

довательности положительных солитонов [4]. Наличие z_* позволяет лучше понять, почему толщина остаточного слоя, по которому распространяются эти солитоны, слабо зависит от расхода жидкости Q . Если значение Q такое, что $z > z_*$, то течение перестраивается таким образом, чтобы значение параметра z , рассчитанное по толщине остаточного слоя, было порядка z_* , а избыточный расход загоняется в солитоны. Таким образом, зная z_* и Q , можно оценить число возникающих солитонов и долю участков пленки с плоской границей.

Такая оценка может быть полезна для ряда задач о тепло- и массообмене через поверхность пленки.

Поступила 22 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке. — ПМТФ, 1979, № 6.
2. Цвелодуб О. Ю. Исследование гидродинамической устойчивости течений в двухфазных средах. Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1978.
3. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
4. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Препринт 36—79, Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1979.

УДК 532.516

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВРАЩЕНИЕ ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. Л. Сenniцкий

(Новосибирск)

Течение вязкой жидкости вокруг цилиндра, приведенного во вращательное движение с постоянной угловой скоростью, исследовалось в [1, 2]. В данной работе рассматривается задача о вращении в вязкой несжимаемой жидкости кругового цилиндра, на единицу длины которого, начиная с момента времени $t = 0$, действует постоянный момент внешних сил M . Течение жидкости предполагается плоским. При $t \leq 0$ цилиндр и жидкость покоятся.

Выберем цилиндрические координаты r, θ, z таким образом, чтобы ось z была направлена вдоль оси цилиндра. Предположим, что скорость течения $\mathbf{V}$ не зависит от θ . Тогда, как нетрудно проверить, r -компонента вектора $\mathbf{V}$ равна нулю, и рассматриваемая задача сводится к решению уравнений

$$(1) \quad \frac{\partial V_\theta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right);$$

$$(2) \quad I \, d\Omega/dt = M + L$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$(3) \quad V_\theta = 0 \text{ при } t = 0, r \geq a;$$

$$(4) \quad V_\theta = a\Omega \text{ при } r = a;$$

$$(5) \quad V_\theta \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

где V_θ — θ -компонента вектора $\mathbf{V}$; I — момент инерции единицы длины цилиндра; Ω — угловая скорость вращения цилиндра; a — радиус цилиндра; ν — кинематический коэффициент вязкости; $L = 2\pi\mu a^2(\partial V_\theta/\partial r|_{r=a} - \Omega)$ — момент вязких сил, действующий на единицу длины цилиндра со стороны жидкости; $\mu = \rho\nu$; ρ — плотность жидкости.

Для решения поставленной задачи воспользуемся операционным методом. Переходя в (1), (2), (4), (5) к изображениям, получим

$$(6) \quad \frac{\partial^2 V_\theta^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{p}{\nu} \right) V_\theta^* = 0;$$

$$(7) \quad Ip\Omega^* = M^* + L^*;$$

$$(8) \quad V_\theta^* = a\Omega^* \quad \text{при} \quad r = a;$$

$$(9) \quad V_\theta^* \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty,$$

$$\text{где} \quad V_\theta^* = \int_0^\infty e^{-pt} V_\theta dt; \quad \Omega^* = \int_0^\infty e^{-pt} \Omega dt;$$

$$(10) \quad M^* = \frac{M}{p}, \quad L^* = 2\pi\mu a^2 \left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r} \Big|_{r=a} - \Omega^* \right);$$

p — комплексная переменная.

Решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям (8), (9), имеет вид

$$(11) \quad V_\theta^* = a\Omega^* \frac{K_1 \left(r \frac{p^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right)}{K_1 \left(a \frac{p^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right)},$$

где K_1 — функция Макдональда. Используя (7), (10), (11), находим

$$\Omega^* = \frac{M}{p\Phi} K_1 \left(a \frac{p^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right),$$

$$\text{где} \quad \Phi = 2\pi\mu a^2 \left\{ \left(1 + \frac{Ip}{2\pi\mu a^2} \right) K_1 \left(a \frac{p^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right) - a \frac{\partial K_1 \left(r \frac{p^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right)}{\partial r} \Big|_{r=a} \right\}.$$

Таким образом, для V_θ будем иметь следующее выражение:

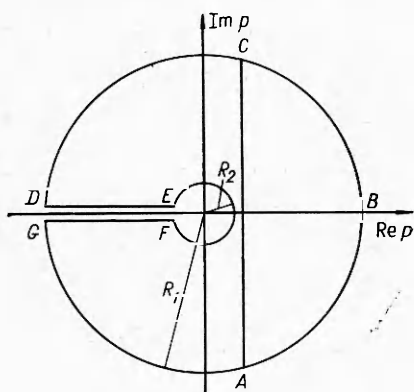
$$V_\theta = \frac{aM}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} \frac{K_1 \left(r \frac{p^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right)}{p\Phi} dp,$$

где интеграл берется по прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$; $\alpha > 0$.

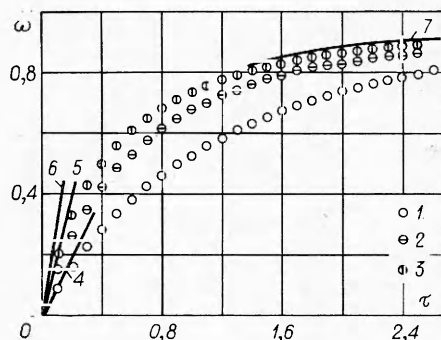
Функция Φ отлична от нуля на всей комплексной плоскости переменной p с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси [3]. По теореме Коши

$$(12) \quad \int_{ABCA} \frac{K_1 \left(r \frac{p^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right)}{p\Phi} dp = 0;$$

$$(13) \quad \int_{ACDEFGA} e^{pt} \frac{K_1 \left(r \frac{p^{1/2}}{\nu^{1/2}} \right)}{p\Phi} dp = 0,$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

где интегрирование производится по контурам, изображенным на фиг. 1. Переходя в (12) к пределу при $R_1 \rightarrow \infty$, а в (13) — при $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow 0$, получим

$$(14) \quad \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{K_1 \left(r \frac{p^{1/2}}{v^{1/2}} \right)}{p\Phi} dp = 0;$$

$$(15) \quad V_0 = \frac{M}{4\pi\mu r} \left\{ 1 + \frac{4\kappa s}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau\xi^2} P}{\xi^2 Q} d\xi \right\},$$

где

$$P = N_1(s\xi) [\xi J_1(\xi) - \kappa J_2(\xi)] - J_1(s\xi) [\xi N_1(\xi) - \kappa N_2(\xi)];$$

$$Q = [\xi J_1(\xi) - \kappa J_2(\xi)]^2 + [\xi N_1(\xi) - \kappa N_2(\xi)]^2;$$

$\kappa = 2\pi r a^4 / I$; $s = r/a$; $\tau = vt/a^2$; J_1, J_2, N_1, N_2 — функции Бесселя и Неймана. При $t = 0$ выражение (15) для V_0 обращается в нуль (это следует из (14)) в соответствии с условием (3).

Угловая скорость вращения цилиндра

$$(16) \quad \Omega = \frac{M}{4\pi\mu a^2} \left\{ 1 - \frac{8\kappa^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau\xi^2}}{\xi^3 Q} d\xi \right\}.$$

Используя известные разложения функций Бесселя и Неймана в ряды [4], из (16) можно получить следующие асимптотические соотношения:

$$\omega \sim 1 - 1/4\tau \text{ при } \tau \rightarrow \infty, \quad \omega \sim f(\kappa)\tau \text{ при } \tau \rightarrow 0,$$

$$\text{где } \omega = \frac{4\pi\mu a^2 \Omega}{M}; \quad f(\kappa) = \frac{8\kappa^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^3 Q}.$$

По теореме Коши

$$(17) \quad \int_{ABCDEFGA} \frac{K_1 \left(a \frac{p^{1/2}}{v^{1/2}} \right)}{\Phi} dp = 0.$$

Переходя в (17) к пределу при $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow 0$, находим

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi Q} = \frac{\pi^2}{4\kappa}.$$

Таким образом,

$$\omega \sim 2\kappa\tau \text{ при } \tau \rightarrow 0.$$

На фиг. 2 представлена зависимость ω от τ при $\kappa = 0,5; 1; 1,5$ (точки 1—3). Цифрами 4—7 обозначены линии $\omega = \tau$, $\omega = 2\tau$, $\omega = 3\tau$, $\omega = 1 - 1/4\tau$.

Автор выражает благодарность Л. Я. Рыбаку за проведение численных расчетов по формуле (16).

Поступила 12 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., ГИТТЛ, 1955.
2. Mallick D. D. Nonuniform rotation of an infinite circular cylinder in an infinite viscous liquid.— ZAMM, 1957, Bd 37, N 9/10.
3. Erdélyi A., Kermack W. O. Note on the equation $f(z)K_n'(z) - g(z)K_n(z) = 0$.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1945, vol. 41, p. 1.
4. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., Наука, 1971.

УДК 532.529

ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВКЛЮЧЕНИЙ НА УРАВНЕНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ПУЗЫРЕЙ В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ

А. Е. Крошилин, В. Е. Крошилин, Б. И. Нигматулин

(Москва)

При построении моделей многофазных сред необходимо учитывать влияние объемной концентрации включений на силовое или тепловое межфазное взаимодействие. Теоретическому изучению этой проблемы посвящено большое количество работ, обзор которых содержится, например, в [1, 2]. В [1] показано, что межфазные взаимодействия, вообще говоря, зависят от вида распределения включений в среде. Обычно рассматриваются дисперсные среды с двумя предельными схемами распределения частиц в объеме среды: с регулярной и хаотической структурой. Дисперсные среды с регулярной структурой исследуются в рамках метода ячеек [1, 2]. Для изучения среды с хаотической структурой используются зависимости характеристик взаимодействия отдельного включения с несущей средой при конкретном расположении остальных включений и проводится усреднение их по статистическому ансамблю с использованием функций распределения включений в объеме среды. В то же время сами функции распределения зависят от взаимодействия между включениями через несущую среду. Поэтому задача определения функций распределения с учетом этого взаимодействия существенно усложняется, и за редким исключением [3] при ее решении используется упрощающее предположение о независимости функций распределений от взаимодействия включений [4—6]. Задача определения средних характеристик среды остается достаточно сложной даже при известных функциях распределения, поэтому для ее упрощения конкретный вид взаимодействия включения с несущей средой при определенном расположении остальных задается приближенно. В [3] при описании этого взаимодействия ограничиваются дипольным приближением, в [5, 6] используется существенное предположение о применимости средних характеристик среды, полученных