, накладывающихся на основные колебания оценок моментных функций.

1. Линейный осциллятор

Рассмотрим линейный колебательный контур со случайной частотой колебаний, задающийся СДУ в смысле Ито второго порядка вида

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + a \frac{dz(t)}{dt} + \omega^2 z(t) = \left(\sigma \frac{dw(t)}{dt} + P(t) \right) z(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где a, ω, σ — вещественные параметры, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, $P(t)$ — пуассоновский белый шум вида

$$P(t) = \sum_{k=1}^{N_T} \xi_k \delta(t - \tau_k),$$

N_T — случайное число скачков на интервале $(0, T]$ (процесс Пуассона), ξ_k — независимые одинаково распределенные случайные величины скачков в моменты времени τ_k , $\delta(t)$ — дельта-функция. При $N_T = 0$ формально будем полагать $P(t) \equiv 0$. Вводя новые переменные $y_1 = z$ и $y_2 = dz/dt$, СДУ (1) можно переписать в виде линейной системы:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= y_{10}, \\ dy_2 &= -(\omega^2 y_1 + a y_2) dt + \sigma y_1 dw(t) + y_1 \int_{\mathbf{R}} x \nu(dx, dt), & y_2(0) &= y_{20}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ν — независимая с $w(t)$ однородная пуассоновская мера в пространстве $\mathbf{R} \times [0, T]$ с характеристической мерой, определяемой функцией

$$\varphi(x) = \lambda f_\xi(x), \quad (3)$$

λ — интенсивность скачков, $f_\xi(x)$ — плотность распределения случайной величины скачков с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией σ_ξ^2 . В случае пуассоновского процесса со скачками постоянной величины формально будем задавать $\varphi(x) = \lambda \delta(x - m_\xi)$.

Из системы СДУ (2) несложно получить ОДУ на математическое ожидание $m_1(t) = \mathbf{E}y_1(t)$ первой компоненты решения СДУ, являющееся уравнением свободных колебаний:

$$\frac{d^2 m_1(t)}{dt^2} + a \frac{dm_1(t)}{dt} + (\omega^2 - \lambda m_\xi) m_1(t) = 0, \quad m_1(0) = y_{10}. \quad (4)$$

При

$$\beta^2 = 4(\omega^2 - \lambda m_\xi) - a^2 > 0 \quad (5)$$

решение данного ОДУ имеет вид

$$m_1(t) = e^{-at/2} \left(y_{10} \cos \frac{\beta t}{2} + (2y_{20} + ay_{10}) \frac{1}{\beta} \sin \frac{\beta t}{2} \right). \quad (6)$$

Для математического ожидания второй компоненты решения имеем $m_2(t) = dm_1(t)/dt$. Как следует из (6), параметры пуассоновской составляющей влияют, в отличие от винеровской, на математическое ожидание решения СДУ, в частности на частоту и амплитуду его колебаний.

Для нахождения вторых моментов $s_{ij}(t) = \mathbf{E}y_i(t)y_j(t)$, $i, j = 1, 2$, сначала с помощью формулы Ито [9] перейдем от системы (2) к трехмерной системе СДУ для случайных процессов $z_{ij}(t) = y_i(t)y_j(t)$. Производя далее усреднение полученной системы СДУ, получаем трехмерную линейную систему ОДУ:

$$dS(t)/dt = AS(t), \quad S(0) = S_0, \quad (7)$$

где $S(t) = (s_{11}(t), s_{12}(t), s_{22}(t))^T$, $S_0 = (y_{10}^2, y_{10}y_{20}, y_{20}^2)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \lambda m_\xi - \omega^2 & -a & 1 \\ q & 2(\lambda m_\xi - \omega^2) & -2a \end{pmatrix},$$

$q = \lambda(m_\xi^2 + \sigma_\xi^2) + \sigma^2$. Численное решение этой системы можно получить, например, методом Эйлера. Точное решение линейных систем ОДУ, как известно, выражается через матричную экспоненту. Колебательный режим решения системы (7) обеспечивается в случае, если

$$\tilde{\beta}^2 = q^2 + \frac{(4(\omega^2 - \lambda m_\xi) - a^2)^3}{27} > 0. \quad (8)$$

В этом случае матрица A имеет одно вещественное и два комплексно-сопряженных собственных значений:

$$r_1 = -a + u, \quad r_{2,3} = -a - \frac{1}{2}u \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}v,$$

где $u, v = \sqrt[3]{q + \tilde{\beta}} \pm \sqrt[3]{q - \tilde{\beta}}$, $\tilde{\beta} > 0$.

Утверждение 1. Пусть значения параметров СДУ (2) удовлетворяют условию (8). Тогда

$$\begin{aligned} s_{11}(t) = & y_{10}^2 e^{(u-a)t} + \frac{1}{6\tilde{\beta}} e^{-(a+u/2)t} \left\{ \left(e^{3ut/2} - \cos \frac{\sqrt{3}vt}{2} \right) \left(y_{10}^2 (-4\tilde{\beta} + v(au - c)) + \right. \right. \\ & \left. \left. 2y_{10}y_{20}v(u+a) + 2y_{20}^2v \right) + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}vt}{2} \left(y_{10}^2 \left(a\frac{u^2+v^2}{2} + uc \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. y_{10}y_{20}(u^2+v^2-2au) - 2y_{20}^2u \right) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $c = (2(\lambda m_\xi - \omega^2) - a^2)/3$.

Формула (9) получается упрощением формулы для первой компоненты решения системы ОДУ (7) $S(t) = e^{At}S_0$. Поскольку $Ae^{At} \equiv e^{At}A$, то убедиться в том, что (9) удовлетворяет системе ОДУ (7) по первой компоненте, можно путем проверки тождества $ds_{11}(t)/dt \equiv (e_{11}(t), e_{12}(t), e_{13}(t))AS_0$, где $e_{1j}(t)$, $j = 1, 2, 3$, — элементы первой строки матрицы e^{At} , в соответствии с (9). Дисперсия первой компоненты решения СДУ (2)

$$D_1(t) = s_{11}(t) - m_1^2(t). \quad (10)$$

Заметим, что для сопутствующей системы ОДУ (при $m_\xi = \sigma_\xi = \sigma = 0$), согласно (9), (6) частота колебаний $s_{11}(t)$ в два раза выше, чем $m_1(t)$. На основе формулы (9), используя первое уравнение системы ОДУ (7), можно получить формулу для второго смешанного момента:

$$s_{12}(t) = \frac{1}{2} \frac{ds_{11}(t)}{dt}, \quad (11)$$

а используя затем второе уравнение системы (7) — для второго момента $s_{22}(t)$.

Обозначим ковариационные функции компонент решения системы СДУ (2) через $c_{ij}(t, t + \tau) = \mathbf{E}y_i(t)y_j(t + \tau)$, $i, j = 1, 2$.

Утверждение 2. Пусть значения параметров СДУ (2) удовлетворяют условию (5). Тогда автоковариационная функция $c_{11}(t, t + \tau)$ определяется по формуле:

$$c_{11}(t, t + \tau) = e^{-a|\tau|/2} \left(s_{11}(t_m) \cos \frac{\beta\tau}{2} + (2s_{12}(t_m) + as_{11}(t_m)) \frac{1}{\beta} \sin \frac{\beta|\tau|}{2} \right), \quad (12)$$

где $t_m = \min(t, t + \tau)$, $\tau \geq -t$; $s_{11}(t_m)$ и $s_{12}(t_m)$ определяются по формулам (9) и (11) соответственно, β определяется согласно (5).

Доказательство. Представим систему СДУ (2) в виде

$$dy_1 = y_2 d\theta, \quad dy_2 = -(\omega^2 y_1 + ay_2) d\theta + \sigma y_1 dw(\theta) + y_1 \int_{\mathbf{R}} x\nu(dx, d\theta), \quad (13)$$

где $\theta \geq t$, с начальными значениями $y_1(t), y_2(t)$ при $\theta = t$. Производя домножение каждого уравнения системы (13) на $y_1(t)$ и применяя к полученной системе СДУ операцию взятия математического ожидания, получаем систему ОДУ на ковариационные функции $c_{11}(t, \theta), c_{12}(t, \theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{11}}{\partial \theta} &= c_{12}, & c_{11}(t, t) &= s_{11}(t), \\ \frac{\partial c_{12}}{\partial \theta} &= -(\omega^2 - \lambda m_\xi)c_{11} - ac_{12}, & c_{12}(t, t) &= s_{12}(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Система ОДУ (14) является формой записи уравнения свободных колебаний вида (4). Первая компонента ее решения имеет вид

$$c_{11}(t, t + \tau) = e^{-a\tau/2} \left(s_{11}(t) \cos \frac{\beta\tau}{2} + (2s_{12}(t) + as_{11}(t)) \frac{1}{\beta} \sin \frac{\beta\tau}{2} \right), \quad (15)$$

где $\tau = \theta - t \geq 0$. При $-t \leq \tau \leq 0$ имеем $c_{11}(t, t + \tau) = \mathbf{E}y_1(t + \tau)y_1(t + \tau + |\tau|) = c_{11}(t + \tau, t + \tau + |\tau|)$, и в формуле (15) следует заменить τ на $|\tau|$ и t на $t + \tau$. Объединяя оба случая $\tau \geq 0$ и $-t \leq \tau < 0$, получаем формулу (12). \square

При $t = 0$ из (12) имеем $c_{11}(0, \tau) = y_{10}m_1(\tau)$, где $m_1(\tau)$ определяется согласно (6). Вторая компонента решения системы ОДУ (14) является взаимной ковариационной функцией:

$$c_{12}(t, t + \tau) = e^{-a\tau/2} \left(s_{12}(t) \cos \frac{\beta\tau}{2} - \frac{1}{\beta} \left(as_{12}(t) + \frac{a^2 + \beta^2}{2} s_{11}(t) \right) \sin \frac{\beta\tau}{2} \right), \quad \tau \geq 0. \quad (16)$$

Формулы для ковариационных функций c_{21} и c_{22} можно получить тем же путем, который используется при доказательстве утверждения 2. Только теперь нужно производить домножение каждого уравнения системы СДУ (13) вместо $y_1(t)$ на $y_2(t)$, а в системе ОДУ (14) заменить c_{11} на c_{21} и c_{12} на c_{22} с начальными значениями $c_{21}(t, t) = s_{12}(t), c_{22}(t, t) = s_{22}(t)$. В итоге формула для $c_{21}(t, t + \tau), \tau \geq 0$, получается из формулы (15), если в ней заменить $s_{12}(t)$ на $s_{22}(t)$ и $s_{11}(t)$ на $s_{12}(t)$, а формула для $c_{22}(t, t + \tau), \tau \geq -t$, получается из (16) при замене в последней τ на $|\tau|, s_{12}(t)$ на $s_{22}(t_m)$ и $s_{11}(t)$ на $s_{12}(t_m)$.

2. Осциллятор Ван-дер-Поля

Стохастическое нелинейное уравнение Ван-дер-Поля, записанное аналогично линейному осциллятору в виде системы СДУ в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt, & y_1(0) &= y_{10}, \\ dy_2 &= (\mu y_2(1 - by_1^2) - \omega^2 y_1) dt + \sigma y_1 dw(t) + y_1 \int_{\mathbf{R}} x\nu(dx, dt), & y_2(0) &= y_{20}, \end{aligned} \quad (17)$$

описывает колебания нелинейного контура под воздействием винеровского и пуассоновского случайных шумов. В (17) $\mu \geq 0$ — параметр нелинейности, параметр ω совместно с μ определяет частоту колебаний, $b > 0$ — масштабирующий коэффициент, пуассоновская мера ν задается согласно (3). Второе уравнение системы (17) удобно представить с использованием центрированной меры $\tilde{\nu}(dx, dt) = \nu(dx, dt) - \varphi(x) dxdt$ в виде

$$dy_2 = (\mu y_2(1 - by_1^2) - \tilde{\omega}^2 y_1) dt + \sigma y_1 dw(t) + y_1 \int_{\mathbf{R}} x \tilde{\nu}(dx, dt),$$

где $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \lambda m_\xi \geq 0$. Ранее проведенные численные исследования решения системы СДУ (17) без винеровской составляющей показали [7], что разные значения параметров ω , λ , m_ξ , σ_ξ обеспечивают близкие по скорости затухания колебаний оценки математического ожидания первой компоненты решения системы СДУ в случае постоянства величин $\tilde{\omega}$ и $\lambda(m_\xi^2 + \sigma_\xi^2)$.

3. Сходимость пуассоновского процесса к винеровскому

При анализе функционалов от численных решений СДУ полезно знать, при каких условиях СДУ с пуассоновской составляющей и СДУ с винеровской составляющей обеспечивают близкие между собой результаты. Основываясь на предельных теоремах для случайных процессов и принципе инвариантности Донскера–Прохорова [10–12], можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть $P_\lambda(t)$, $0 < t \leq T$, — сложный однородный пуассоновский процесс с интенсивностью скачков $\lambda > 0$ и их величинами $\sigma \phi_k / \sqrt{\lambda}$, где $T > 0$, $\sigma > 0$ — постоянные величины, $\{\phi_k\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда $P_\lambda(t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ сходится по распределению в пространстве $D[0, T]$ к винеровскому процессу $\sigma w(t)$.

Рассмотрим последовательность пуассоновских процессов $P_{1\lambda_n}(t) = P_{\lambda_n}(t)/\sigma$, $n = 1, 2, \dots$, с интенсивностями скачков $\lambda_n = \lambda_0 n$, где $\lambda_0 > 0$ — постоянная величина, и их дисперсиями $1/\lambda_n$. Задавая шаг дискретизации $h_n = 1/n$, представим пуассоновский процесс в конце каждого из временных интервалов $[0, t]$ при фиксированном n в виде суммы приращений:

$$P_{1\lambda_n}(t) = \sum_{i=1}^{[nt]} \zeta_{ni} + \tilde{\zeta}_{nt}, \quad 0 < t \leq T, \quad (18)$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа, $\{\zeta_{ni}\}$, $i = 1, \dots, [nt]$, — независимые одинаково распределенные при каждом фиксированном n случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\mathbf{E}\zeta_{ni}^2 = 1/n$, $\tilde{\zeta}_{nt}$ — приращение пуассоновского процесса на последнем шаге, имеющем величину $\tilde{h}_{nt} = (nt - [nt])/n < 1/n$, независимое с $\{\zeta_{ni}\}$, $i = 1, \dots, [nt]$. При $[nt] = 0$ формально будем полагать первое слагаемое в (18) равным 0. Используя случайные величины $\psi_i = \zeta_{ni}\sqrt{n}$, представим (18) в виде

$$P_{1\lambda_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \psi_i + \tilde{\zeta}_{nt}. \quad (19)$$

Случайные величины ψ_i имеют дисперсию $\mathbf{E}\psi_i^2 = 1$ и являются суммами случайного числа случайных величин $\phi_j/\sqrt{\lambda_0}$ с вероятностями появления k величин в каждой

сумме $p_k = e^{-\lambda_0} \lambda_0^k / k!$, $k = 0, 1, \dots$. Распределение случайных величин ψ_i не зависит от n . На каждом полуинтервале $[m/n, (m + 1)/n)$, $m = 0, 1, \dots, [nT] - 1$, и на отрезке $[nT/n, T]$ случайные процессы $\{\tilde{\zeta}_{nt}\}$ являются пуассоновскими процессами с независимыми приращениями и нулевыми начальными значениями. Случайные величины $\tilde{\zeta}_{nt}$ имеют дисперсии \tilde{h}_{nt} и при $n \rightarrow \infty$ $\tilde{h}_{nt} \rightarrow 0$, а $\tilde{\zeta}_{nt}$ сходятся по вероятности к 0 при всех t . Последовательность пуассоновских процессов $P_{1\lambda_n}(t)$ сходится по распределению к тому же предельному процессу, что и последовательность процессов $X_t^n = \sum_{1 \leq i \leq [nt]} \psi_i / \sqrt{n}$. Используя теорему Донскера для X_t^n [10, с. 416], получаем, что при $n \rightarrow \infty$ пуассоновские процессы $P_{1\lambda_n}(t)$ сходятся по распределению к стандартному винеровскому процессу, а пуассоновские процессы $P_{\lambda_n}(t)$ — к винеровскому процессу $\sigma w(t)$.

Утверждение 3 обеспечивает сходимость функционалов от пуассоновских процессов к соответствующим функционалам от винеровских процессов. В [7] приведен пример значений параметров СДУ Ван-дер-Поля, при которых оценки математических ожиданий численных решений СДУ с пуассоновской и винеровской составляющими близки между собой. Параметры составляющих в этом случае связаны зависимостью $\sigma_{\xi\lambda}^2 = \sigma^2 / \lambda$, используемой в утверждении 3.

Замечание 1. Для варианта линейного стохастического осциллятора только с пуассоновской составляющей, имеющей, как и в утверждении 3, независимые одинаково распределенные случайные величины скачков с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_{\xi\lambda}^2$, формулы для второго момента (9) и автоковариационной функции (12) решения СДУ при любом $\lambda > 0$ совпадают с соответствующими формулами для варианта осциллятора только с винеровской составляющей с параметром σ вследствие равенства величин $q = \lambda(m_\xi^2 + \sigma_{\xi\lambda}^2) + \sigma^2$. Для этих функционалов не требуется осуществлять предельный переход при $\lambda \rightarrow \infty$.

4. Численные эксперименты

При численном решении СДУ (2) или (17) на основе обобщенного явного метода Эйлера используется адаптированная к скачкам временная сетка, представляющая собой суперпозицию заданной равномерной временной сетки $\{t_n\}$, $n = 0, \dots, N_h$, $t_0 = 0$, $t_{N_h} = T$, с постоянным шагом h и множества моментов скачков моделируемой траектории решения [7]. Величины скачков моделируются постоянными либо случайными нормальными с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией σ_ξ^2 . При отсутствии скачков на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ численная схема решения СДУ имеет покомпонентно следующий вид:

$$y_{1,n+1} = y_{1,n} + h y_{2,n}, \quad y_{2,n+1} = y_{2,n} + h f(y_{1,n}, y_{2,n}) + \sqrt{h} \sigma y_{1,n} \eta_n, \quad (20)$$

где функция $f(\cdot, \cdot) = -(\omega^2 y_{1,n} + a y_{2,n})$ для СДУ (2) или $f(\cdot, \cdot) = \mu y_{2,n} (1 - b y_{1,n}^2) - \omega^2 y_{1,n}$ для СДУ (17), η_n — независимые между собой стандартные нормальные случайные величины.

Пусть на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ имеется J_n скачков в моменты времени $t_n^{(1)} < t_n^{(2)} < \dots < t_n^{(J_n)}$. Обозначим: $t_n^{(0)} = t_n$, $t_n^{(J_n+1)} = t_{n+1}$, $h_n^{(i)} = t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}$, $y_{1,n}^{(0)} = y_{1,n}$, $y_{2,n}^{(0)} = y_{2,n}$. В этом случае диффузионная составляющая вычисляется в соответствии со схемой Эйлера на неравномерной временной сетке:

$$\begin{aligned} y_{1,n}^{(i+1)} &= y_{1,n}^{(i)} + h_n^{(i)} y_{2,n}^{(i)}, \\ y_{2,n}^{(i+1)-} &= y_{2,n}^{(i)} + h_n^{(i)} f(y_{1,n}^{(i)}, y_{2,n}^{(i)}) + \sqrt{h_n^{(i)}} \sigma y_{1,n}^{(i)} \eta_n^{(i)}, \quad i = 0, \dots, J_n, \end{aligned} \quad (21)$$

с добавлением в каждый момент $t_n^{(i+1)}$ величины скачка

$$y_{2,n}^{(i+1)} = y_{2,n}^{(i+1)-} + y_{1,n}^{(i+1)} \xi_n^{(i+1)}, \quad i = 0, \dots, J_n - 1, \quad (22)$$

где $\xi_n^{(i+1)}$ — постоянные или случайные нормальные независимые между собой и с $\{\eta_n^{(i)}\}$ величины скачков. При $i = J_n$ вычисляется, согласно (21), только диффузионная составляющая и задаются $y_{1,n+1} = y_{1,n}^{(J_n+1)}$, $y_{2,n+1} = y_{2,n}^{(J_n+1)-}$; при $J_n = 0$ формулы (21) формально переходят в (20). Для каждой траектории моменты скачков моделируются последовательно один за другим в процессе вычислений. Численная схема (20)–(22) решения СДУ (2) или (17) имеет первый порядок слабой сходимости [8].

Оценки математического ожидания $\hat{m}_1(t)$, второго момента $\hat{s}_{11}(t)$ и автоковариационной функции $\hat{c}_{11}(t, t + \tau)$ первой компоненты случайного процесса $\{y_1(t), y_2(t)\}$ на основе ансамбля из N_{tr} траекторий численного решения системы СДУ (2) или (17) определяются стандартным способом. Ниже будут исследоваться указанные СДУ только с пуассоновской составляющей, т. е. при $\sigma = 0$.

Для линейного осциллятора (2) задавались $y_{1,0} = 1$, $y_{2,0} = 0$, интервал интегрирования $T = 10$, $N_h = T/h = 10^6$, значения параметров СДУ: $m_\xi = 1$, $\sigma_\xi = 0.35$, $\omega = 2\pi$, $\lambda = 1.44\pi^2$. При $a = 0$ период гармонических колебаний математического ожидания (6) равен 1.25 вместо 1 при отсутствии пуассоновской составляющей. На рисунке 1 приведены два примера графиков оценок автоковариационной функции $\hat{c}_{11}(t, t + \tau)$ при $N_{tr} = 10^5$, $t = 5$, $a = 0$ (сплошная линия) и $a = 0.6$ в случае затухающих колебаний (штриховая линия). На рис. 2 приведен график оценки дисперсии решения СДУ (2) $\hat{D}_1(t) = \hat{s}_{11}(t) - \hat{m}_1^2(t)$ при $N_{tr} = 10^6$, $a = 0.6$. На обоих рисунках графики оценок визуально совпадают с соответствующими графиками, построенными по точным формулам (12), (10).

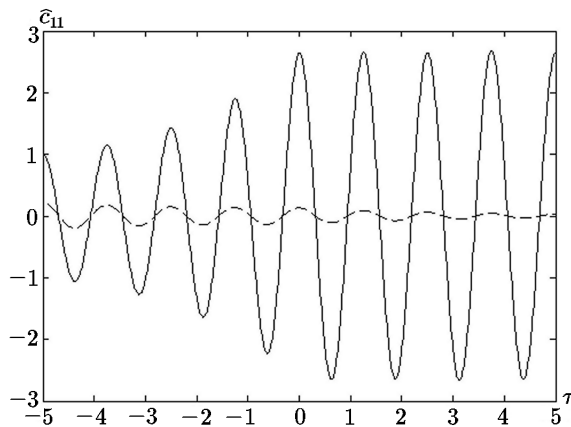


Рис. 1. Оценки автоковариационной функции $\hat{c}_{11}(t, t + \tau)$ решения СДУ (2) при $t = 5$, $a = 0$ (сплошная линия) и $a = 0.6$ (штриховая линия)

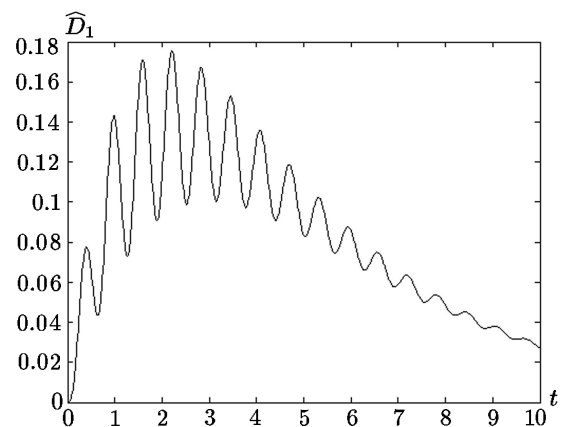


Рис. 2. Оценка дисперсии решения СДУ (2) при $a = 0.6$

В приведенных ниже примерах исследования осциллятора Ван-дер-Поля (17) задавались значения $y_{1,0} = 3$, $y_{2,0} = 0$, $T = 200$.

Пример 1. Исследуется зависимость точности оценок математического ожидания решения СДУ (17) от размера шага интегрирования численной схемы (20)–(22). Значения параметров СДУ: $\mu = 20$, $b = 0.3$, $\omega = \sqrt{2}$, $\lambda = 0.8$, $m_\xi = 1.25$, $\sigma_\xi = 0$, число моделируемых траекторий решения $N_{tr} = 10^5$. Как видно из рис. 3, увеличение размера шага

интегрирования (т. е. уменьшение числа шагов на интервале интегрирования N_h) ведет к завышению периода колебаний математического ожидания решения и с ростом t к все большему смещению графика его оценки вправо по оси времени. При малых размерах шага, таких что $N_h \geq 2 \cdot 10^6$, графики будут визуально совпадать между собой. Как показали вычисления, сказанное справедливо и в случае, когда для пуассоновской составляющей задается $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi \neq 0$ или когда $m_\xi < 0$. Заметим, что числа шагов $N_h = 2 \cdot 10^6$ достаточно и для оценивания второго момента численного решения СДУ. Заметим также, что увеличение значения параметра нелинейности μ в уравнении Ван-дер-Поля требует при численном решении СДУ соответствующего уменьшения размера шага интегрирования численной схемы.

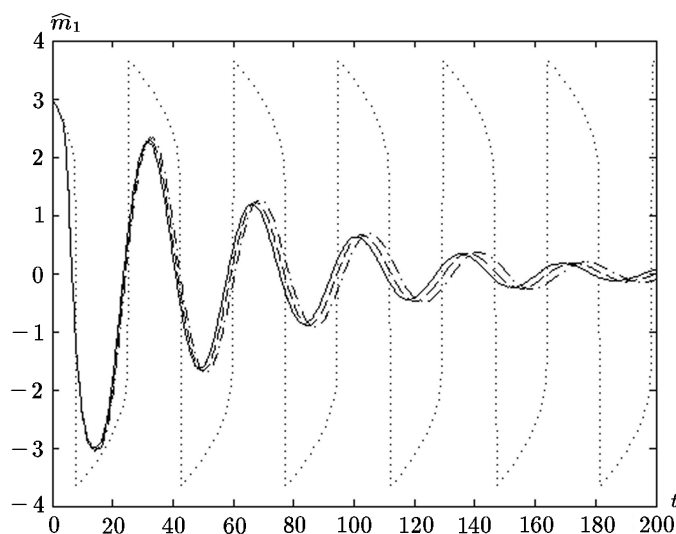


Рис. 3. Оценки математического ожидания решения СДУ (17) при $N_h = 2 \cdot 10^6$ (сплошная линия), $N_h = 2 \cdot 10^5$ (штриховая линия) и $N_h = 10^5$ (штрих-пунктирная линия). Точечная линия — решение сопутствующей системы ОДУ при $\omega = 1$

Пример 2. Наличие в СДУ (17) пуассоновской составляющей с ненулевым значением m_ξ приводит к искажениям моментов решения СДУ по сравнению со случаем $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi \neq 0$, которые при $m_\xi > 0$ имеют характер затухающих высокочастотных осцилляций (“биений”) на фоне основных колебаний момента. Они становятся заметными на графиках оценки математического ожидания при достаточно больших значениях m_ξ . На рис. 4 приведены графики оценок математического ожидания решения СДУ при $N_{tr} = 10^5$, $N_h = 2 \cdot 10^7$, $\mu = 10$, $b = 0.3$, $\lambda = 0.1$. Для одного варианта оценок задавалось $m_\xi = 2$, $\sigma_\xi = 0$, $\omega = \sqrt{1.2}$, для второго $m_\xi = -2$, $\sigma_\xi = 0$, $\omega = \sqrt{0.8}$, для третьего $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi = 2$, $\omega = 1$. Значения параметров СДУ для всех этих вариантов заданы таким образом, чтобы обеспечить, как указывалось выше, неизменность величин $\lambda(m_\xi^2 + \sigma_\xi^2)$ и $\tilde{\omega}$, равных в данном примере 0.4 и 1 соответственно. Как видно из рис. 4, “биения” возникают при $m_\xi = 2$, а при $m_\xi = 0$ они отсутствуют. При $m_\xi = -2$ искажения колебаний также имеют место по сравнению с вариантом $m_\xi = 0$. В целом характер таких искажений или “биений” зависит от значений параметров СДУ: μ , λ , m_ξ , σ_ξ . Например, при $m_\xi = 2$, $\sigma_\xi \neq 0$ “биения” математического ожидания быстро сглаживаются с ростом t уже при небольших значениях $\sigma_\xi \approx 0.3$. На рис. 5 приведены графики оценок второго момента решения СДУ для двух вариантов: $m_\xi = 2$, $\sigma_\xi = 0$ и $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi = 2$. Колебания оценки второго момента при $m_\xi = 2$ включают медленно затухающую высокочастотную составляющую.

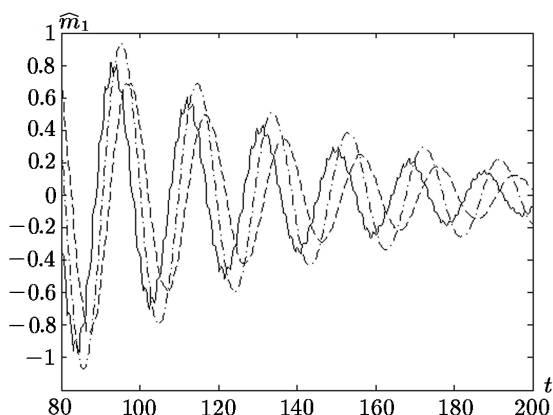


Рис. 4. Оценки математического ожидания решения СДУ (17) при $m_\xi = 2, \sigma_\xi = 0$ (сплошная линия), $m_\xi = -2, \sigma_\xi = 0$ (штриховая линия) и $m_\xi = 0, \sigma_\xi = 2$ (штрих-пунктирная линия)

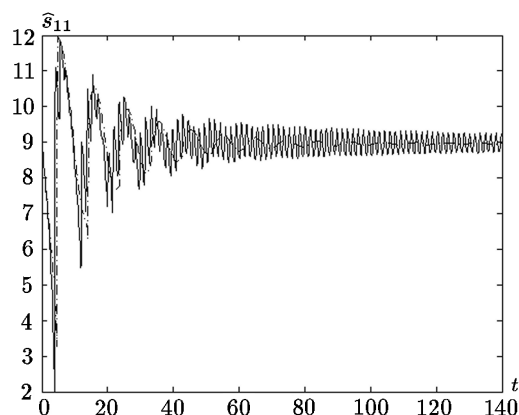


Рис. 5. Оценки второго момента решения СДУ (17) при $m_\xi = 2, \sigma_\xi = 0$ (сплошная линия) и $m_\xi = 0, \sigma_\xi = 2$ (штрих-пунктирная линия)

Замечание 2. Вычисления оценок первого и второго моментов решения СДУ (17) для приведенного в примере 2 варианта “биений” $m_\xi = 2, \sigma_\xi = 0, N_h = 2 \cdot 10^7$, но при большем размере ансамбля моделируемых траекторий $N_{tr} = 10^6$ показали визуальное совпадение графиков этих оценок с соответствующими графиками, приведенными на рисунках 4 и 5 (сплошные линии). Визуальное совпадение графиков наблюдается и при сравнении результатов вычислений оценок при $N_h = 2 \cdot 10^5$ и двух вариантах значений: $N_{tr} = 10^5$ и $N_{tr} = 10^8$. Сглаживания “биений” при увеличении N_{tr} не наблюдается.

Замечание 3. Вычисления оценки второго момента решения СДУ (17) при указанных в приведенном выше примере 1 значениях параметров показали наличие в ее колебаниях “биений”, хотя для оценки математического ожидания на рис. 3 они незаметны.

Замечание 4. Вычисления оценок первого и второго моментов решения СДУ (17) по упрощенной по сравнению с (20)–(22) численной схеме решения СДУ на равномерной временной сетке, когда появление скачка на каждом шаге моделируется с вероятностью λh , при $N_{tr} = 10^5, N_h = 2 \cdot 10^6$ и приведенных в примере 2 значениях параметров СДУ показали визуальное совпадение графиков этих оценок с соответствующими графиками, приведенными на рисунках 4 и 5. Такое совпадение наблюдается также при использовании для моделирования разных генераторов псевдослучайных чисел.

Пример 3. Подавление колебаний осциллятора Ван-дер-Поля пуассоновской составляющей имеет место в том случае, когда значения ее параметров в СДУ (17) удовлетворяют условию $\lambda m_\xi = \omega^2$, т.е. $\tilde{\omega} = 0$. Рис. 6 иллюстрирует подавление колебаний и одновременное возникновение “биений” математического ожидания решения СДУ при $m_\xi = 2, \lambda = 0.125, \omega = 0.5$ (сплошная линия). Период “биений” $T_f \approx 1/\lambda$. Для сравнения на рис. 6 приведен также вариант, когда таких “биений” не наблюдается при $m_\xi = 0.25, \lambda = 8, \omega = \sqrt{2}$ (штриховая линия). Для обоих вариантов $\lambda m_\xi^2 = 0.5$. Значения остальных параметров СДУ: $\mu = 10, b = 0.3, \sigma_\xi = 0$; значения параметров численной схемы: $N_{tr} = 10^5, N_h = 2 \cdot 10^7$.

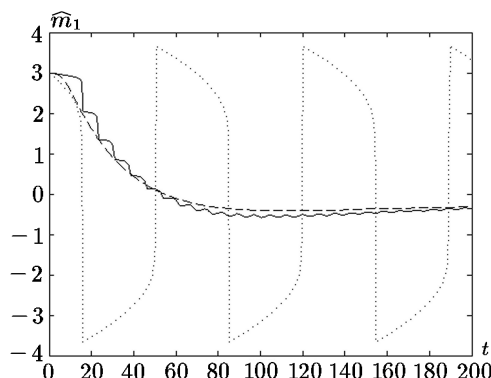


Рис. 6. Оценки математического ожидания решения СДУ (17) в случае подавления колебаний ($\omega^2 = \lambda m_\xi$) при $m_\xi = 2$, $\lambda = 0.125$ (сплошная линия) и $m_\xi = 0.25$, $\lambda = 8$ (штриховая линия). Точечная линия — решение сопутствующей системы ОДУ при $\omega = 0.5$

Заключение

Для линейного осциллятора получено аналитическое выражение автоковариационной функции решения СДУ, позволяющее проводить параметрический анализ оценок функционалов от численного решения СДУ. Проведенные численные исследования влияния пуассоновской составляющей на осциллятор Ван-дер-Поля показали большое разнообразие режимов колебаний оценок моментных функций при разных значениях параметров СДУ. Большие значения $|m_\xi|$ приводят к искажениям их колебаний по сравнению с вариантом нормальной случайной величины скачков при $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi \neq 0$. При $m_\xi > 0$ колебания оценок включают в себя высокочастотную составляющую в виде “биений”, амплитуда которых растет с ростом m_ξ , а при $m_\xi = 0$ и больших значениях σ_ξ они отсутствуют. Установлены предельные соотношения между параметрами пуассоновского процесса, при которых он сходится по распределению к винеровскому.

Литература

1. **Артемов С.С., Марченко М.А., Корнеев В.Д. и др.** Анализ стохастических колебаний методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.
2. **Gitterman M.** Classical harmonic oscillator with multiplicative noise // *Physica A.* — 2005. — Vol. 352. — P. 309–334.
3. **Gitterman M.** New stochastic equation for a harmonic oscillator: Brownian motion with adhesion // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2010. — Vol. 248, № 1. — DOI: 10.1088/1742-6596/248/1/012049
4. **Guo S.S., Er G.K.** The probabilistic solution of stochastic oscillators with even nonlinearity under poisson excitation // *Central European J. of Physics.* — 2012. — Vol. 10, № 3. — P. 702–707.
5. **Er G.K., Zhu H.T., Iu V.P., Kou K.P.** PDF solution of nonlinear oscillators subject to multiplicative Poisson pulse excitation on displacement // *Nonlinear Dynamics.* — 2009. — Vol. 55, iss. 4. — P. 337–348.
6. **Ruoshi Yuan, Xinan Wang, Yian Ma, Bo Yuan, and Ping Ao.** Exploring a noisy van der Pol type oscillator with a stochastic approach // *Physical Review E.* — 2013. — Vol. 87, № 6. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.062109>.
7. **Артемов С.С., Якунин М.А.** Параметрический анализ осциллирующих решений СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими методом Монте-Карло // *Сиб. журн. индустриальной математики.* — 2017. — Т. 20, № 2. — С. 3–14.

8. **Platen E., Bruti-Liberati N.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
9. **Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.
10. **Jacod J., Shiryaev A.N.** Limit Theorems for Stochastic Processes. — Berlin: Springer-Verlag, 2002.
11. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.
12. **Боровков А.А.** Теория вероятностей. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.

Поступила в редакцию 19 ноября 2018 г.

После исправления 19 мая 2019 г.

Принята к печати 16 апреля 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Artem'ev S.S., Marchenko M.A., Korneev V.D. i dr.** Analiz stohasticheskikh kolebaniy metodom Monte-Karlo na superkomp'yuterah. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2016.
2. **Gitterman M.** Classical harmonic oscillator with multiplicative noise // Physica A. — 2005. — Vol. 352. — P. 309–334.
3. **Gitterman M.** New stochastic equation for a harmonic oscillator: Brownian motion with adhesion // J. Phys.: Conf. Ser. — 2010. — Vol. 248, № 1. — DOI: 10.1088/1742-6596/248/1/012049
4. **Guo S.S., Er G.K.** The probabilistic solution of stochastic oscillators with even nonlinearity under poisson excitation // Central European J. of Physics. — 2012. — Vol. 10, № 3. — P. 702–707.
5. **Er G.K., Zhu H.T., Iu V.P., Kou K.P.** PDF solution of nonlinear oscillators subject to multiplicative Poisson pulse excitation on displacement // Nonlinear Dynamics. — 2009. — Vol. 55, iss. 4. — P. 337–348.
6. **Ruoshi Yuan, Xinan Wang, Yian Ma, Bo Yuan, and Ping Ao.** Exploring a noisy van der Pol type oscillator with a stochastic approach // Physical Review E. — 2013. — Vol. 87, № 6. — URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.062109>.
7. **Artem'ev S.S., Yakunin M.A.** Parametricheskii analiz ostsilliruyuschih reshenii SDU s vinerovskoi i puassonovskoi sostavlyayuschimi metodom Monte-Karlo // Sib. zhurn. industrial'noi matematiki. — 2017. — Т. 20, № 2. — S. 3–14.
8. **Platen E., Bruti-Liberati N.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
9. **Tihonov V.I.** Statisticheskaya radiotekhnika. — М.: Радио и svyaz', 1982.
10. **Jacod J., Shiryaev A.N.** Limit Theorems for Stochastic Processes. — Berlin: Springer-Verlag, 2002.
11. **Bulinskii A.V., Shiryaev A.N.** Teoriya sluchainyh protsessov. — М.: Fizmatlit, 2005.
12. **Borovkov A.A.** Teoriya veroyatnostei. — М.: Editorial URSS, 1999.