УДК 539.3

СИНГУЛЯРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучен ряд сингулярно возмущенных краевых задач и вариационных неравенств, возникающих в теории изгиба ортотропных пластин, обладающих сильной анизотропией упругих свойств.

В отличие от краевых задач плоской теории упругости, ранее изучавшихся автором [1], асимптотический анализ краевых задач при принятых в статье соотношениях жесткостей приводит к ряду явлений, не встречающихся в плоской задаче теории упругости. Например, предельное уравнение квазиэллиптично (имеет разные порядки дифференцирования по различным переменным), в то время как в плоской задаче теории упругости оно имеет составной тип; в прямоугольной области изучение смешанной задачи приводит в пределе к двум уравнениям изгиба упругой балки. Исследуемые автором задачи возникают, например, при изучении упругих пластин, армированных одним семейством очень жестких непрерывных волокон в заданном направлении.

1. Предположим, что справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява и моменты связаны с деформациями соотношениями

$$M_{11} = -(D_{11}e_{11}(w) + D_{12}e_{22}(w)), \qquad M_{22} = -(D_{12}e_{11}(w) + D_{22}e_{22}(w)),$$
$$M_{12} = -2D_{66}e_{12}(w). \tag{1.1}$$

Требование положительности потенциальной энергии деформации приводит к неравенствам

$$D_{ii} > 0, \quad i = 1,\, 2,\, 6, \quad D_{11}D_{22} - D_{66}^2 > 0.$$

Предположим, что жесткость в одном из выбранных направлений значительно выше остальных:

$$D_{11} \gg D_{22}, D_{12}, D_{66}.$$

Положим

$$\varepsilon^{-2} = D_{11}/D_{22}, \quad d_{ij} = D_{ij}/D_{22}, \quad i,\, j = 1,\, 2,\, 6, \quad m = d_{12} + 2d_{66}, \quad \varepsilon \ll 1,$$
$$e_{11}(w) = \cos^2\alpha w_{,11} + \sin^2\alpha w_{,22} + \sin 2\alpha w_{,12},$$
$$e_{22}(w) = \cos^2\alpha w_{,22} + \sin^2\alpha w_{,11} - \sin 2\alpha w_{.12},$$
$$e_{12}(w) = \sin\alpha\cos\alpha(w_{,11} - w_{.22}) - \cos 2\alpha w_{,12}.$$

Здесь α — угол между выделенным направлением и осью x_1; w — прогиб; $w_{,ij} = \partial^2 w/\partial x_i \partial x_j$, $i,\, j = 1,\, 2$. Отметим, что при прямолинейной анизотропии соотношения (1.1) совпадают с общепринятыми; соотношения (1.1) означают, что оси ортотропии материала составляют углы α и $\alpha+\pi/2$ с осью x_1. Исследуемые задачи приводятся к задаче минимизации функционала энергии

$$\int\limits_Q [D_{11}e_{11}^2(w)+D_{22}e_{22}^2(w)+2D_{12}e_{11}^2(w)+4D_{66}e_{12}^2(w)]\,dx-2\int\limits_Q fw\,dx, \qquad f\in L^2(Q)$$

на замкнутом подпространстве $H^2(Q)$, где Q — ограниченная область на плоскости с кусочно-гладкой границей. Прогиб определяется из уравнения

$$D_{11}e_{11}^*e_{11}(w^\varepsilon)+D_{22}e_{22}^*e_{22}(w^\varepsilon)+D_{12}e_{11}^*e_{22}(w^\varepsilon)+D_{12}e_{22}^*e_{11}(w^\varepsilon)+2D_{66}e_{12}^*e_{12}(w^\varepsilon)=f. \quad (1.2)$$

Здесь e_{ij}^* — дифференциальные операторы, формально сопряженные по Лагранжу к дифференциальным операторам $e_{ij}(w^\varepsilon)$, i, $j=1$, 2. Символ ε вверху в обозначении прогиба отмечает зависимость решения от малого параметра. Разделив коэффициенты и правую часть на D_{22} и сохранив для безразмерной правой части прежнее обозначение, получим уравнение с большим параметром ε^{-2} при выражении $e_{11}^*e_{11}(w^\varepsilon)$:

$$\varepsilon^{-2}e_{11}^*e_{11}(w^\varepsilon)+d_{22}e_{22}^*e_{22}(w^\varepsilon)+d_{12}e_{11}^*e_{22}(w^\varepsilon)+d_{12}e_{22}^*e_{11}(w^\varepsilon)+2d_{66}e_{12}^*e_{12}(w^\varepsilon)=f. \quad (1.3)$$

Прежде чем изучать зависимость решения уравнения (1.3) от малого параметра, рассмотрим уравнение $e_{11}(v)=0$. Легко видеть, что это параболическое уравнение с двойным семейством вещественных характеристик

$$\cos\alpha\psi_{,x_1}+\sin\alpha\psi_{,x_2}=0.$$

Предположим, что семейство характеристик достаточно гладкое, и введем новые координаты $\xi=x_1$, $\eta=x_2-\psi(x_1)$. Тогда $e_{11}(v)$ можно представить в виде

$$e_{11}(v)=\frac{1}{1+\psi_{,\xi}^2}\,v_{,\xi\xi}-\frac{\psi_{,\xi\xi}}{1+\psi_{,\xi}^2}\,v_{,\eta}=a(\xi)v_{,\xi\xi}-b(\xi)v_{,\eta}.$$

Поставим для уравнения (1.3) первую краевую задачу:

$$w^\varepsilon\Big|_{\partial Q}=\psi_1, \qquad \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial n}\Big|_{\partial Q}=\psi_2. \quad (1.4)$$

Здесь ∂Q — граница области Q. Рассмотрим вопрос о разрешимости краевой задачи (1.3), (1.4). Без ограничения общности можно считать краевые условия однородными; действительно, решение w^ε в силу линейности задачи можно представить в виде суммы $w^\varepsilon=u+v$, где функция v удовлетворяет неоднородным краевым условиям, а функция u неизвестна. При этом, вообще говоря, в правой части уравнения для u появляется член порядка $O(\varepsilon^{-2})$. Рассмотрим сначала случай однородных краевых условий (1.4). Покажем, что уравнение (1.3) равномерно эллиптично. Если $\alpha=0$, то коэффициенты постоянны и существование единственного решения задачи (1.3), (1.4) хорошо известно (см., например, [2, гл. 4, теорема 1.2]). При произвольном α достаточно использовать тождество

$$e_{11}^2(w)+e_{22}^2(w)+2e_{12}^2(w)=w_{,11}^2+w_{,22}^2+2w_{,12}^2,$$

справедливость которого проверяется прямым вычислением, и положительную определенность удельной энергии деформации. Пусть $a^\varepsilon(w,v)$ — билинейная симметричная форма

$$a^\varepsilon(w,v)=\int\limits_Q[\varepsilon^{-2}e_{11}(w)e_{11}(v)+d_{12}e_{11}(w)e_{22}(v)+$$
$$+d_{12}e_{11}(v)e_{22}(w)+4d_{66}e_{12}(w)e_{12}(v)+e_{22}(w)e_{22}(v)]\,dx.$$

Вариационная постановка задачи (1.3), (1.4) состоит в следующем: определить функцию $w^\varepsilon \in H_0^2(Q)$ такую, что для любой $v \in H_0^2(Q)$ имеет место интегральное тождество

$$a^\varepsilon(w^\varepsilon, v) = (f, v), \qquad f \in L^2(Q). \tag{1.5}$$

Для решения задачи (1.5) справедливы оценки

$$\|w^\varepsilon\|_2 \leqslant C, \qquad \varepsilon^{-2}\|e_{11}(w^\varepsilon)\|_0^2 \leqslant C. \tag{1.6}$$

Действительно, существует положительное d такое, что $dd_{22} - d_{12}^2 > 0$. Отсюда и из компактности вложения $H_0^2(Q)$ в $L^2(Q)$ следует первая оценка в (1.6). Выбрав ε настолько малым, что $\varepsilon^{-2} > d$, получим вторую оценку. Поэтому при $\varepsilon \to +0$ можно выделить подпоследовательность (для которой сохраним прежнее обозначение), слабо сходящуюся к некоторой функции $w^0 \in H_0^2(Q)$, причем $e_{11}(w^0) = 0$. Рассмотрим два варианта: а) $b(\xi) \neq 0$, б) $b(\xi) = 0$.

Как доказано в п. **3**, однородная краевая задача для уравнения $e_{11}^* e_{11}(w^0) = 0$ имеет только нулевое решение. Поэтому при $\varepsilon \to +0$ решение краевой задачи с однородными краевыми условиями сходится к нулю, если справедливы предположения «а» или «б». В п. **3** изучено также поведение неоднородной краевой задачи при стремлении малого параметра к нулю.

Теорема 1. *Решение краевой задачи* (1.3), (1.4) *сходится к нулю при* $\varepsilon \to +0$, *если выполнено одно из предположений* «а» *или* «б».

Заметим, что оценки (1.6) справедливы не только в $H_0^2(Q)$, но и в $H^2(Q)$, а тогда подпространство K, выделяемое условием $e_{11}(v) = 0$, может быть нетривиальным. Рассмотрим такой пример. Пусть $\alpha = 0$ (прямолинейная анизотропия), Q — прямоугольная область, $Q = \{(x_1, x_2); |x_1| \leqslant h, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$ и рассматривается смешанная краевая задача D_ε изгиба ортотропной пластины

$$w^\varepsilon(\pm h, x_2) = 0, \quad \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_2}(\pm h, x_2) = 0, \quad \left(\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_1^2} + d_{12}\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_2^2}\right)(x_1, 0) = 0,$$

$$\left(\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_1^2} + d_{12}\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_2^2}\right)(x_1, 1) = 0, \quad \left(\varepsilon^{-2}\frac{\partial^3 w^\varepsilon}{\partial x_1^3} + (d_{12} + 2d_{66})\frac{\partial^3 w^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right)(x_1, 0) = 0,$$

$$\left(\varepsilon^{-2}\frac{\partial^3 w^\varepsilon}{\partial x_1^3} + (d_{12} + 2d_{66})\frac{\partial^3 w^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right)(x_1, 1) = 0.$$

Пусть V — подпространство $H^2(Q)$, выделяемое условиями

$$V = \{v \in H^2(Q), \partial^k v/\partial x_2^k = 0, \quad k = 1, 2\}$$

(функция и ее производная обращаются в нуль в слабом смысле при $x_2 = 0$). Справедливы оценки (1.6), и поэтому из последовательности w^ε можно выделить слабо сходящуюся в V к элементу w^0 подпоследовательность, причем так, что $w^0_{,x_1x_1} = 0$. Тогда w^0 можно представить в виде суммы $w^0 = x_1\psi_1(x_2) + \psi_2(x_2)$. Рассмотрим интегральное тождество (1.5) на подпространстве K пространства V, выделяемом условием $v_{,x_1x_1} = 0$, и перейдем к пределу при $\varepsilon \to +0$. Для определения w^0 получим интегральное тождество

$$\int_Q \{4d_{66} w^0_{,x_1x_2}\varphi_{,x_1x_2} + w^0_{,x_2x_2}\varphi_{,x_2x_2}\}\, dx = \int_Q f\varphi\, dx, \tag{1.7}$$

справедливое для любой функции $\varphi \in K$. Любая функция из K допускает представление $\varphi = x_1\varphi_1(x_2) + \varphi_2(x_2)$. При этом w^ε, $\partial w^\varepsilon/\partial x_2$ сходятся соответственно в $H^{3/2}(\partial Q), H^{1/2}(\partial Q)$ к w^0, $\partial w^0/\partial x_2$, поэтому $\psi_k \in H_0^2(0, 1)$, $k = 1, 2$. Подставим φ_k, ψ_k

в (1.7) и проинтегрируем. В результате получим, что ψ_1, ψ_2 удовлетворяют интегральному тождеству

$$(2h^3/3)\int_0^1 \psi_{1,22}\varphi_{1,22}\,dx_2 + 2h\int_0^1 \psi_{2,22}\varphi_{2,22}\,dx_2 + \\ +4hd_{66}\int_0^1 \psi_{1,2}\varphi_{1,2}\,dx_2 = \int_0^1 \langle x_1 f\rangle\varphi_1(x_2)\,dx_2 + 2h\int_0^1 \langle f\rangle\,dx_2 \qquad (1.8)$$

для любых $\varphi_k(x_2) \in H_0^2(0,1)$. Здесь

$$\langle g\rangle = \int_{-h}^{h} g(x_1,x_2)\,dx_1.$$

Так как $\langle g\rangle \in L^2(0,1)$, то по известным теоремам о гладкости $\psi_1,\psi_2 \in H^4(0,1)$ и потому являются решениями уравнений

$$\frac{2h^3}{3}\,\frac{d^4\psi_1}{dx_2^4} - 4hd_{66}\,\frac{d^2\psi_1}{dx_2^2} = \langle fx_1\rangle, \qquad \frac{d^4\psi_2}{dx_2^4} = \langle f\rangle. \qquad (1.9)$$

Первое уравнение в (1.9) можно рассматривать как уравнение изгиба предварительно напряженной балки. Таким образом, предельная задача распалась на две задачи изгиба балки.

Теорема 2. *В указанных выше предположениях решение задачи D_ε сходится в V к решению задачи* (1.9).

2. Представляет интерес вопрос о том, как в этой ситуации ведет себя решение задачи об изгибе пластины над препятствием. Пусть K_0 — конус в V, выделяемый условием $v \geqslant 0$ на ∂Q. Рассмотрим вариационное неравенство

$$a^\varepsilon(w^\varepsilon, v - w^\varepsilon) \geqslant (f, v - w^\varepsilon), \qquad v \in K_0. \qquad (2.1)$$

Прямой предельный переход в (2.1) невозможен, так как ε входит в левую часть (2.1) в отрицательной степени. Существование решения задачи (2.1) известно и следует из общих теорем теории монотонных операторов [3]. Вместо (2.1) рассмотрим задачу с оператором штрафа

$$a^\varepsilon(w^{\varepsilon,\eta}, v) - \eta^{-1}\int_Q (w^{\varepsilon,\eta})^- v\,dx = (f,v), \quad f \in L^2(Q). \qquad (2.2)$$

Здесь

$$v^-(x) = 0, \quad v(x) \geqslant 0, \quad v^-(x) = -v(x), \quad v(x) < 0.$$

Для решения задачи (2.2) справедливы равномерные по ε, η оценки

$$\|w^{\varepsilon,\eta}\|_2 \leqslant C, \qquad \varepsilon^{-2}\|w^{\varepsilon,\eta}_{,x_1x_1}\|_0^2 \leqslant C.$$

Они позволяют совершить предельный переход при $\varepsilon \to +0$ в (2.2), причем член с оператором штрафа сходится сильно в $L^2(Q)$. В пределе получим

$$w^{0,\eta} = x_1\psi_1^\eta(x_2) + \psi_2^\eta(x_2).$$

Введем симметричные билинейные формы

$$a^1(\psi_1^\eta, \varphi_1) = \frac{2h^3}{12}\int_0^1 \psi^\eta_{,22}\varphi_{1,22}\,dx_2 + 2hd_{66}\int_0^1 \psi^\eta_{1,2}\varphi_{1,2}\,dx_2,$$

$$a^2(\psi_2^\eta, \varphi_2) = \int_0^1 \psi_{2,22}^\eta \varphi_{2,22}\, dx_2.$$

В результате ψ_1^η, ψ_2^η удовлетворяют интегральным тождествам

$$a^1(\psi_1^\eta, \varphi_1) - \frac{2h^3}{3}\eta^{-1}\int_0^1 (\psi_1^\eta)^- \varphi_1(x_2)\, dx_2 = \int_0^1 (\langle x_1 f\rangle + 2h\langle f\rangle)\varphi_1(x_2)\, dx_2; \tag{2.3}$$

$$a^2(\psi^\eta, \varphi_2) - \eta^{-1}\int_0^1 (\psi_2^\eta)^- \varphi_2(x_2)\, dx_2 = \int_0^1 \langle f\rangle \varphi_2(x_2)\, dx_2. \tag{2.4}$$

Интегральные тождества (2.3), (2.4) соответствуют уравнениям с штрафом для задачи изгиба балки над препятствием. Предельный переход при $\eta \to +0$ осуществляется известными способами [3]. Обозначим через ψ_1^0, ψ_2^0 слабые пределы функций ψ_1^η, ψ_2^η при $\eta \to +0$. Тогда ψ_1^0, ψ_2^0 удовлетворяют вариационным неравенствам

$$a^1(\psi_1^0, \varphi_1 - \psi_1^0) \geqslant (\langle f x_1\rangle, \varphi_1 - \psi_1^0) \quad \forall \varphi_1 \in K_0 \cap H_0^2(0,1); \tag{2.5}$$

$$a^2(\psi_2^0, \varphi_2 - \psi_2^0) \geqslant (\langle f\rangle, \varphi_2 - \psi_2^0) \quad \forall \varphi_2 \in K_0 \cap H_0^2(0,1). \tag{2.6}$$

Таким образом, исходное вариационное неравенство (2.1) в пределе расщепилось на два, соответствующих задаче изгиба упругой балки над препятствием.

Теорема 3. *Решение вариационного неравенства* (2.1) *слабо сходится в* V *к решениям неравенств* (2.5), (2.6).

3. В п. **1** показано, что решение задачи (1.2) при $\varepsilon \to +0$ сходится к нулю. Если граничные данные ненулевые, то при приведении краевой задачи к однородной в правой части уравнения возникает член порядка $O(\varepsilon^{-2})$. Исследуем поведение при $\varepsilon \to +0$ решения задачи

$$a^\varepsilon(w^\varepsilon, v) = (\varepsilon^{-2} f, v), \quad f \in L^2(Q), \quad w^\varepsilon \in H_0^2(Q). \tag{3.1}$$

Напомним, что в предположении достаточной гладкости коэффициентов заменой независимых переменных дифференциальный оператор $e_{11}(w)$ можно привести к виду

$$e_{11}(w) = (1 + \varphi_{,x_1}^2)^{-1} w_{,x_1x_1} - \varphi_{,x_1x_1}(1 + \varphi_{,x_1}^2)^{-2} w_{,x_2}.$$

Положим (для сокращения записи) $L(w) = e_{11}(w)$. Для дальнейшего необходимо изучить вопрос о разрешимости первой краевой задачи для уравнения

$$L^*(L(w)) = f. \tag{3.2}$$

Отметим, что свойства гладкости решения уравнения (3.2) существенно зависят от того, равна или нет нулю всюду в области функция $g(x_1) = \varphi_{,x_1x_1}$. Если $g(x_1) = 0$, определим пространство G_1 как пополнение класса функций $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|u\|_{G_1} = \left\{ \int_Q [u_{,x_1x_1}^2 + u_{,x_1}^2 + u^2]\, dx \right\}^{1/2}. \tag{3.3}$$

Точные теоремы о следах функций из G_1 для области с кусочно-гладкой границей даны в [4]. Если $g(x_1)$ отлична от нуля, введем пространство $G_2 = W^{2,1}(Q)$ как пополнение функций класса $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|u\|_{G_2} = \left\{ \int_Q [u_{,x_1x_1}^2 + u_{,x_1}^2 + u_{,x_2}^2 + u^2]\, dx \right\}^{1/2}.$$

Обозначим через G пространство G_1 в первом случае и G_2 во втором. Под обобщенным решением первой краевой задачи для уравнения (3.2) в обоих случаях понимается функция $w \in G$, удовлетворяющая для любой $v \in C_0^\infty(Q)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_Q L(w)L(v)\,dx = \int\limits_Q fv\,dx. \tag{3.4}$$

Если $g(x_1) = 0$, граничные условия для уравнения (3.2) имеют вид

$$w\Big|_{\partial Q^*} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{\partial Q^*} = 0, \tag{3.5}$$

если $g(x_1)$ отлична от нуля, —

$$w\Big|_{\partial Q} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma_2} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma^*} = 0, \qquad \Gamma^* = \partial Q - \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \tag{3.6}$$

Здесь ∂Q^* — нехарактеристическая часть границы; Γ_i ($i = 1,\ 2,\ \operatorname{mes}\Gamma_i \neq 0$) — участки границы с уравнением $x_i = \mathrm{const}$. Для функций из G справедливо неравенство типа Пуанкаре: существует положительная постоянная C такая, что для любой функции из G имеет место неравенство

$$\|u\|_0^2 \leqslant C\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_0^2. \tag{3.7}$$

Здесь $i = 1$, если $u \in G_1$, и $i = 1,\ 2$, если $u \in G_2$. Из последнего неравенства следует, что если $u \in G_1$, то на G_1 полунорма $\left|u_{,x_1x_1}\right|_0^2$ (норма функции $u_{,x_1x_1}$ в $L^2(Q)$) эквивалентна норме (3.3), и потому краевая задача для уравнения (3.2) при граничных условиях (3.5) имеет единственное решение. Если $g(x_1)$ отлична от нуля, ситуация немного сложнее. В статье [5] доказано (лемма 8.1), что для обобщенного решения задачи (3.2) при граничных условиях (3.6) справедлив аналог неравенства Гординга для эллиптических операторов; а именно: существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что

$$(L(v), L(v)) \geqslant C_1\|v\|_{G_2}^2 - C_2\|v\|_0^2. \tag{3.8}$$

Покажем, что решение задачи (3.2), (3.6) в G_2 единственно. Действительно, если f равно нулю, то из интегрального тождества следует, что $L(w) = 0$; другими словами,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial w}{\partial x_2} = 0. \tag{3.9}$$

Умножим (3.9) на w и проинтегрируем по частям; тогда получим, что $\|w_{x_1}\|_0 = 0$; так как для w справедливо неравенство типа Пуанкаре (3.7), отсюда следует, что $w = 0$. Из единственности решения и неравенства (3.8) следует, что существует положительная постоянная K такая, что справедливо неравенство

$$(L(w), L(w)) \geqslant K\|w\|_{G_2}^2. \tag{3.10}$$

Действительно, если (3.10) не выполняется, то для каждого натурального n можно найти такой элемент $u_n \in G_2$, что $\|u_n\|_{G_2}^2 \geqslant n(L(u_n), L(u_n))$. Положим $v_n = u_n/\|u_n\|_{G_2}$. Тогда $\|v_n\|_{G_2} = 1$ для каждого n и при этом $(Lv_n, Lv_n)_0 \leqslant 1/n$. Следовательно, $(Lv_n, Lv_n)_0 \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $(Lv_n, Lv)_0$ стремится к нулю при $n \to \infty$ для каждой $v \in G_2$; но по компактности вложения $G_2(Q)$ в $L^2(Q)$ существует подпоследовательность (для которой сохраним прежнее обозначение) такая, что $\|u_j - u_k\|_0$ стремится к нулю при $j,\ k \to \infty$. Однако по неравенству (3.7)

$$(Lu_j - Lu_k, Lu_j - Lu_k)_0 \geqslant C_1\|u_j - u_k\|_{G_2}^2 - C_2\|u_j - u_k\|_0^2,$$

и потому $\|u_j - u_k\|_{G_2} \to 0$ и существует (ввиду полноты) функция u такая, что $\|u_j - u\|_{G_2} \to 0$. Тогда $(Lu, Lv) = 0$ для каждой $v \in G_2$. Но единственное решение в G_2 — это нуль. Получаем противоречие, так как норма u в G_2 равна единице. Вернемся к задаче (3.1).

Теорема 4. *Решение задачи* (3.1) *слабо сходится к решению задачи* (3.8) *в G, причем имеют место оценки*

$$\|w^\varepsilon\|_G \leqslant C, \qquad \varepsilon^2\|e_{k2}(w^\varepsilon)\|_0^2 \leqslant C, \quad k = 1, 2. \tag{3.11}$$

Здесь C от ε не зависит. Умножим интегральное тождество (3.8) на ε^2 и положим $v = w^\varepsilon$. Тогда получим оценку

$$\|e_{11}(w^\varepsilon)\|_0^2 + C_1\varepsilon^2\|e_{12}(w^\varepsilon)\|_0^2 + C_2\varepsilon^2\|e_{22}(w^\varepsilon)\|_0^2 \leqslant \|f\|_0\|w^\varepsilon\|_0 \leqslant (4\theta)^{-1}\|f\|_0^2 + \theta\|w^\varepsilon\|_G^2. \tag{3.12}$$

Так как $\|e_{11}(w^\varepsilon)\|_0^2 \geqslant C\|w^\varepsilon\|_G^2$, положив в (3.12) $\theta = C/2$, получим оценку $\|w^\varepsilon\|_G \leqslant C\|f\|_0$ и в результате остальные оценки в (3.12). Оценки (3.12) позволяют перейти к пределу в интегральном тождестве (1.5), умноженном на ε^2; при этом w^ε сходится слабо в G к w^0, причем w^0 удовлетворяет интегральному тождеству (3.9). Из единственности решения следует, что и вся последовательность сходится к w^0.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боган Ю. А.** Один класс сингулярно возмущенных краевых задач в двумерной теории упругости // ПМТФ. 1987. № 2. С. 138–143.
2. **Литвинов В. Г.** Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987.
3. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
4. **Joly P.** Some trace theorems in anisotropic Sobolev spaces // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23, N 3. P. 799–819.
5. **Михайлов В. П.** Первая краевая задача для некоторых полуограниченных гипоэллиптических уравнений // Мат. сб. 1964. Т. 64, № 1. С. 10–51.

Поступила в редакцию 2/IV 1996 г.,
в окончательном варианте — 19/I 1998 г.