ПОВЕДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ В ПЕРЕМЕННЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

В. С. Сизонов

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о поведении поверхности раздела двух жидкостей в нестационарных гравитационных полях, или, что эквивалентно, под действием переменных ускорений (перегрузок), перпендикулярных этой поверхности. Получены условия неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины в периодических, постоянных и импульсных силовых полях; пояснен физический механизм развития неустойчивости и рассмотрены некоторые особенности развития неустойчивости для случая ограниченного пространства.

Задача о поведении невязкой несжимаемой жидкости под действием постоянного ускорения, перпендикулярного ее свободной поверхности, была рассмотрена Тейлором [1]. В этой работе было показано, что ускорение, направленное от тяжелой жидкости к более легкой, оказывает стабилизирующее воздействие на поведение возмущений, имеющихся на свободной поверхности, в то время как обратное направление ускорения оказывает дестабилизирующее влияние, приводя к неограниченному росту малых начальных возмущений. Последнее явление носит название тейлоровой неустойчивости.

1. Пусть система из двух невязких несжимаемых жидкостей находится в горизонтальной полосе, ограниченной двумя бесконечными параллельными плоскостями. Начало декартовой системы координат помещено на поверхности раздела жидкостей, ось x направлена вдоль невозмущенной поверхности раздела, ось y — вертикально вверх. Глубина нижней жидкости — h_1 (индексом 1 отмечены все величины, относящиеся к нижней жидкости), верхней — h_2. Движение рассматривается как двумерное, на поверхности раздела жидкостей действует поверхностное натяжение T. Пусть возмущенная поверхность раздела жидкостей $\eta\ (x,\ t)$ имеет вид

$$\eta = -a \cos mx\, \sigma\, (t) \tag{1.1}$$

где амплитуда a и волновое число m — действительные положительные числа, $\sigma\ (t)$ — искомая функция времени.

Граничные условия рассматриваемой задачи суть:

$$-\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right|_{y=-h_1} = -\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|_{y=h_2} = 0$$

на твердых стенках

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (v\nabla)\,\eta = 0, \qquad v = -\nabla\varphi$$

на поверхности раздела жидкостей.

Здесь v — скорость жидкости, φ — потенциал скорости. Последнее условие можно упростить, если принять допущение о малости величин η и $\nabla\eta$. Тогда конвективным членом в уравнении поверхности раздела можно пренебречь и записать его в виде

$$-\left.\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right|_{y=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad (k = 1,\ 2)$$

Введем в рассмотрение комплексные потенциалы

$$w_k(z) = \varphi_k + i\psi_k \qquad (z = x + iy)$$

Решение для них будем искать в виде

$$w_1 = \cos m(z + ih_1)\, b_1(t), \quad w_2 = -\cos m(z - ih_2)\, b_2(t)$$

Тогда из линеаризованного граничного условия на поверхности раздела получим

$$b_1(t) = \frac{a}{m \operatorname{sh} mh_1} \frac{d\sigma}{dt}, \qquad b_2(t) = \frac{a}{m \operatorname{sh} mh_2} \frac{d\sigma}{dt}$$

Отсюда потенциалы скоростей равны

$$\varphi_1 = \frac{a}{m \operatorname{sh} mh_1} \cos mx \operatorname{ch} m(y + h_1) \frac{d\sigma}{dt} \tag{1.2}$$

$$\varphi_2 = -\frac{a}{m \operatorname{sh} mh_2} \cos mx \operatorname{ch} m(y - h_2) \frac{d\sigma}{dt}$$

Легко проверить, что полученные выражения удовлетворяют уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi_k = 0$ и граничным условиям.

Для получения динамического условия на поверхности раздела рассмотрим уравнения Эйлера, которые можно записать в виде

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + (v_k \nabla) v_k = j - \frac{1}{\rho} \nabla p_k$$

где j — напряженность поля внешних массовых сил. Считая поле массовых сил нестационарным и консервативным, т. е. имеющим потенциал, представим его напряженность j в виде

$$j = -g\beta(t) = -\Delta\Pi\beta(t)$$

где величины g и Π $(g = \nabla \Pi)$ являются функциями лишь координат, но не времени. Представление напряженности в таком виде эквивалентно допущению о том, что отношение напряженностей в двух каких-либо фиксированных точках пространства есть величина, не зависящая от времени. Функция $\beta(t)$ описывает изменение напряженности в любой точке пространства со временем; на нее, вообще говоря, не накладывается никаких ограничений — она может описывать внезапно приложенные и постепенно убывающие, импульсные, периодические во времени и т. п. поля. Так как $v_k = -\nabla\varphi_k$, то из уравнений Эйлера следует:

$$\nabla\left(\frac{p_k}{\rho_k} + \frac{1}{2}\nabla\varphi_k\nabla\varphi_k + \Pi\beta(t) - \frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\right) = 0$$

Отсюда получается интеграл Коши — Лагранжа в виде

$$p_k + \frac{1}{2}\rho_k\nabla\varphi_k\nabla\varphi_k + \rho_k\Pi\beta(t) - \rho_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial t} = f(t)$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени.

Условие Лапласа для поверхностного натяжения T с учетом малости величины $\nabla\eta$ можно записать в виде

$$p_1 - p_2 = -T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

Два последних уравнения дают искомое динамическое условие на поверхности раздела

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1\varphi_1 - \rho_2\varphi_2) - \left[(\rho_1 - \rho_2)g\beta(t) + \frac{1}{2}(\rho_1\nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 - \rho_2\nabla\varphi_2\nabla\varphi_2)\right]\eta + T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0 \tag{1.3}$$

Подставим в уравнение (1.3) величины φ_1, φ_2 и η из уравнений (1.1) и (1.2). Тогда с учетом малости величин η и $\nabla\eta$, пренебрегая членом 1/2 $(\rho_1\nabla\varphi_1\nabla\varphi_1 - \rho_2\nabla\varphi_2\nabla\varphi_2)$, получим уравнение

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + [(1-\rho)\beta(\tau) + B^{-1}]\sigma = 0 \qquad (1.4)$$

$$\tau = \sqrt{mght}, \qquad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad h = (\operatorname{cth} mh_1 + \rho \operatorname{cth} mh_2)^{-1}, \quad B = \frac{g\rho_1}{m^2T}$$

Здесь τ — безразмерное время, B — число Бонда. Решения уравнения (1.4) для конкретных зависимостей напряженности внешнего поля от времени $\beta(\tau)$ дадут искомые зависимости изменения формы поверхности раздела жидкостей во времени $\eta(\tau)$.

2. Уравнение (1.4) есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка с инвариантом $I(\tau) = (1-\rho)\beta(\tau) + B^{-1}$.

На основе теорем сравнения можно установить ряд свойств решений этого уравнения, т. е. поведения поверхности раздела жидкости во времени по свойствам инварианта $I(\tau)$.

1. Если всюду в интервале (τ_1, τ_2) непрерывная функция $I(\tau) \leqslant 0$, то все решения уравнения суть неколеблющиеся, имеющие в данном интервале не более одного нуля. Это условие есть условие непрерывного увеличения отклонений поверхности раздела жидкости в рассматриваемом интервале времени. Если $I(\tau) \leqslant 0$ для всех τ и $I(\tau) \not\equiv 0$, то все решения, за исключением тривиального, растут неограниченно. В этом смысле условие $I(\tau) \leqslant 0$ есть достаточное условие неустойчивости поверхности раздела жидкостей.

2. Если в замкнутом интервале $[\tau_1, \tau_2]$

$$I(\tau) > 0 \qquad (I(\tau) \neq \text{const})$$

то решения уравнения (1.4) колеблющиеся. Если в $[\tau_1, \tau_2]$

$$s = \inf I(\tau), \qquad S = \sup I(\tau)$$

то расстояние между двумя последовательными нулями меньше, чем $\pi / \sqrt{s}$, и больше, чем $\pi / \sqrt{S}$.

3. Если $\inf I(\tau) = c > 0$ на неограниченном интервале $\tau > \tau_1$, то каждое решение имеет бесчисленное множество нулей (поверхность раздела неограниченное число раз проходит через положение равновесия).

Если $I(\tau)$ непрерывно дифференцируема и монотонна, то амплитуды каждого решения монотонно возрастают при убывании $I(\tau)$ и убывают при возрастании $I(\tau)$.

4. Если $I(\tau) \to d_1^2 > 0$ при $\tau \to \infty$, то решения уравнения (1.4) ведут себя при больших τ аналогично решениям уравнения

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + d_1^2\sigma = 0$$

5. Если $I(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, и, начиная с некоторого значения τ, постоянно выполняется условие

$$0 \leqslant I(\tau) \leqslant {}^1/_4\,\tau^{-2}$$

то решение уравнения (1.4) не может иметь бесконечного числа нулей (начиная с некоторого момента времени, поверхность раздела не проходит более через положение равновесия). В качестве уравнения сравнения использовано уравнение Эйлера

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \frac{k^2}{\tau^2}\sigma = 0$$

6. Если $(1-\rho)\beta\ (\tau) = O\ (x^{-k})$, где $k > 1$, то каждое нетривиальное решение $y\ (\tau) \not\equiv 0$ можно представить в виде

$$y = \Gamma\ (\tau) \sin\ [B^{-1}\tau + \mathrm{E}\ (\tau)],\ y' = B^{-1}\Gamma\ (\tau) \cos\ [B^{-1}\tau + \mathrm{E}\ (\tau)]$$
$$(B > 0)$$

где $\Gamma\ (\tau)$ и $\mathrm{E}\ (\tau)$ — дифференцируемые функции, штрих обозначает производную по τ. При соответствующем выборе чисел E_0 и $\Gamma_0 \neq 0$ эти функции суть

$$\Gamma\ (\tau) = \Gamma_0 + O\ (x^{-k+1}),\ \mathrm{E}\ (\tau) = \mathrm{E}_0 + O\ (x^{-k+1})$$

7. Если $\beta\ (\tau)$ при $\tau > \tau_1$ есть непрерывно дифференцируемая функция и $(1-\rho)\ \beta\ (\tau) = O\ (x^{-1})$, $\beta'\ (\tau) = O\ (x^{-2})$ при $x \to \infty$, то $\sup \lim |y_B\ (\tau)|$ при $x \to \infty$, где y_B — произвольное решение уравнения (1.4), соответствующее данному значению числа B, при всех числах $B \geqslant B_* > 0$ лежит между некоторыми границами, не зависящими от числа B.

8. Если $I\ (\tau)$ непрерывна, $I\ (\tau) < 0$ и имеет период $\omega > 0$, то общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$c_1 \exp\ (\alpha_1\tau)\ \sigma_1\ (\tau) + c_2 \exp\ (\alpha_2\tau)\ \sigma_2\ (\tau)$$
$$\alpha_1 = \frac{\ln\rho_1}{\omega} > 0,\quad \alpha_2 = \frac{\ln\rho_2}{\omega} < 0,\quad \rho_1 > 1,\quad 0 < \rho_2 < 1$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные, ρ_1, ρ_2 — корни характеристического уравнения, $\sigma_1\ (\tau)$, $\sigma_2\ (\tau)$ — функции, имеющие период ω.

Если же $I\ (\tau) > 0$ для всех положительных λ, таких что

$$0 < \frac{\omega\lambda}{2}\int\limits_0^\omega p\ (u)\ du \leqslant 2$$

то общее решение имеет вид

$$c_1\sigma_1\ (\tau) + c_2\sigma_2\ (\tau)$$
$$\sigma_1\ (\tau) = \cos\frac{\theta\tau}{\omega}\ \psi_1\ (\tau) - \sin\frac{\theta\tau}{\omega}\ \psi_2\ (\tau)$$
$$\sigma_2\ (\tau) = \cos\frac{\theta\tau}{\omega}\ \psi_2\ (\tau) + \sin\frac{\theta\tau}{\omega}\ \psi_1\ (\tau)$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $\psi_1\ (\tau)$, $\psi_2\ (\tau)$ — функции, имеющие период ω. Таким образом, в этом случае решения уравнения устойчивы.

3. В простейшем случае постоянной (не зависящей от времени) напряженности поля $\beta\ (\tau) = \mathrm{const}$ уравнение (1.4) в зависимости от значения числа B имеет три типа решений

$$\sigma\ (\tau) = A_1 \cos\ (\tau \sqrt{(1-\rho)\ \beta + B^{-1}}) + A_2 \sin\ (\tau \sqrt{(1-\rho)\ \beta + B^{-1}})$$
$$\text{при}\quad B^{-1} > (\rho - 1)\ \beta$$
$$\sigma\ (\tau) = A_1 + A_2\tau \quad \text{при}\quad B^{-1} = (\rho - 1)\ \beta$$
$$\sigma\ (\tau) = A_1\ \mathrm{ch}\ (\tau \sqrt{|(1-\rho)\ \beta + B^{-1}|}) + A_2\ \mathrm{sh}\ (\tau \sqrt{|(1-\rho)\ \beta + B^{-1}|})$$
$$\text{при}\quad B^{-1} < (\rho - 1)\ \beta$$

Второй тип решения соответствует критическому значению числа $B_* = [\beta\ (\rho - 1)]^{-1}$, разделяющему устойчивые и неустойчивые состояния поверхности раздела в постоянных гравитационных полях.

Само критическое значение $B_* = [\beta\ (\rho - 1)]^{-1}$ соответствует неустойчивому состоянию поверхности раздела.

Такое движение реализуется, в частности, при переходе системы без поверхностного натяжения (например, системы двух расслоенных газов) в состояние невесомости. Если в состоянии с гравитацией на поверхности раздела имелись волны, то скорость роста возмущений зависит от фазы волнения в момент наступления невесомости.

Так, если в этот момент поверхность раздела проходит через состояние равновесия, то скорость роста возмущений будет наибольшей, если же максимальным является отклонение поверхности от состояния равновесия (а значит, скорости частиц равны нулю), то при наступлении невесомости поверхность раздела «застынет» в этом положении, и ее отклонения от равновесного положения с течением времени не будут возрастать.

Для жидкостей с поверхностным натяжением переход в невесомость по свойству 4 п. 2 решений уравнения (1.4) теоретически соответствует устойчивым колебательным состояниям поверхности раздела.

Однако этот вывод имеет ограниченную применимость, так как для случая перехода в невесомость из состояния с достаточно сильной гравитацией амплитуда волн, имеющихся на поверхности раздела жидкостей, при переходе в невесомость может возрасти столь сильно, что практически может произойти распад начальной массы жидкости на отдельные объемы, не связанные друг с другом. Таким образом, переход в невесомость жидкости с поверхностным натяжением будет приводить к устойчивым колебательным режимам свободной поверхности с амплитудами, имеющими порядок амплитуды гравитационных волн, лишь в том случае, если фаза колебаний поверхности жидкости в момент наступления невесомости соответствует отклонению свободной поверхности от равновесного положения, близкому к максимальному. В противном случае может произойти дезынтеграция жидкой массы.

Аналогичное утверждение справедливо и в более общем случае достаточно сильного уменьшения интенсивности гравитационного поля.

При постоянных положительных перегрузках колебания поверхности раздела суть стоячие волны, частота которых растет при увеличении напряженности внешнего поля (при одном и том же значении волнового числа m).

Наконец, случай $B^{-1} < (\rho - 1)\beta$ соответствует тейлоровой неустойчивости, когда величина отрицательной перегрузки

$$-j > \frac{m^2 T}{\rho_1 - \rho_2}, \qquad j < 0$$

В этом случае возмущения свободной поверхности неограниченно возрастают со скоростью, определяемой значением числа B. Из условия

$$\frac{d}{dm}\sqrt{|(1-\rho)\beta + B^{-1}|} = 0$$

можно найти уравнение для определения волнового числа m, соответствующего наиболее быстрому росту возмущений

$$(h_0 + m_0 H_0)^{-1}(3h_0 + m_0 H_0) = -B$$

$$H_0 = h_1 \operatorname{csch}^2 m_0 h_1 + \rho h_2 \operatorname{csch}^2 m_0 h_2$$

где h_0 — значение h при $m = m_0$.

При $h_1 \to \infty$, $h_2 \to \infty$ максимальная неустойчивость имеет место при

$$(\rho - 1)\beta B = -3, \quad \text{или} \quad m_0 = \sqrt{{}^1/_3(-j)(\rho_1 - \rho_2)/T}$$

Если верхняя жидкость является газом, то $\rho \to 0$. В этом случае с уменьшением глубины нижней жидкости ($h_1 \to 0$) число B, соответствующее максимальной неустойчивости, возрастает до $(1 - \rho)\beta B = -2$, или $m_0 \to \sqrt{{}^1/_2(-j)\rho_1/T}$, т. е. величина m_0 возрастает в $\sqrt{{}^3/_2}$ раз по сравнению со случаем глубокой жидкости. Таким образом, с уменьшением глубины жидкости длина «наиболее опасных» волн, соответствующих наибольшей скорости роста возмущений, уменьшается.

4. Следует отметить, что во всех рассмотренных случаях поверхность раздела является вихревой поверхностью, хотя движение каждой из жидкостей в отдельности является потенциальным. Этот факт может быть получен из свойств ациклического движения. Например, для случая стоячих волн разность горизонтальных составляющих скоростей обеих жидкостей на поверхности раздела равна

$$-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\bigg|_{y=\eta}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\bigg|_{y=\eta}=a\omega\sin mx\,(\operatorname{cth} mh_1+\operatorname{cth} mh_2)\cos\omega t$$

при этом верхняя и нижняя жидкости движутся вдоль поверхности раздела в противоположные стороны.

Максимальная разность скоростей наблюдается в узлах стоячих волн; в пучностях волн поверхность раздела является невихревой.

Отсюда следует, что при произвольном волновом движении поверхности раздела для больших значений волнового числа m может появиться гельмгольцева неустойчивость в узлах стоячих волн, соответствующих малым значениям m, причем на мелкой воде раньше, чем на глубокой. Этот вывод подтверждается экспериментальными исследованиями развития тейлоровой неустойчивости в газах [2].

5. Можно дать следующее простое пояснение физического механизма возникновения тейлоровой неустойчивости. Пусть линия поверхности раздела жидкости является волнообразной кривой, причем в рассматриваемый момент времени обе жидкости неподвижны, а сила тяжести направлена вниз. Тогда в любой горизонтальной плоскости проведенной в верхней жидкости над поверхностью раздела, давление будет одинаковым. В нижней же жидкости вдоль горизонтальной плоскости, проведенной ниже поверхности раздела, давление будет периодически изменяться вдоль оси x. При этом если нижняя жидкость более тяжелая, то давление под гребнями волн будет больше, чем давление под впадинами. Такое распределение давлений должно вызвать течение в нижней жидкости от гребней к впадинам, что будет уменьшать отклонения поверхности раздела. В противном случае картина течений в нижней жидкости получится обратной, и нижняя жидкость начнет проникать в верхнюю, растекаясь из-под впадин к гребням поверхности раздела.

6. При трехмерных возмущениях поверхности раздела жидкости в ограниченной области должно удовлетворяться уравнение Лапласа для потенциала скоростей $\nabla^2\varphi_k=0$ с теми же граничными условиями, что и рассмотренные выше, и, кроме того, дополнительным условием— $(\nabla\varphi_k)\mathbf{n}=0$ на боковых стенках, где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности. Последнее налагает ограничения на величину волновых чисел m, которые в этом случае могут принимать лишь дискретный ряд значений, соответствующий собственным числам рассматриваемой задачи. Так, например, для случая круглого цилиндра радиуса R и высотой h_1+h_2 поверхность раздела может быть взята в виде

$$\eta=-aJ_n(mr)\cos n\theta\,\sigma(t) \tag{6.1}$$

где $J_n(mr)$ — функция Бесселя первого рода n-го порядка.

При этом потенциалы скоростей

$$\varphi_1=\frac{a}{m\operatorname{sh} mh_1}J_n(mr)\cos n\theta\operatorname{ch} m(y+h_1)\frac{d\sigma}{dt}$$

$$\varphi_2=-\frac{a}{m\operatorname{sh} mh_2}J_n(mr)\cos n\theta\operatorname{ch} m(y-h_2)\frac{d\sigma}{dt}$$

Значения m суть корни уравнения

$$\frac{dJ_n(mr)}{dr}\bigg|_{r=R}=0\qquad\left(\frac{dJ_0(mr)}{dr}=-mJ_1(mr)\ \text{при}\ n=0\right)$$

Отсюда $m = \alpha_{1n} / R$, где значения α_{1n} суть последовательные члены ряда 3.832, 7.016, 10.173...

Минимально возможное для круглого цилиндра значение волнового числа m_* имеет место при $n = 1$, $m_* = 1.84 / R$.

Отсюда, в частности, вытекает, что поверхность раздела жидкостей в круглом вертикальном баке потеряет устойчивость, если отрицательная перегрузка

$$-j > \left(\frac{1.84}{R}\right)^2 \frac{T}{\rho_1 - \rho_2}$$

При осесимметричном возмущении ($n = 0$) величина допустимой критической перегрузки в $(3.832 / 1.84)^2 \approx 4.35$ раза больше, и, таким образом, в слабых гравитационных полях ($B \approx [(\rho - 1)\beta]^{-1}$) потеря устойчивости поверхностью жидкости будет несимметричной относительно стенок бака: с одной стороны относительно узлового диаметра ($\theta = \pm {}^1/_2\pi$) движется только нижняя жидкость (вверх), а с другой стороны — только верхняя (вниз), т. е. опрокидывание жидкостей происходит относительно диаметра $\theta = \pm {}^1/_2\,\pi$.

В неслабых же полях волновое число m_0, соответствующее максимальной неустойчивости, определяется уравнением 1п. 2 и может соответствовать осесимметричным возмущениям (нижняя жидкость прорывается вверх по оси бака, вытесняя верхнюю жидкость вниз вдоль его стенок), а также сложным модам колебаний, приводящим к образованию множественных «языков» жидкости, проникающих в толщу другой жидкости.

Следует заметить, что приведенный здесь анализ справедлив при краемом угле смачивания, равном ${}^1/_2\,\pi$, так как в противном случае невозмущенная поверхность раздела жидкостей в баке будет, вообще говоря, не плоской. Эта оговорка, впрочем, существенна лишь для капилляров и вообще при малых числах B, где форма поверхности раздела при краевых углах смачивания, значительно отличных от ${}^1/_2\,\pi$, может существенно отличаться от плоской. В неслабых же гравитационных полях ($B \gg 1$) отклонение невозмущенной поверхности раздела от плоской имеет место лишь у стенок, мало по величине и поэтому не может заметно изменить результаты приведенного выше анализа даже при краевом угле, близком к нулю или π.

7. Остановимся кратко на одном виде неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в переменных силовых полях, а именно на неустойчивости, которую можно назвать параметрическим резонансом поверхности раздела жидкостей в колеблющемся силовом поле.

Если гравитационное поле испытывает колебания во времени, то функция $\beta(\tau)$ в уравнении (1.4) будет периодической функцией времени. Уравнение (1.4) в этом случае редуцируется к уравнению Хилла, а в частном случае синусоидальной зависимости перегрузок от времени — к уравнению Матье [3, 4]. При этом если период изменения перегрузки равен или кратен величине $\pi\,\{[(1 - \rho)\beta + B^{-1}]\, mgh\}^{-1/2}$, то наступает параметрический резонанс и возмущения поверхности раздела неограниченно (без учета затухания) возрастают уже при сколь угодно малой величине амплитуды колебаний перегрузки. С ростом амплитуды колебаний напряженности силового поля области неустойчивых состояний поверхности раздела расширяются по частоте, приводя к появлению неустойчивости не только при указанных частотах, но и вблизи этих частот.

Для случая синусоидального силового поля области неустойчивости при любой величине амплитуды колебаний можно определить по диаграмме Стретта, для случая кусочно-постоянных перегрузок — пользуясь методом Мейснера, при других законах периодического изменения перегрузок — численным решением уравнения (1.4).

При неустойчивости механизм воздействия гравитационного поля на поверхность раздела жидкостей эквивалентен следующему требованию: гравитационное поле должно усиливаться в той фазе колебаний, когда поверхность раздела идет из отклоненного положения к равновесному, и должно ослабляться в фазе движения поверхности от равновесного положения к максимально отклоненному. В этом случае поле совершает работу над системой, увеличивая ее колебательную энергию, т. е. вызывая неустойчивость поверхности раздела двух жидкостей. Параметрический резонанс свободной поверхности жидкости наблюдался еще Фарадеем.

8. В заключение рассмотрим случай импульсного поля. Пусть на границу раздела двух газов действует импульсное ускорение, вызванное падением на эту поверхность ударной волны. В этом случае

$$\beta(t) = \frac{U}{g}\delta(t - t_1)$$

где U — массовая скорость границы раздела газов, вызванная прохождением ударной волны, $\delta(t - t_1)$ — функция Дирака. Интегрирование уравнения (1.4) дает следующее уравнение:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \left[\frac{d\sigma}{dt}\Big|_{t=0} - mh(1-\rho)U\sigma(t_1)\right]t, \quad \sigma_0 = \sigma(t)\big|_{t=0}$$

или при неподвижной в момент падения ударной волны поверхности раздела

$$\sigma(t) = \sigma_0\left(1 - m\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}Ut\right) \qquad (8.1)$$

В последнем соотношении глубина обоих газов взята бесконечной. Таким образом, поверхность раздела газов в этом случае оказывается неустойчивой при движении ударной волны и со стороны более легкого газа, и со стороны более тяжелого, причем при движении со стороны более тяжелого газа ($\rho_1 > \rho_2$) поверхность раздела вначале изменяет знак возмущений — выпуклости переходят во впадины и наоборот,— а далее отклонения растут линейно со временем. Скорость развития неустойчивости возрастает при увеличении разности плотностей газов, амплитуды начального возмущения поверхности раздела и интенсивности ударной волны и уменьшается с ростом длины волны возмущения $\lambda = 2\pi / m$. Трудоемкие численные расчеты по этой задаче проводились Р. Рихтмайером [5], пытавшимся решить ее с позицией тейлоровой неустойчивости, а достаточно тщательное экспериментальное исследование было выполнено Е. Е. Мешковым [6].

Уравнение (8.1) можно записать в виде

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)} = 1 - 2\pi\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\frac{x}{\lambda}$$

Отсюда следует, что все прямые на фиг. 5 указанной работы Е. Е. Мешкова должны начинаться в точке с ординатой 1.

Результаты исследования Е. Е. Мешкова полностью подтверждают выводы, полученные в данной работе. Таким образом, поведение поверхности раздела двух газов при падении на нее ударной волны определяется не тейлоровой неустойчивостью, а специфической неустойчивостью, аналогичной уже рассмотренной выше неустойчивости перехода в невесомость системы из двух расслоенных газов.

Поступила 2 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, vol. 201, No. 1065.
2. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир» 1964.
3. Benjamin T. B., Ursell F. The stabillity of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1954, vol. 225, pp. 505—515.
4. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., Физматгиз., 1965.
5. Richtmyer R. D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids. Communs Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, pp. 297—319.
6. Мешков Е. Е. Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.