УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ В СПЛАВАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

А. А. Роговой, О. С. Столбова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mail: rogovoy@icmm.ru

С использованием формализованного подхода к построению определяющих соотношений сложных сред при конечных деформациях записано уравнение состояния для сплава с памятью формы. Полученные соотношения протестированы на связанных упруго-неупругих краевых задачах о деформировании образца из материала с памятью формы при прямом и обратном мартенситных превращениях.

Ключевые слова: конечные деформации, память формы, связанная задача.

Введение. В работах [1–6] предложен подход к построению моделей, описывающих поведение сложных сред при конечных деформациях и структурных изменениях в материалах и удовлетворяющих принципам термодинамики и объективности. С использованием процедуры наложения малых деформаций на конечные деформации описана кинематика термоупруго-неупругого процесса. Термоупруго-неупругий процесс трактуется как упругий процесс с напряженной отсчетной конфигурацией, в качестве которой принимается промежуточная упругая конфигурация, близкая к текущей и получающаяся из нее при малой упругой разгрузке. Для формального описания указанной близости в вектор перемещения, определяющий положение точек в текущей конфигурации относительно промежуточной конфигурации, вводится малый положительный параметр. Это позволяет представить все кинематические величины в виде рядов по данному малому параметру, в которых удержаны только линейные слагаемые, и в результате построить для любого закона упругости определяющие уравнения с начальными напряжениями и функциями отклика материала на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации. Предельным переходом при стремлении промежуточной конфигурации к текущей это определяющее уравнение сводится к точному эволюционному уравнению с объективной производной, следующей из этого предельного перехода.

В рамках указанного подхода в настоящей работе строятся корректные определяющие уравнения для конечных упруго-неупругих деформаций материалов, претерпевающих

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (коды проектов НШ-8055.2006.1, НШ-3717.2008.1, НШ-7529.2010.1, НШ-5389.2012.1), в рамках программ фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (коды проектов 09-Т-1-1006, 12-Т-1-1004), программ совместных фундаментальных исследований, выполняемых УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН (коды проектов 09-С-1-1008, 12-С-1-1015), и при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (государственный контракт № 02.740.11.0442) и Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-01-00055, 12-01-00419).

мартенситно-аустенитный переход в процессе деформирования и изменения температуры. Тестирование этих уравнений осуществляется на связанных упруго-неупругих краевых задачах о деформировании тонкостенных конструкций. Считается, что изменение однородной температуры окружающей среды происходит достаточно медленно, поэтому в любой момент времени температура материала также является однородной и равна температуре окружающей среды. Это позволяет не рассматривать процесс установления температуры (уравнение теплопроводности не приводится).

1. Основные соотношения. В данном пункте приводятся общие определяющие и кинематические соотношения, которые конкретизируются для сплавов с памятью формы.

1.1. *Определяющее соотношение.* Среди эквивалентных форм представления определяющих соотношений для простого материала [1, 2], удовлетворяющих принципу объективности [7], выберем форму

$$T = J^{-1} F \cdot \tilde{g}(C_E, \Theta, q) \cdot F^{\mathrm{T}}. \tag{1.1}$$

Здесь T — тензор истинных напряжений; $\tilde{g}(C_E, \Theta, q)$ — функция отклика материала (тензор второго ранга); $C_E = F_E^{\mathrm{T}} \cdot F_E$ — мера Коши — Грина упругих деформаций; F_E — упругий градиент места; F — полный градиент места; $J = I_3(F)$ — третий инвариант F (якобиан, определяющий относительное изменение объема); Θ — абсолютная температура; q — скалярный параметр процесса (в сплавах с памятью формы (СПФ) — доля мартенситной фазы в объеме материала, зависящая от температуры). В представлении (1.1) тензор $\tilde{g}$, известный как второй (симметричный) тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, зависит от физико-механических свойств материала, характеризует его отклик на чистую деформацию, описываемую мерой деформации Коши — Грина C_E, определяется на элементарной площадке недеформированной начальной конфигурации и выражается через упругий потенциал $W(C_E, \Theta, q)$ с помощью соотношения $\tilde{g} = 2(\partial W(C_E, \Theta, q)/\partial C_E)$. При этом от величин Θ и q зависят только параметры функционального соотношения $W(C_E)$. Например, выражение для упрощенного потенциала Мурнагана с параметрами a и b записывается в виде $W = a(\Theta, q)[I_1(C_E) - 3] + b(\Theta, q)[I_2(C_E) - 3]$. Преобразование правой части (1.1) позволяет определить тензор T в текущей конфигурации. Свойства среды зависят от структуры материала и могут изменяться при деформировании и действии других физических полей. Элементарная ориентированная площадка определяется только кинематикой процесса.

В работах [1, 2] вводятся начальная $\varkappa_0$, промежуточная $\varkappa_*$ и текущая (актуальная) $\varkappa$ конфигурации, причем конфигурации $\varkappa_*$ и $\varkappa$ близки. Эта близость характеризуется малым параметром ε, являющимся удобным средством формализации малости не только вектора перемещений, но и других величин, определяемых через перемещения. В работе [3] показано, что относительно промежуточной конфигурации $\varkappa_*$ соотношение (1.1) с точностью до линейных по ε слагаемых представляется в виде

$$\begin{gathered} T = T_* + \varepsilon T', \\ T' = -I_1(e) T_* + h \cdot T_* + T_* \cdot h^{\mathrm{T}} + \theta (T_{,\Theta})_* + q' (T_{,q})_* + L_*^{\mathrm{IV}} \cdot\cdot\, e_E. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь T_* — тензор истинных напряжений в промежуточной конфигурации; $h = (\overset{*}{\nabla} \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}$ — градиент вектора малых полных перемещений; $\overset{*}{\nabla}$ — оператор Гамильтона относительно промежуточной конфигурации; $e = (h + h^{\mathrm{T}})/2$, e_E — тензоры малых полных и упругих деформаций относительно промежуточной конфигурации; $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений из промежуточной конфигурации в близкую текущую; $I_1(e)$ — первый инвариант e; θ — приращение температуры ($\Theta = \Theta_* + \varepsilon\theta$); q' — приращение q ($q = q_* + \varepsilon q'$); $(T_{,\alpha})_* \equiv (\partial T/\partial\alpha)_*$; величины с индексом “$*$” соответствуют промежуточной конфигурации; L_*^{IV} —

тензор четвертого ранга, определяющий отклик материала на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации (см. [3]):

$$L_*^{\rm IV} = 4J_*^{-1} F_* \cdot \Big(F_* \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W(C_E, \Theta_*, q_*)}{\partial C_E^2}\Big|_{C_E = C_{E*}} \overset{2}{*} F_*^{\rm т} \Big) \cdot F_*^{\rm т}, \tag{1.3}$$

$A \overset{3}{\circ} B^{\rm IV}$ — операция скалярного умножения слева тензора второго ранга A на третий базисный вектор тензора четвертого ранга $B^{\rm IV}$; $B^{\rm IV} \overset{2}{*} A$ — операция скалярного умножения справа тензора второго ранга A на второй базисный вектор тензора четвертого ранга $B^{\rm IV}$. Тензор малых упругих деформаций представляется через тензор малых температурных деформаций e_Θ и тензор малых фазовых деформаций e_{Ph}:

$$e_E = e - e_\Theta - e_{Ph}. \tag{1.4}$$

1.2. *Кинематические соотношения.* Согласно [3, 5] кинематические тензоры определяются выражениями

$$F = F_E \cdot F_{Ph} \cdot F_\Theta; \tag{1.5}$$

$$F_E = [g + \varepsilon(e_E + d_E)] \cdot F_{E*} = (g + \varepsilon h_E) \cdot F_{E*}; \tag{1.6}$$

$$F_{Ph} = [g + \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot (e_{Ph} + d_{Ph}) \cdot F_{E*}] \cdot F_{Ph*} = (g + \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot h_{Ph} \cdot F_{E*}) \cdot F_{Ph*}; \tag{1.7}$$

$$F_\Theta = [g + \varepsilon F_{Ph*}^{-1} \cdot F_{E*}^{-1} \cdot (e_\Theta + d_\Theta) \cdot F_{E*} \cdot F_{Ph*}] \cdot F_{\Theta*} = \\ = (g + \varepsilon F_{Ph*}^{-1} \cdot F_{E*}^{-1} \cdot h_\Theta \cdot F_{E*} \cdot F_{Ph*}) \cdot F_{\Theta*}. \tag{1.8}$$

Здесь F — полный градиент места; F_{Ph} — неупругий градиент места, зависящий от фазовых деформаций; F_Θ — градиент места, зависящий от температурных деформаций; g — единичный тензор; h_E, h_{Ph}, h_Θ — градиенты вектора малых упругих, фазовых и температурных перемещений; d_E, d_{Ph}, d_Θ — тензоры малых упругих, фазовых и температурных поворотов относительно промежуточной конфигурации. В работе [4] показано, что градиенты места F_{Ph} и F_Θ должны соответствовать чистым деформациям без вращений: $F_{Ph} = U_{Ph}$, $F_\Theta = U_\Theta$, т. е. в полярных разложениях $F_{Ph} = R_{Ph} \cdot U_{Ph}$, $F_\Theta = R_\Theta \cdot U_\Theta$ ортогональные тензоры R_{Ph} и R_Θ должны быть единичными: $R_{Ph} = R_\Theta = g$.

Как известно, тензор деформации скорости $D = (l + l^{\rm т})/2$ ($l = \dot F \cdot F^{-1} = (\tilde\nabla \boldsymbol v)^{\rm т}$; $\boldsymbol v$ — скорость перемещения; $\tilde\nabla$ — оператор Гамильтона относительно текущей конфигурации) связан с тензором деформаций Альманси $\tilde E = (g - A)/2$ ($A = F^{-\rm т} \cdot F^{-1}$ — мера деформаций Альманси) соотношением $D = \tilde E^{CR}$, где $\tilde E^{CR} = \dot{\tilde E} + l^{\rm т} \cdot \tilde E + \tilde E \cdot l$ — объективная производная Коттера — Ривлина. Используя эти соотношения, можно показать, что тензору деформации скорости D_E соответствует тензор деформации Альманси $\tilde E_E = (g - \tilde A_E)/2$, где $\tilde A_E = A_E = F_E^{-\rm т} \cdot F_E^{-1}$. Тензор D_{Ph} соответствует тензору $\tilde E_{Ph}$, который определяется следующим образом:

$$\tilde E_{Ph} = (g - \tilde A_{Ph})/2, \\ \tilde A_{Ph} = F_{E*}^{-\rm т} \cdot A_{Ph} \cdot F_{E*}^{-1}, \qquad A_{Ph} = F_{Ph}^{-\rm т} \cdot F_{Ph}^{-1}. \tag{1.9}$$

Аналогично тензор D_Θ соответствует тензору $\tilde E_\Theta$:

$$\tilde E_\Theta = (g - \tilde A_\Theta)/2, \\ \tilde A_\Theta = F_{E*}^{-\rm т} \cdot F_{Ph*}^{-\rm т} \cdot A_\Theta \cdot F_{Ph*}^{-1} \cdot F_{E*}^{-1}, \qquad A_\Theta = F_\Theta^{-\rm т} \cdot F_\Theta^{-1}.$$

В качестве примера рассмотрим соотношения (1.9). Выражение для тензора, обратного F_{Ph}, следует из (1.7) и имеет вид $F_{Ph}^{-1} = F_{Ph*}^{-1} \cdot (g - \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot h_{Ph} \cdot F_{E*})$, что нетрудно проверить ($F_{Ph} \cdot F_{Ph}^{-1} = F_{Ph}^{-1} \cdot F_{Ph} = g$ с точностью до линейных слагаемых относительно ε). С учетом этого выражения, сохраняя в (1.9) только линейные члены по ε, получаем

$$\tilde{A}_{Ph} = \tilde{A}_{Ph*} - \varepsilon h_{Ph}^{\mathrm{т}} \cdot \tilde{A}_{Ph*} - \varepsilon \tilde{A}_{Ph*} \cdot h_{Ph}. \tag{1.10}$$

Представляя это соотношение в виде $\tilde{A}_{Ph} - \tilde{A}_{Ph*} \equiv \Delta\tilde{A}_{Ph} = -\Delta h_{Ph}^{\mathrm{т}} \cdot \tilde{A}_{Ph*} - \tilde{A}_{Ph*} \cdot \Delta h_{Ph}$ (вместо ε использовано обозначение Δ — приращение соответствующей величины), деля его на время перехода из промежуточной конфигурации в текущую Δt и устремляя промежуточную конфигурацию к текущей, имеем

$$\dot{\tilde{A}}_{Ph} = -l_{Ph}^{\mathrm{т}} \cdot \tilde{A}_{Ph} - \tilde{A}_{Ph} \cdot l_{Ph}. \tag{1.11}$$

При этом учтено, что $\tilde{A}_{Ph*} \to \tilde{A}_{Ph}$, $\Delta\tilde{A}_{Ph}/\Delta t \to \dot{\tilde{A}}_{Ph}$ и $\Delta h_{Ph}/\Delta t \to l_{Ph}$. Так как

$$\tilde{E}_{Ph}^{CR} = \dot{\tilde{E}}_{Ph} + l_{Ph}^{\mathrm{т}} \cdot \tilde{E}_{Ph} + \tilde{E}_{Ph} \cdot l_{Ph},$$

то, подставляя в это равенство выражения для $\tilde{E}_{Ph}$ из (1.9) и $\dot{\tilde{E}}_{Ph} = -\dot{\tilde{A}}_{Ph}/2$ из (1.11), получаем

$$D_{Ph} = \tilde{E}_{Ph}^{CR} = (l_{Ph} + l_{Ph}^{\mathrm{т}})/2.$$

Таким образом, сформулированное выше соответствие доказано. Заметим, что согласно [3, 4] $l_{Ph} = F_E \cdot \dot{F}_{Ph} \cdot F_{Ph}^{-1} \cdot F_E^{-1} = (\tilde{\nabla} \boldsymbol{v}_{Ph})^{\mathrm{т}}$.

Используя соотношение (1.10), тензор фазовых деформаций Альманси $\tilde{E}_{Ph}$ в (1.9), согласованный с тензором деформаций скорости D_{Ph}, целесообразно представить в виде

$$\tilde{E}_{Ph} = \tilde{E}_{Ph*} + \varepsilon(h_{Ph}^{\mathrm{т}} \cdot \tilde{A}_{Ph*} + \tilde{A}_{Ph*} \cdot h_{Ph})/2, \tag{1.12}$$

где $\tilde{A}_{Ph*} = F_{E*}^{-\mathrm{т}} \cdot A_{Ph*} \cdot F_{E*}^{-1}$; $A_{Ph*} = F_{Ph*}^{-\mathrm{т}} \cdot F_{Ph*}^{-1}$. В случае малых деформаций промежуточная конфигурация совпадает с начальной. В результате $\tilde{A}_{Ph*} = g$, тензор $\tilde{E}_{Ph*}$ становится нулевым и соотношение (1.12) принимает известный вид $\tilde{E}_{Ph} = \varepsilon e_{Ph} = \varepsilon(h_{Ph}^{\mathrm{т}} + h_{Ph})/2$.

1.3. *Сплавы с памятью формы.* Как отмечено в работе [8], термомеханическое поведение СПФ характеризуется рядом эффектов и явлений, связанных с происходящими в этих материалах фазовыми и структурными превращениями: эффект накопления деформаций при прямом (мартенситном) превращении, явление ориентированного превращения, монотонная, реверсивная и обратимая память формы, резкое изменение при фазовых переходах упругих модулей и внутреннего трения, выделение или поглощение достаточно больших количеств латентного тепла фазовых превращений. Различные варианты моделей СПФ предложены в работах [9–18] (см. также библиографию к ним). Эти модели позволяют с различной степенью полноты описать указанные выше эффекты и явления. В данной работе используется наиболее полная модель, предложенная в работах [14–18].

Вводится скалярная внутренняя переменная q, трактуемая как доля низкотемпературной (мартенситной) фазы в объеме материала (при $q = 0$ материал находится полностью в аустенитном состоянии (высокотемпературная фаза), при $q = 1$ — полностью в мартенситном). Для того чтобы аппроксимировать диаграмму фазового перехода (зависимости объемной доли мартенситной фазы от температуры и напряжений при прямом $A \to M$ (аустенит — мартенсит) и обратном $M \to A$ (мартенсит — аустенит) превращениях (рис. 1)), используем следующие соотношения [17]:

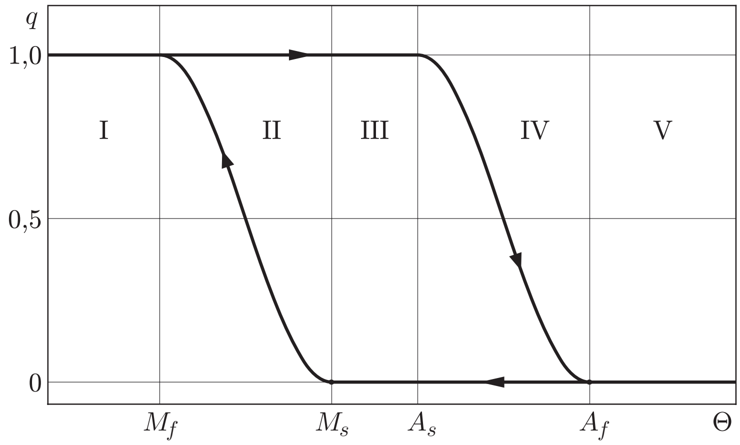

Рис. 1. Зависимость объемной доли мартенситной фазы от температуры при прямом и обратном превращениях:
I–V — области мартенситного и аустенитного состояний при прямом и обратном превращениях

$$q = \psi(\xi), \quad \psi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leqslant 0, \\ \psi(\xi), & 0 < \xi < 1, \quad \psi(\xi) = (1 - \cos(\pi\xi))/2, \\ 1, & \xi \geqslant 1; \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered} \xi = \frac{M_s^\sigma - \Theta}{M_s - M_f}, \quad M_f^\sigma \leqslant \Theta \leqslant M_s^\sigma \quad (A \to M,\ dq > 0), \\ \xi = 1 + \frac{A_s^\sigma - \Theta}{A_f - A_s}, \quad A_s^\sigma \leqslant \Theta \leqslant A_f^\sigma \quad (M \to A,\ dq < 0). \end{gathered} \tag{1.14}$$

Здесь M_s, M_f, A_s, A_f — температуры начала и завершения прямого и обратного мартенситных превращений в свободном от напряжений материале; M_s^σ, M_f^σ, A_s^σ, A_f^σ — температуры начала и завершения прямого и обратного мартенситных превращений в нагруженном материале. При прямом переходе $A \to M$ (см. рис. 1) материал находится полностью в аустенитном состоянии в области $\mathrm{III} \cup \mathrm{IV} \cup \mathrm{V}$; область II переходная: в ней существуют и мартенситная, и аустенитная фазы с различными объемными долями; в области I материал находится полностью в мартенситном состоянии. При обратном переходе $(M \to A)$ материал находится полностью в мартенситном состоянии в области $\mathrm{I} \cup \mathrm{II} \cup \mathrm{III}$; область IV переходная; в области V материал находится полностью в аустенитном состоянии.

Будем использовать линейные зависимости характерных температур от интенсивности напряжений

$$\begin{aligned} M_s^\sigma &= M_s + k\,\sigma_i, \qquad & M_f^\sigma &= M_f + k\,\sigma_i, \\ A_s^\sigma &= A_s + k\,\sigma_i, \qquad & A_f^\sigma &= A_f + k\,\sigma_i, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где k — материальная константа (для СПФ в задачах, рассматриваемых в п. **2**, $k = 0{,}1$ К/МПа); $\sigma_i = \sqrt{(3/2)\, S \cdot\cdot S}$ — интенсивность напряжений; $S = T - I_1(T)g/3$ — девиатор тензора истинных напряжений. Тогда, представляя выражения для q, ξ, Θ, σ_i в виде

$$q = q_* + \varepsilon q', \quad \xi = \xi_* + \varepsilon \xi', \quad \Theta = \Theta_* + \varepsilon\theta, \quad \sigma_i = (\sigma_i)_* + \varepsilon\sigma_i', \tag{1.16}$$

где штрихом отмечены приращения соответствующих величин при переходе из промежуточной конфигурации в близкую к ней текущую (для приращения температуры использовано обозначение θ), при $0 < \xi < 1$ из (1.13)–(1.15) получаем

$$
\begin{gathered}
q_* = 0{,}5(1 - \cos(\pi\xi_*)), \qquad q' = 0{,}5\pi\xi' \sin(\pi\xi_*),\\
\xi_* = \begin{cases} \dfrac{M_s + k(\sigma_i)_* - \Theta_*}{M_s - M_f}, & A \to M,\ q' > 0,\\[2mm] 1 + \dfrac{A_s + k\,(\sigma_i)_* - \Theta_*}{A_f - A_s}, & M \to A,\ q' < 0, \end{cases}\\
\xi' = \xi_{,\Theta}\theta + \xi_{,\sigma_i}\sigma_i',\\
\xi_{,\Theta} = -\frac{1}{M_s - M_f}, \quad \xi_{,\sigma_i} = \frac{k}{M_s - M_f}, \quad A \to M,\ q' > 0,\\
\xi_{,\Theta} = -\frac{1}{A_f - A_s}, \quad \xi_{,\sigma_i} = \frac{k}{A_f - A_s}, \quad M \to A,\ q' < 0.
\end{gathered} \tag{1.17}
$$

Представляя девиатор тензора напряжений в виде $S = S_* + \varepsilon S'$, подставляя это выражение в соотношение для интенсивности напряжений, разлагая полученное соотношение в ряд по ε и сохраняя только линейные относительно этого параметра слагаемые, имеем

$$
(\sigma_i)_* = \sqrt{(3/2)\, S_* \cdot\cdot S_*}, \qquad \sigma_i' = \frac{3\, S_* \cdot\cdot S'}{2(\sigma_i)_*} = \frac{3\, S_* \cdot\cdot T'}{2(\sigma_i)_*}, \tag{1.18}
$$

где $S_* = T_* - I_1(T_*)g/3$ и учтено, что $S_* \cdot\cdot S' = S_* \cdot\cdot [T' - I_1(T')g/3] = S_* \cdot\cdot T'$ (определение T_* и T' см. в (1.2)).

Уравнения, описывающие развитие фазовых деформаций (без учета реверсивного эффекта памяти формы при обратных превращениях), приведены в [15] для малых деформаций. Обобщая эти соотношения на конечные деформации с учетом выражений, приведенных в конце подп. 1.2, имеем

$$
D_{Ph} = \dot{e}_{Ph} = (\beta g + c_0 S + a_0 \tilde{E}_{Ph})\dot{q}, \quad \dot{q} > 0; \tag{1.19}
$$

$$
D_{Ph} = \dot{e}_{Ph} = \Big(\frac{a_0 \tilde{E}^{(0)}_{Ph}}{\exp(a_0 q_0) - 1} + a_0 \tilde{E}_{Ph}\Big)\dot{q}, \quad \dot{q} < 0. \tag{1.20}
$$

Здесь β, c_0, a_0 — параметры материала (для СПФ в задачах, рассматриваемых в п. **2**, $\beta = 1{,}17 \cdot 10^{-3}$, $c_0 = 0{,}283 \cdot 10^{-3}$ МПа$^{-1}$, $a_0 = 0{,}718$); $\tilde{E}_{Ph}$ — текущая фазовая деформация, определяемая соотношением (1.12); q_0, $\tilde{E}^{(0)}_{Ph}$ — значения параметра мартенситной фазы и фазовой деформации в начальной точке процесса обратного превращения. Соотношения (1.19), (1.20) являются корректными: во-первых, они удовлетворяют принципу объективности, во-вторых, кинематические тензоры D_{Ph} и $\tilde{E}_{Ph}$, содержащиеся в этих соотношениях, согласованы. В терминах малых, но конечных величин соотношения (1.19), (1.20) представляются в виде

$$
\varepsilon e_{Ph} = (\beta g + c_0 S_* + a_0 \tilde{E}_{Ph*})\varepsilon q', \quad q' > 0; \tag{1.21}
$$

$$
\varepsilon e_{Ph} = \Big(\frac{a_0 \tilde{E}^{(0)}_{Ph}}{\exp(a_0 q_0) - 1} + a_0 \tilde{E}_{Ph*}\Big)\varepsilon q', \quad q' < 0 \tag{1.22}
$$

и определяют одну из составляющих в выражении (1.4). Для еще одной составляющей в выражении (1.4) — тензора малых температурных деформаций — примем закон линейного температурного расширения $e_\Theta = \beta_\Theta \theta g$, где β_Θ — коэффициент линейного температурного расширения.

В соотношения (1.6)–(1.8) входят не только тензоры малых упругих e_E, фазовых e_{Ph} и температурных e_Θ деформаций, но и тензоры малых упругих d_E, фазовых d_{Ph} и температурных d_Θ поворотов относительно промежуточной конфигурации. Согласно [5] для определения d_{Ph} используем соотношение

$$K_* \cdot d_{Ph} + d_{Ph} \cdot K_* = K_* \cdot e_{Ph} - e_{Ph} \cdot K_*, \quad K_* = F_* \cdot F_{E*}^{\mathrm{T}}, \tag{1.23}$$

которое позволяет выразить d_{Ph} через e_{Ph}. В результате получаем $d_E = d - d_{Ph}$, так как в соответствии с работой [5] $d_\Theta = 0$, если e_Θ определяется законом линейного температурного расширения.

Упругое поведение материала будем описывать упрощенным законом Синьорини [19, 20], используемым при умеренных упругих деформациях, которые могут иметь место, в частности, в металлах. В этом законе второй (симметричный) тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа P_{II}, имеющий смысл функции упругого отклика материала $\tilde{g}$ в (1.1), принимает вид

$$P_{\mathrm{II}} \equiv \tilde{g} = \sqrt{I_3(C_E)}\,[(k_1 + k_2)C_E^{-1} - k_2 C_E^{-2}\,], \tag{1.24}$$

где

$$\begin{gathered} k_1 = \Lambda(3 - I_1(C_E^{-1}))/2 + (\Lambda + G)(3 - I_1(C_E^{-1}))^2/8, \\ k_2 = G - (\Lambda + G)(3 - I_1(C_E^{-1}))/2, \end{gathered} \tag{1.25}$$

I_3 — третий главный инвариант соответствующего тензора; Λ, G — параметры материала, имеющие смысл параметра Ламе и модуля сдвига линейной упругости.

В работах [11, 21] на основе гипотезы об аддитивном представлении потенциала Гиббса, слагаемые которого пропорциональны объемным долям мартенситной и аустенитной фаз, зависимости упругих модулей от q ($0 \leqslant q \leqslant 1$) определяются соотношениями

$$\frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}, \qquad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A},$$

из которых следует

$$E(q) = \frac{E_A}{1 + (\gamma_E - 1)q}, \qquad \gamma_E = \frac{E_A}{E_M},$$

$$G(q) = \frac{G_A}{1 + (\gamma_G - 1)q}, \qquad \gamma_G = \frac{G_A}{G_M}.$$

Здесь E_M, G_M, E_A, G_A — значения модуля Юнга и модуля сдвига для материала в мартенситном и аустенитном состояниях соответственно.

В настоящей работе используется зависимость упругих модулей от q

$$Z(q) = \begin{cases} Z_A, & q = 0, \\ Z_A - (Z_A - Z_M)(1 - \cos(\pi q))/2, & 0 < q < 1, \\ Z_M, & q = 1 \end{cases} \tag{1.26}$$

($Z = E$ или $Z = G$), которая имеет непрерывную производную по q. При этом не используется гипотеза аддитивности потенциала. В общем случае Z_A при $q = 0$ и Z_M при $q = 1$ являются функциями температуры. Представляя выражение для Z в виде

$$Z = Z_* + \varepsilon Z', \tag{1.27}$$

где штрихом отмечено приращение Z при переходе из промежуточной конфигурации в близкую текущую, при $0 < q < 1$ из (1.26) получаем

$$Z_* = Z_A - (Z_A - Z_M)(1 - \cos(\pi q_*))/2, \qquad Z' = (Z_{,q})_* q',$$
$$(Z_{,q})_* = \pi(Z_A - Z_M)\sin(\pi q_*)/2. \tag{1.28}$$

Используя известное представление параметра Ламе Λ через E и G, с учетом (1.27), (1.28) имеем

$$\Lambda = \Lambda_* + \varepsilon\Lambda', \quad \Lambda_* = \Lambda(q_*) = \frac{[E(q_*) - 2G(q_*)]G(q_*)}{3G(q_*) - E(q_*)}, \quad \Lambda' = (\Lambda_{,q})_* q',$$
$$(\Lambda_{,q})_* = \frac{[(E_{,q})_* - 2(G_{,q})_*]G_*}{3G_* - E_*} + \Lambda_* \frac{(G_{,q})_*}{G_*} + \Lambda_* \frac{[(E_{,q})_* - 3(G_{,q})_*]G_*}{3G_* - E_*}. \tag{1.29}$$

Поскольку в выражении для тензора напряжений, определенного в (1.24), параметры материала Λ и G зависят от температуры и объемной доли мартенситной фазы q (см. (1.26), (1.29)), а q в свою очередь зависит от температуры и интенсивности напряжений (см. (1.13)–(1.15)), учитывая зависимость (1.4), определяющее соотношение (1.2) для СПФ запишем в виде

$$T = T_* + \varepsilon T',$$
$$T' = -I_1(e)T_* + h \cdot T_* + T_* \cdot h^{\mathrm{т}} + \theta[Y_*(T, a(q), \Lambda, \Theta) + Y_*(T, a(q), G, \Theta)] +$$
$$+ \sigma_i'[Y_*(T, 0, \Lambda, \sigma_i) + Y_*(T, 0, G, \sigma_i)] + L_*^{\mathrm{IV}} \cdot\cdot (e - e_{Ph} - e_\Theta). \tag{1.30}$$

Здесь $Y_*(\Phi, a, x, y) = (\Phi_{,x})_*[a(q_*)(x_{,\Theta})_* + (x_{,q})_*(q_{,y})_*]$ — тензорная функция тензорного аргумента Φ (тензор второго ранга) и скалярных аргументов $a(q_*)$, x, y, причем первое слагаемое в квадратных скобках учитывает зависимость от температуры величины x при неизменном параметре q_* ($q_* = 0$ или $q_* = 1$ в (1.26)): $a(q_*) = 1$ при $q_* = 0$ или $q_* = 1$ и $a(q_*) = 0$ при $0 < q_* < 1$, а второе слагаемое учитывает зависимость величины x от q_* при $0 < q_* < 1$. Принимая во внимание выражения (1.3), (1.24), (1.25), свертку $L_*^{\mathrm{IV}} \cdot\cdot e_E$ можно представить в виде

$$L_*^{\mathrm{IV}} \cdot\cdot e_E = [(k_1)_* + (k_2)_*][(C_1 \cdot\cdot e_E)C_1 - 2C_1 \cdot e_E \cdot C_1] -$$
$$- (k_2)_*[(C_2 \cdot\cdot e_E)C_1 + (C_1 \cdot\cdot e_E)C_2 - 2C_1 \cdot e_E \cdot C_2 - 2C_2 \cdot e_E \cdot C_1] +$$
$$+ (\Lambda_* + G_*)(C_2 \cdot\cdot e_E)C_2, \tag{1.31}$$

где $C_1 = F_* \cdot C_{E*}^{-1} \cdot F_*^{\mathrm{т}}$; $C_2 = F_* \cdot C_{E*}^{-2} \cdot F_*^{\mathrm{т}}$.

В соотношении (1.30) приращение напряжения T' зависит от величины σ_i', которая в соответствии с (1.18) в свою очередь зависит от T'. Эту связь можно учесть, подставляя в (1.18) выражение для T' из (1.30), в которое входит величина σ_i', зависящая от свертки $S_* \cdot\cdot T'$. В результате получаем уравнение для определения этой свертки. Тогда предпоследнее слагаемое в выражении для T' в (1.30) принимает вид

$$\sigma_i' A_*(T) = \frac{3A_*(T)}{2(\sigma_i)_* - 3\, S_* \cdot\cdot A_*(T)}\, S_* \cdot\cdot [-3S_* I_1(e) + h \cdot T_* + T_* \cdot h^{\mathrm{т}} +$$
$$+ \theta B_*(T) + L_*^{\mathrm{IV}} \cdot\cdot (e - e_{Ph} - e_\Theta)], \tag{1.32}$$

где $A_*(T) = Y_*(T, 0, \Lambda, \sigma_i) + Y_*(T, 0, G, \sigma_i)$; $B_*(T) = Y_*(T, a(q_*), \Lambda, \Theta) + Y_*(T, a(q_*), G, \Theta)$.

Получим рекуррентные выражения типа (1.30) для производных $T_{,\Lambda}$ и $T_{,G}$, содержащихся в тензорной функции Y_* в (1.30). Заметим, что $\tilde g_{,\Lambda} = \tilde g$ при $\Lambda = 1$, $G = 0$ и $\tilde g_{,G} = \tilde g$ при $\Lambda = 0$, $G = 1$. Следовательно, в (1.30) $Y_*(\Phi, a(q_*), x, y) = 0$. Тогда

$$T_{,\Lambda} = [1 - \varepsilon I_1(e)](T_{,\Lambda})_* + \varepsilon h \cdot (T_{,\Lambda})_* + \varepsilon (T_{,\Lambda})_* \cdot h^{\text{т}} + \varepsilon (L^{\text{IV}}_{,\Lambda})_* \cdot\cdot (e - e_{Ph} - e_\Theta), \qquad (L^{\text{IV}}_{,\Lambda})_* = L^{\text{IV}}_*\big|_{\Lambda=1,\, G=0}; \tag{1.33}$$

$$T_{,G} = [1 - \varepsilon I_1(e)](T_{,G})_* + \varepsilon h \cdot (T_{,G})_* + \varepsilon (T_{,G})_* \cdot h^{\text{т}} + \varepsilon (L^{\text{IV}}_{,G})_* \cdot\cdot (e - e_{Ph} - e_\Theta), \qquad (L^{\text{IV}}_{,G})_* = L^{\text{IV}}_*\big|_{\Lambda=0,\, G=1}. \tag{1.34}$$

2. Вариационная постановка и решения краевых задач. Применяя стандартную процедуру Галеркина к уравнениям равновесия и граничным условиям в напряжениях, а также учитывая связи, наложенные на перемещения на поверхности S_u, получаем известную слабую (вариационную) постановку задачи в лагранжевой формулировке для текущей конфигурации в любой момент времени t

$$\int\limits_S \boldsymbol{Q} \cdot \delta \boldsymbol{U}\, dS + \int\limits_V \rho \boldsymbol{K} \cdot \delta \boldsymbol{U}\, dV - \int\limits_V T \cdot\cdot \tilde\nabla \delta \boldsymbol{R}\, dV = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\boldsymbol{Q}$ — вектор поверхностных сил, заданных в текущей конфигурации на части поверхности S, ограничивающей объем V; $\boldsymbol{K}$ — вектор массовых сил; $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}$ — вектор перемещений из начальной конфигурации в текущую; $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-векторы положения точек тела в текущей и начальной конфигурациях соответственно; δ — символ вариации.

Поверхность S и объем V в текущей конфигурации в общем случае неизвестны. Поэтому уравнение (2.1) следует переформулировать по отношению к какой-либо известной конфигурации. В частности, по отношению к начальной конфигурации (2.1) имеет вид

$$\int\limits_{S_0} \boldsymbol{Q}_0 \cdot \delta \boldsymbol{U}\, dS_0 + \int\limits_{V_0} \rho_0 \boldsymbol{K} \cdot \delta \boldsymbol{U}\, dV_0 - \frac{1}{2} \int\limits_{V_0} P_{\text{II}} \cdot\cdot \delta C\, dV_0 = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $C = F^{\text{т}} \cdot F$ — мера Коши — Грина полных деформаций; $\boldsymbol{Q}_0 = J\sqrt{\boldsymbol{n} \cdot C^{-1} \cdot \boldsymbol{n}}\; \boldsymbol{Q}$ — вектор сил, отнесенных к единичной площади поверхности S_0, ограничивающей объем V_0 в начальной конфигурации; $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности в начальной конфигурации.

При отсутствии массовых и поверхностных сил вариационное уравнение (2.2) сводится к равенству

$$\int\limits_{V_0} P_{\text{II}} \cdot\cdot \delta C\, dV_0 = 0. \tag{2.3}$$

Учитывая, что $P_{\text{II}} = J F^{-1} \cdot T \cdot F^{-\text{т}}$, из соотношений (1.30), (1.32) получаем

$$P_{\text{II}} = P_{\text{II}*} + \varepsilon \Big\{ \theta B_*(P_{\text{II}}) + \frac{3A_*(P_{\text{II}})}{2(\sigma_i)_* - 3\, S_* \cdot\cdot A_*(T)} \,[-2(\sigma_i)_*^2 I_1(e) + 2\, S_* \cdot\cdot (T_* \cdot h^{\text{т}}) + {} + \theta\, S_* \cdot\cdot B_*(T) + S_* \cdot\cdot L^{\text{IV}}_* \cdot\cdot (e - e_{Ph} - e_\Theta)] + J_* F_*^{-1} \cdot (L^{\text{IV}}_* \cdot\cdot (e - e_{Ph} - e_\Theta)) \cdot F_*^{-\text{т}} \Big\}.$$

В этом соотношении одним из аргументов тензорных функций A_* и B_* являются производные $P_{\text{II},\Lambda}$ и $P_{\text{II,G}}$, которые нетрудно получить из выражений (1.33), (1.34):

$$P_{\text{II},\Lambda} = (P_{\text{II},\Lambda})_* + \varepsilon J_* F_*^{-1} \cdot [(L^{\text{IV}}_{,\Lambda})_* \cdot\cdot (e - e_{Ph} - e_\Theta)] \cdot (F_*^{-})^{\text{т}}, \quad (L^{\text{IV}}_{,\Lambda})_* = L^{\text{IV}}_*\big|_{\Lambda=1,\, G=0},$$

$$P_{\text{II,G}} = (P_{\text{II,G}})_* + \varepsilon J_* F_*^{-1} \cdot [(L^{\text{IV}}_{,G})_* \cdot\cdot (e - e_{Ph} - e_\Theta)] \cdot (F_*^{-})^{\text{т}}, \quad (L^{\text{IV}}_{,G})_* = L^{\text{IV}}_*\big|_{\Lambda=0,\, G=1}.$$

С использованием соотношений (1.5)–(1.8) мера полных деформаций Коши — Грина относительно промежуточной конфигурации с точностью до квадратичных по ε слагаемых представляется в виде

$$C = C_* + 2\varepsilon F_*^{\mathrm{T}} \cdot e \cdot F_* + \varepsilon^2 F_*^{\mathrm{T}} \cdot h^{\mathrm{T}} \cdot h \cdot F_*.$$

Тогда

$$\delta C = 2\varepsilon F_*^{\mathrm{T}} \cdot \delta e \cdot F_* + \varepsilon^2 F_*^{\mathrm{T}} \cdot \delta h^{\mathrm{T}} \cdot h \cdot F_* + \varepsilon^2 F_*^{\mathrm{T}} \cdot h^{\mathrm{T}} \cdot \delta h \cdot F_*.$$

В результате при переходе из промежуточной конфигурации в близкую текущую вариационное уравнение (2.3), записанное относительно приращения вектора полного перемещения, связывающего промежуточную и текущую конфигурации, принимает вид

$$\int\limits_{V_0} J_* T_* \cdot\cdot\, \delta e \, dV_0 + \int\limits_{V_0} J_* (T_* \cdot h^{\mathrm{T}}) \cdot\cdot\, \delta h \, dV_0 + \theta \int\limits_{V_0} J_* B_*(T) \cdot\cdot\, \delta e \, dV_0 +$$

$$+ \int\limits_{V_0} J_* \, \frac{3 A_*(T)}{2(\sigma_i)_* - 3\, S_* \cdot\cdot\, A_*(T)} \left[-2(\sigma_i)_*^2 I_1(e) + 2\, S_* \cdot\cdot\, (T_* \cdot h^{\mathrm{T}}) + \theta\, S_* \cdot\cdot\, B_*(T) + \right.$$

$$\left. + S_* \cdot\cdot\, L_*^{\mathrm{IV}} \cdot\cdot\, (e - e_{Ph} - e_{\Theta}) \right] dV_0 + \int\limits_{V_0} J_* (L_*^{\mathrm{IV}} \cdot\cdot\, (e - e_{Ph} - e_{\Theta})) \cdot\cdot\, \delta e \, dV_0 = 0. \qquad (2.4)$$

Здесь $\delta e = (\overset{*}{\nabla}\, \delta\boldsymbol{u} + (\overset{*}{\nabla}\, \delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}})/2$; $\delta h = (\overset{*}{\nabla}\, \delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}$.

Приведем решения трех задач, которые являются тестовыми при верификации предложенных формулировок и описании эффектов, возникающих при использовании СПФ.

Задача 1. Две пластины одинаковой длины $l = 0{,}1$ м (одна пластина толщиной $h_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м изготовлена из бериллиевой бронзы БрБ2, другая толщиной $h_2 = 10^{-3}$ м — из СПФ (равноатомного никелида титана)) скреплены по длине без натяга. Двухслойная пластина находится в условиях плоской относительно ширины деформации при температуре Θ_A, соответствующей полностью аустенитному состоянию СПФ. Один торец образца закреплен (на нем задаются нулевые перемещения), остальные поверхности свободны от нагрузок. Сначала образец охлаждается до температуры Θ_M, соответствующей полностью мартенситному состоянию СПФ, а затем вновь нагревается до температуры Θ_A. Таким образом, в СПФ происходит сначала прямое мартенситное превращение, а затем обратное.

Задача 2. До скрепления двух пластин (см. задачу 1) пластина из СПФ толщиной $h_2 = 10^{-3}$ м при температуре Θ_A, соответствующей полностью аустенитному состоянию этого материала, подвергается одноосному однородному растяжению по длине напряжением 100 МПа. Это напряжение соответствует данным эксперимента, описанного в работе [22], в котором груз массой 1 кг растягивает пластину с поперечным сечением 3 мм × 40 мкм. Затем пластина охлаждается до температуры Θ_M, соответствующей полностью мартенситному состоянию СПФ, после чего нагрузка снимается. Пластины, имеющие одинаковую длину $l = 0{,}05$ м, скрепляются по длине без натяга при температуре Θ_M. Полагается, что при этой температуре пластина из бронзы имеет толщину $h_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м. Полученная двухслойная пластина, находящаяся в условиях плоской относительно ширины деформации, закрепляется по одному из торцов (на нем задаются нулевые перемещения), при этом остальные поверхности свободны от нагрузок. Пластина нагревается до температуры Θ_A, соответствующей полностью аустенитному состоянию СПФ, а затем охлаждается до температуры Θ_M.

Механические и теплофизические характеристики материалов

Материал	$\rho\cdot 10^{-3}$, кг/м^3	E, ГПа	ν	G, ГПа	$\beta_\Theta\cdot 10^6$, К$^{-1}$	$c_T\cdot 10^3$, МДж/(кг·К)	$\lambda\cdot 10^5$, МВт/(м·К)	$\alpha_S\cdot 10^6$, МВт/(м·К)	M_s, К (A_s, К)	M_f, К (A_f, К)	Источник
Бериллиевая бронза (БрБ2)	8,2	135	0,35	50	16,6	0,38	17,0	18,0	—	—	[23–25]
Сплав с памятью формы:											
Мартенсит	6,5	28	0,3	28	6,6	0,5	1,0	18,0	313	293	[12, 15–18]
Аустенит	6,5	84	0,3	84	11,0	0,5	1,0	18,0	323	343	[12, 15–18]

П р и м е ч а н и е. Значения теплоемкости, теплопроводности и коэффициента теплопередачи осреднены по двум фазам (мартенсит и аустенит).

Задача 3. Пластина из СПФ длиной $l = 0{,}05$ м и толщиной $h = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ м закрепляется по одному из торцов и при температуре Θ_A, находясь в условиях плоской относительно ширины деформации, изгибается касательным напряжением 20 МПа, приложенным к другому торцу, и охлаждается до температуры Θ_M, после чего нагрузка снимается. Полученная изогнутая пластина вновь нагревается до температуры Θ_A.

Механические и теплофизические характеристики материалов, для которых решаются указанные три задачи, приведены в таблице (ρ — плотность, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, β_Θ — коэффициент линейного температурного расширения, M_s, M_f, A_s, A_f — температуры фазовых переходов). В таблице приведены также значения теплоемкости c_T, теплопроводности λ и коэффициента теплопередачи α_S, которые в настоящей работе не используются.

Размеры h_1 и h_2 в задачах 1 и 2 выбираются из указанного в работах [23, 24] условия максимального прогиба двухслойной пластины. В [23, 24] угол изгиба при нагревании (охлаждении) пластины длиной l, состоящей из двух слоев толщиной h_1, h_2 с модулями Юнга E_1, E_2 и температурными коэффициентами линейного расширения β_1, β_2, определяется соотношением $\varphi = k_0 l\,\Delta\theta$, где $\Delta\theta$ — приращение температуры; коэффициент k_0 зависит от h_1, h_2, E_1, E_2, β_1, β_2 и принимает наибольшее значение $\max k_0 = (3/2)(\beta_1 - \beta_2)/(h_1 + h_2)$ при условии $E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2 = 0$, из которого следует, что $h_1/h_2 = \sqrt{E_2/E_1}$. Задавая для E_1 значение модуля Юнга для бронзы, а для E_2 значение модуля Юнга для мартенситной фазы СПФ, получаем $h_1/h_2 = 0{,}455 \approx 0{,}5$, откуда следует, что $h_1 = 0{,}5 h_2$. Длина l выбиралась из условия получения достаточно большого угла φ и соответствующего ему достаточно большого перемещения w свободного конца двухслойной пластины. При наибольшем k_0 угол и перемещение определяются соотношениями $\varphi = 3\,\Delta\epsilon\, l/(2(h_1 + h_2))$, $w = \varphi l/2$, где $\Delta\epsilon = (\beta_1 - \beta_2)\,\Delta\theta$. Согласно данным работы [23] наибольшее значение $\beta_1 - \beta_2$ для биметаллов, используемых в реальных приборах и конструкциях, составляет $20\cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; при $\Delta\theta = 100$ К значение $\Delta\epsilon$ становится равным 0,002, т. е. 0,2 %. Для биметалла, рассматриваемого в настоящей работе, наибольшее значение $\beta_1 - \beta_2$ равно 10^{-5} К$^{-1}$, а интервал температур фазового перехода $\Delta\theta$ ($\Delta\theta = M_s - M_f$ или $\Delta\theta = A_f - A_s$) составляет примерно 30 К (см. таблицу). Следовательно, температурная деформация $\Delta\epsilon \approx 0{,}03$ %. При этом, как показано ниже, фазовые деформации могут быть на два порядка больше.

Вернемся к соотношениям (1.19), (1.20), которые при малых деформациях имеют вид

$$de_{Ph} = (\beta g + c_0 S + a_0 e_{Ph})\,dq, \quad dq > 0; \tag{2.5}$$

$$de_{Ph} = \Big(\frac{a_0 e_{Ph}^{(0)}}{\exp{(a_0 q_0)} - 1} + a_0 e_{Ph}\Big)\,dq, \quad dq < 0. \tag{2.6}$$

Поскольку далее рассматриваются только фазовые деформации, для упрощения индекс Ph опускается. Рассмотрим прямолинейный стержень из СПФ, находящийся в одноосном напряженном состоянии (ОНС) при постоянных напряжениях. Орт $\boldsymbol{k}$ направлен по оси стержня. Тогда напряжение равно $T = \tilde{T}\boldsymbol{kk}$, а его девиаторная часть — $S = -(1/3)\tilde{T}(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) + (2/3)\tilde{T}\boldsymbol{kk}$, причем $\tilde{T}$ и S постоянны в процессе фазового перехода. В этом случае уравнения (2.5), (2.6) имеют простое решение. Из уравнения (2.5) для компоненты, соответствующей диаде $\boldsymbol{kk}$, следует равенство

$$\frac{de_k}{\beta + 2c_0\tilde{T}/3 + a_0 e_k} = dq \quad \Rightarrow \quad e_k = \frac{\beta + 2c_0\tilde{T}/3}{a_0}\,[\exp{(a_0)} - 1], \tag{2.7}$$

для компонент, соответствующих диадам $\boldsymbol{ii}$ и $\boldsymbol{jj}$, — равенства

$$\frac{de_i}{\beta - c_0\tilde{T}/3 + a_0 e_i} = dq \quad \Rightarrow \quad e_i = \frac{\beta - c_0\tilde{T}/3}{a_0}\,[\exp{(a_0)} - 1]. \tag{2.8}$$

Здесь интегрирование по фазовым деформациям осуществляется от 0 до e_k или e_i, а по параметру q — от 0 до 1. При отсутствии напряжений соотношения (2.7) и (2.8) совпадают. Из уравнения (2.6) следует равенство

$$e_n = \frac{e_n^{(0)}}{\exp{(a_0 q_0)}}\,[\exp{(-a_0)} - 1] + e_n^{(0)} \exp{(-a_0)}, \qquad n = i, j, k, \tag{2.9}$$

где интегрирование по фазовым деформациям осуществляется от $e_n^{(0)}$ до e_n, а по параметру q — от q_0 до 0; q_0, $e_n^{(0)}$ — значения q и e_n в начальной точке процесса обратного мартенситного превращения. Задавая для $e_n^{(0)}$ деформации e_k (2.7) или e_i (2.8) и полагая $q_0 = 1$, из (2.9) получаем $e_n = 0$, т. е. в процессе прямого превращения возникают деформации, причем при отсутствии напряжения они одинаковы, а в процессе обратного превращения они исчезают.

Используя соотношение (2.7) и константы для СПФ (см. (1.15), (1.19), (1.20)), вычислим осевую деформацию e_k, возникающую в процессе полного прямого превращения. При отсутствии напряжения имеем $e_k = 0{,}0017$, что сопоставимо с температурными деформациями при изменении температуры на 100 К. При растягивающем напряжении $T = 100$ МПа имеем $e_k = 0{,}029$, что приблизительно в 100 раз больше сопровождающих этот процесс температурных деформаций.

Полученные выше оценки справедливы при малых перемещениях и деформациях, но позволяют обосновать выбор толщины каждого слоя пластины и ее длину.

Для решения всех трех задач используются лагранжевы (материальные) координаты. Представим алгоритм решения этих задач. Процесс охлаждения (нагревания) разбивается на ряд достаточно малых шагов. Величины с индексом “$*$” известны из решения задачи на предыдущем шаге. Задается изменение температуры θ. Численное решение уравнения (2.4) осуществляется методом конечных элементов. В результате определяем приращение вектора перемещений $\boldsymbol{u}$ на данном шаге. Зная $\boldsymbol{u}$, строим поля $h = (\overset{*}{\nabla}\,\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}$, e и d. Используя (1.21), (1.22), определяем e_{Ph}, по известному значению θ получаем $e_\Theta = \beta_\Theta \theta g$ и из (1.23) находим d_{Ph} и d_Θ. С помощью этих величин можно построить тензоры $e_E = e - e_{Ph} - e_\Theta$ и $d_E = d - d_{Ph} - d_\Theta$, которые в свою очередь позволяют найти тензоры F_E, F_{Ph}, F_Θ (1.6)–(1.8), $\tilde{E}_{Ph}$ (1.12) и все зависящие от них кинематические величины. По соотношениям (1.30)–(1.32) вычисляется T, по (1.16)–(1.18) — σ_i, ξ, q, Θ, по (1.27)–(1.29) — E, G, Λ и по (1.33), (1.34) — $T_{,\Lambda}$, $T_{,G}$. Все эти величины соответствуют концу предыдущего шага, являясь в то же время начальными для следующего. Присваивая указанным величинам

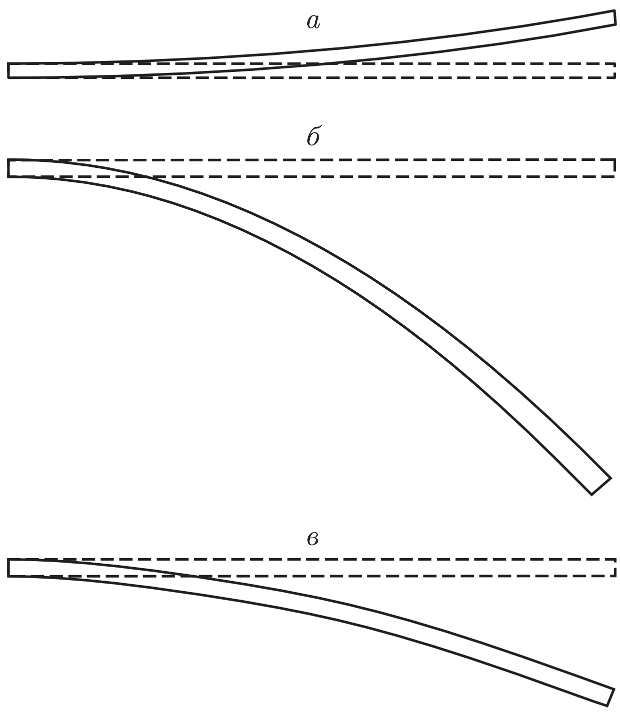

Рис. 2. Изгиб пластины:
а — задача 1, *б* — задача 2, *в* — задача 3; штриховая линия — начальное состояние, сплошная — конечное состояние

индекс “$*$”, решаем вариационное уравнение (2.4) для следующего шага. В начальный момент времени в ненагруженной и недеформированной конфигурации во всем материале $T_* = (T_{,\Lambda})_* = (T_{,G})_* = 0$, $F_* = F_{E*} = F_{Ph*} = F_{\Theta*} = g$, $q = 0$, $\Lambda = \Lambda_A$, $G = G_A$.

При численном решении всех трех задач использовались сетка треугольных конечных элементов и квадратичная аппроксимация поля приращения перемещений. На каждом шаге полагалось, что изменение температуры $\theta = 0{,}5$ K, и учитывалось температурное расширение материалов.

Задача 1 решалась на сетке размером 12×800: для бронзы — 4×800, для СПФ — 8×800. На рис. 2,*а* показана форма двухслойной пластины (нижний слой из СПФ) в начальном положении при температуре Θ_A (штриховая линия), в котором СПФ находится полностью в аустенитном состоянии, и при охлаждении до температуры Θ_M (сплошная линия), когда СПФ находится полностью в мартенситном состоянии. При охлаждении в бронзе и СПФ возникают деформации температурного сжатия, причем в бронзе они выше, чем в СПФ, так как коэффициент температурного расширения больше (см. таблицу). Поэтому СПФ находится в основном в растянутом состоянии и возникающие в нем наряду с температурными фазовые деформации при аустенитно-мартенситном переходе являются также в основном деформациями растяжения. Все это приводит к изгибу вверх двухслойной пластины. Рассчитанное значение перемещения свободного конца пластины (практически любой его точки) составляет $5{,}64 \cdot 10^{-3}$ м (5,64 % длины). На рис. 2,*а* перемещение и длина пластины представлены в одном масштабе. При последующем нагреве до температуры Θ_A пластина принимает ту же форму, что и в начальном состоянии (штриховая линия).

Задача 2 решалась на сетке размером 12×400: для бронзы — 4×400, для СПФ — 8×400 (так как длина пластины в два раза меньше, чем в задаче 1). На рис. 2,*б* показана форма двухслойной пластины (нижний слой из СПФ) в начальном положении (штриховая линия), когда пластина из СПФ, имеющая температуру Θ_A, соответствующую полностью аустенитному состоянию, подвергается одноосному однородному растяжению по длине напряжением 100 МПа. Затем пластина охлаждается до температуры Θ_M, соответствующей полностью мартенситному состоянию, и после снятия нагрузки скрепляется без натяга с пластиной из бронзы. При этом в пластине из СПФ накапливаются и “замораживаются” фазовые деформации растяжения, которые при последующем нагревании до температуры Θ_A исчезают. В результате двухслойная пластина стягивается и изгибается вниз (сплошная линия на рис. 2,*б*, перемещение и длина пластины представлены в одном масштабе). При этом свободный конец пластины (его средняя точка) смещается на расстояние, равное $2{,}8 \cdot 10^{-2}$ м (55,88 % длины). Последующее охлаждение двухслойной пластины до температуры Θ_M приводит к практически полному возвращению ее в начальное положение (штриховая линия).

Задача 3 решалась на сетке размером 12×400. На рис. 3,*в* штриховой линией показано начальное состояние пластины из СПФ при температуре Θ_A, а сплошной — ее состояние после изгиба при температуре Θ_A касательным напряжением 20 МПа, приложенным к свободному торцу, с последующим охлаждением до температуры Θ_M и снятием нагрузки (перемещение и длина пластины представлены в одном масштабе). В этом случае в пластине накапливаются и “замораживаются” фазовые деформации растяжения-сжатия, которые при последующем нагревании до температуры Θ_A исчезают. В результате пластина выпрямляется и возвращается в начальное состояние (штриховая линия на рис. 2,*в*). При этом свободный конец пластины (его средняя точка) смещается на расстояние, равное $1{,}15 \cdot 10^{-2}$ м (23,06 % длины).

Заключение. В работе построена модель поведения сплава с памятью формы при конечных деформациях. Использован достаточно полно изложенный в [6] подход, позволяющий строить согласованные с принципами термодинамики и объективности уравнения (в том числе эволюционные с соответствующей объективной производной), определяющие поведение сред в термоупруго-неупругих процессах. Представленная модель протестирована на ряде задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 77–95.
2. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 122–140.
3. **Роговой А. А.** Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
4. **Роговой А. А.** Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 144–153.
5. **Роговой А. А.** Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 165–172.
6. **Rogovoy A. A.** Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // Contin. Mech. Thermodyn. 2012. V. 24. P. 81–114.
7. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
8. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г., Казарина С. А., Тант Зин Аунг.** Определяющие соотношения для сплавов с памятью формы — микромеханика, феноменология, термодинамика // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. Т. 152, кн. 4. С. 180–194.

9. **Boyd J. G., Lagoudas D. C.** A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Pt 1. The monolithic shape memory alloy // Intern. J. Plasticity. 1996. V. 12, N 6. P. 805–842.
10. **Qidwai M. A., Lagoudas D. C.** Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms // Intern. J. Numer. Methods Engng. 2000. V. 47. P. 1123–1168.
11. **Lim T. J., McDowell D. L.** Cyclic thermomechanical behavior of a polycrystalline pseudoelastic shape memory alloy // J. Mech. Phys. Solids. 2002. V. 50. P. 651–676.
12. **Auricchio F., Petrini L.** A three-dimentional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: thermomechanical coupling and hybrid composites applications // Intern. J. Numer. Methods Engng. 2004. V. 61. P. 716–737.
13. **Auricchio F., Petrini L.** A three-dimentional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: solution algorithm and boundary value problems // Intern. J. Numer. Methods Engng. 2004. V. 61. P. 807–836.
14. **Мовчан А. А.** Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 173–181.
15. **Мовчан А. А., Шелымагин П. В., Казарина С. А.** Определяющие уравнения для двухэтапных термоупругих фазовых превращений // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 5. С. 152–160.
16. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Аналитическое решение связной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 164–178.
17. **Мовчан А. А., Чжо Ту Я.** Решение начально-краевых задач о прямом и обратном превращении в рамках нелинейной теории деформирования сплавов с памятью формы // Механика композиц. материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 4. С. 452–468.
18. **Мовчан А. А., Чжо Ту Я.** Решение связанной термоэлектромеханической задачи для стержня из сплава с памятью формы в рамках теории нелинейного деформирования этих материалов // Механика композиц. материалов и конструкций. 2008. Т. 14, № 3. С. 443–460.
19. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
20. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
21. **Мовчан А. А.** Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 1. С. 79–90.
22. **Иржак А. И., Истомин В. В., Коледов В. В. и др.** Упорядочение, мартенситное превращение и эффект памяти формы в субмикронных образцах быстрозакаленного сплава $Ni_{50}Ti_{25}Cu_{25}$ // Изв. РАН. Сер. физ. 2009. Т. 73, № 8. С. 1141–1143.
23. **Асс Б. А.** Детали и узлы авиационных приборов и их расчет / Б. А. Асс, Н. М. Жукова. М.: Оборонгиз, 1960.
24. **Андреева Л. Е.** Упругие элементы приборов. М.: Машгиз, 1962.
25. **Физические** величины: Справ. / А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др.; Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.

Поступила в редакцию 28/VI 2012 г.