

УДК 532.516

## ДВА РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

Е. А. Карabut

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: karabut@hydro.nsc.ru

Рассматривается стационарное течение тонкой пленки вязкой несжимаемой жидкости на вращающемся цилиндре, направление оси которого перпендикулярно направлению силы тяжести. На свободной поверхности учитывается капиллярность. Решаются уравнения тонкого слоя, полученные В. В. Пухначевым, которые зависят от числа Галилея и капиллярного числа. Равенство нулю первого параметра означает, что сила тяжести равна нулю. Если второй параметр равен нулю, то равен нулю и коэффициент поверхностного натяжения. С использованием метода коллокаций определены значения этих параметров, при которых решения существуют, а также количество решений. Численно найдено еще одно решение, соответствующее свободной поверхности каплевидной формы. Изучено изменение параметров течения при изменении числа Галилея и капиллярного числа. Численно исследовано ветвление решений.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, свободная граница, капиллярность, длинные волны.

**Постановка задачи.** Твердый цилиндр радиусом  $a$  вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ . На цилиндре находится пленка жидкости (вязкость жидкости  $\nu$ , плотность  $\rho$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ ). Сила тяжести задается ускорением свободного падения  $g$ . Ищется стационарное решение: требуется найти толщину пленки  $h(\theta)$ , которая зависит только от полярного угла  $\theta$  (рис. 1).

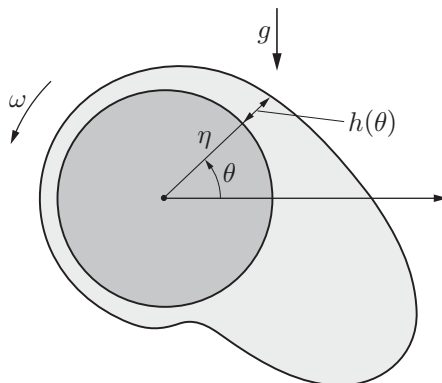


Рис. 1. Схема течения

В работах [1–7] данная задача решалась с использованием различных приближений. В точной нестационарной постановке [2], когда толщина пленки не считается малой, эта задача определяется заданием трех безразмерных параметров:  $Re = a^2\omega/\nu$  — числа Рейнольдса,  $G = ga/(\omega\nu)$  — числа Галилея,  $C = \sigma/(\rho a\omega\nu)$  — капиллярного числа.

Введение малого параметра  $\varepsilon$  соотношением

$$h = \varepsilon aH$$

позволяет рассмотреть пленки малой толщины. Считается, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функция  $H$  и ее производные по  $\varepsilon$  остаются конечными. Кроме того, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  постулируется существование следующих пределов:

$$C\varepsilon^3 \rightarrow 3\alpha, \quad G\varepsilon^2 \rightarrow 3\gamma, \quad Re\varepsilon^2 \rightarrow 0.$$

В таких предположениях неизвестная функция  $H(\theta, t)$ , описывающая нестационарную деформацию пленки, находится из уравнения

$$H_t + \alpha[H^3(H_{\theta\theta\theta} + H_\theta)]_\theta + (H - \gamma H^3 \cos \theta)_\theta = 0 \quad (1)$$

и зависит от безразмерных параметров  $\alpha, \gamma$ . Поведение этого уравнения изучено в [6].

В стационарном случае уравнение (1) интегрируется один раз и неизвестная функция  $H(\theta)$  определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\alpha H^3(H''' + H') = \gamma H^3 \cos \theta - H + Q,$$

где  $Q$  — безразмерный поток жидкости через поперечное сечение пленки.

Введя обозначения

$$\eta = Q^{-1}H, \quad \delta = \alpha Q^3, \quad \beta = \gamma Q^2,$$

толщину пленки  $\eta(\theta)$  можно определить из решения задачи

$$\delta(\eta''' + \eta') = \beta \cos \theta - 1/\eta^2 + 1/\eta^3; \quad (2)$$

$$\eta(\theta + 2\pi) = \eta(\theta). \quad (3)$$

Задача (2), (3) зависит от параметров  $\delta, \beta$ . Ответ на вопрос о количестве решений задачи (2), (3) частично дает теорема, доказанная в [2].

**Теорема.** *Существуют параметры  $\delta, \beta$ , при которых задача (2), (3) имеет, по крайней мере, два решения.*

Количество решений, их тип и характер можно определить только численно. Целью данной работы является численное определение в параметрической плоскости  $(\delta, \beta)$  множества точек, для которых исследуемая задача имеет решения, и количества решений, а также их исследование.

Необходимо установить, в какой приблизительно части параметрической плоскости  $(\delta, \beta)$  следует искать область, в которой решение задачи (2), (3) существует. На рис. 2 представлены данные работ [1–3, 6].

Известно следующее.

1. Область существования решения расположена в первом квадранте параметрической плоскости  $(\delta, \beta)$ , поскольку  $\delta \geq 0, \beta \geq 0$ .

2. При  $\beta > 4$  решений не существует.

3. Если значение  $\delta$  достаточно велико и  $\beta > 1/3$ , то решений не существует.

4. При  $\delta = 0$  и  $\beta \in [0; 4/27]$  решение единственное. При  $\delta = 0$  и  $\beta \in (4/27; \infty)$  решений не существует.

5. При  $\beta = 0$  имеется решение  $\eta = 1$ . При малых  $\beta$  всегда имеется решение, представимое в виде ряда по степеням  $\beta$ :

$$\eta = 1 + \beta \cos \theta + \beta^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 36\delta^2} \cos 2\theta - \frac{9\delta}{1 + 36\delta^2} \sin 2\theta \right) + O(\beta^2). \quad (4)$$

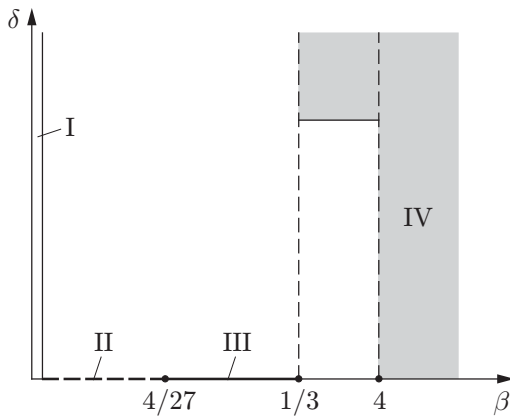


Рис. 2

Рис. 2. Области существования решений задачи (2), (3) в плоскости  $(\beta, \delta)$  (данные работ [1–3, 6]):

I — степенной ряд; II — единственное решение; III, IV — отсутствие решений

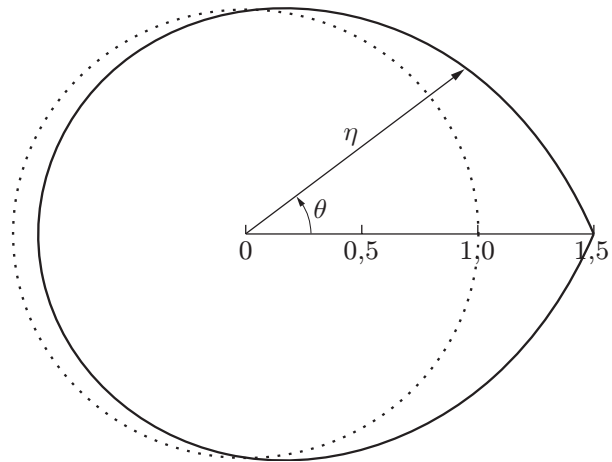


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость  $\eta(\theta)$  в отсутствие капиллярности ( $\delta = 0$ ):

пунктирная линия —  $\beta = 0$ ; сплошная —  $\beta = 4/27$

Случай отсутствия капиллярности ( $\delta = 0$ ), исследованный в [3], является наиболее простым, так как дифференциальное уравнение (2) становится алгебраическим. При  $\delta = 0$ ,  $\beta = 4/27$  на свободной поверхности образуется точка заострения. На рис. 3 в полярной системе координат представлена зависимость  $\eta(\theta)$  для этого случая. (На рис. 3, 7–9 не показан внутренний твердый цилиндр, который фактически стянут в точку. Изобразить его невозможно, так как в приближении тонкой пленки его радиус равен бесконечности.) Пунктирной линией показана единичная окружность, являющаяся графиком функции  $\eta(\theta)$  при  $\delta = 0$ ,  $\beta = 0$ .

**Аналитическое продолжение решения.** Задача (2), (3) двумя способами аппроксимируется системой алгебраических уравнений достаточно большой размерности и решается численно методом Ньютона. Как известно, сходимость итерационного метода Ньютона существенно зависит от начального приближения. При удачном его выборе итерации сходятся, в результате получается та или иная ветвь решения аппроксимируемой задачи, при неудачном выборе итерационный процесс расходится.

Аналитическое продолжение решения в параметрической плоскости  $(\delta, \beta)$  осуществлялось следующим образом. Пусть при  $\delta = \delta_0$ ,  $\beta = \beta_0$  известно какое-либо решение системы алгебраических уравнений. Это решение выбирается в качестве начального приближения для нахождения решения в новой точке параметрической плоскости  $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$ ,  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ . Если шаги  $(\Delta\delta, \Delta\beta)$  достаточно малы, а якобиан системы алгебраических уравнений отличен от нуля, то при таком выборе начального приближения метод Ньютона всегда сходится. Двигаясь таким образом по любому пути, исходящему из точки  $(\delta_0, \beta_0)$ , можно осуществить аналитическое продолжение выбранной ветви решения в заданную точку  $(\delta, \beta)$ .

На каждом шаге вычисляется якобиан, обращение которого в нуль (в реальных расчетах фиксировалась, как правило, смена знака якобиана) означает, что найдена точка бифуркации. Дальнейшее аналитическое продолжение решения вдоль выбранного пути либо невозможно, либо возможно, но в окрестности точки бифуркации начальное приближение следует выбирать особым образом.

**Метод коллокаций.** Задача (2), (3) очень чувствительна к чрезвычайно малому изменению параметров  $\delta, \beta$ , поэтому для ее решения необходим достаточно точный алгоритм. Большой точностью обладают проекционные алгоритмы (типа метода Галеркина). Поскольку требуется найти периодическое решение уравнения

$$\delta\eta^3(\eta''' + \eta') - \beta\eta^3 \cos \theta + \eta - 1 = 0, \quad (5)$$

в качестве базовых функций естественно использовать тригонометрические полиномы. Будем искать решение в виде

$$\eta = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (6)$$

Число  $N$  определяет количество использованных гармоник, с его ростом увеличивается точность вычислений. Величинами, подлежащими определению, являются коэффициенты тригонометрического полинома

$$a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N. \quad (7)$$

Решение (6) не удовлетворяет, вообще говоря, уравнению (5). Среди проекционных методов наиболее простым в реализации является метод коллокаций, когда требуется выполнение уравнения в конечном числе точек. Подставим решение (6) в уравнение (5) и потребуем, чтобы левая часть уравнения была равна нулю в  $2N + 1$  точках  $\theta_j = 2\pi j / (2N + 1)$ . В результате получим систему  $2N + 1$  уравнений

$$f_j(a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N; \delta, \beta) = 0 \quad (j = \overline{0, 2N}) \quad (8)$$

для нахождения  $2N + 1$  неизвестных (7). Формулы для уравнений (8) и якобиана  $\partial f_j / \partial a_n, \partial f_j / \partial b_n$  получить несложно.

**Конечно-разностный метод.** В данной работе конечно-разностный метод играет вспомогательную роль: он используется для контроля точности метода коллокаций. Разобьем интервал  $\theta \in [0; 2\pi]$  на  $M$  отрезков одинаковой длины  $\Delta\theta = 2\pi/M$ . В узлах сетки  $\theta_j = \Delta\theta(j - 1)$  рассмотрим толщину пленки  $\eta_j = \eta(\theta_j)$ . Неизвестными, подлежащими определению, являются величины

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M. \quad (9)$$

Заменяя первую и третью производные конечными разностями

$$\eta'_j = \frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{2\Delta\theta}, \quad \eta'''_j = \frac{\eta_{j+2} - 2\eta_{j+1} + 2\eta_{j-1} - \eta_{j-2}}{2(\Delta\theta)^3}$$

и подставляя их в уравнение (5), получим его конечно-разностную аппроксимацию

$$f_j = \eta_j^3 [S_1(\eta_{j+2} - \eta_{j-2}) + S_2(\eta_{j+1} - \eta_{j-1})] - \beta\eta_j^3 \cos \theta_j + \eta_j - 1 = 0, \quad (10)$$

где  $S_1, S_2$  — константы. Добавив условие периодичности

$$\eta_{M+1} = \eta_1, \quad \eta_{M+2} = \eta_2, \quad \eta_0 = \eta_M, \quad \eta_{-1} = \eta_{M-1}, \quad (11)$$

из уравнений (10), (11) получим систему  $M$  уравнений

$$g_j(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M; \delta, \beta) = 0 \quad (j = \overline{1, M}) \quad (12)$$

для нахождения  $M$  неизвестных (9). Система уравнений (12) также решается методом Ньютона.

**Первое решение.** Решение задачи (2), (3), совпадающее при малых  $\beta$  с решением (4), будем называть первым. Отметим, что в отсутствие капиллярности ( $\delta = 0$ ) при

Метод коллокаций		Конечно-разностный метод	
$N$	$\eta(0)$	$M$	$\eta(0)$
5	<b>1,537</b> 539 333 356 33	20	<b>1,565</b> 469 241 584 31
10	<b>1,537 386</b> 899 364 22	80	<b>1,539</b> 033 744 681 17
15	<b>1,537 386 741</b> 699 74	320	<b>1,537</b> 489 266 205 56
20	<b>1,537 386 742 610</b> 31	1280	<b>1,537 393</b> 148 734 36
25	<b>1,537 386 742 611 37</b>	2560	<b>1,537 388</b> 344 122 10

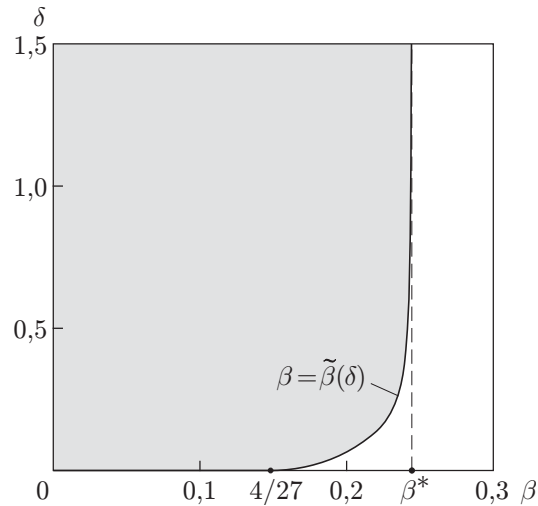


Рис. 4. Область существования решений

$\beta \in [0; 4/27]$  оно является единственно возможным решением. Для нахождения первого решения не при малых  $\beta$  осуществляется аналитическое продолжение из области малых  $\beta$  со степенным рядом (4) в качестве начального приближения в методе Ньютона. При этом используются как метод коллокаций, так и конечно-разностный метод.

В таблице представлены значения величины  $\eta(0)$ , т. е. толщина пленки при  $\theta = 0$  для первого решения ( $\beta = 0,2$  и  $\delta = 0,1$ ), рассчитанная методом коллокаций и конечно-разностным методом. Верные знаки после запятой набраны полужирным шрифтом. Из таблицы следует, что метод коллокаций эффективнее и экономичнее, чем конечно-разностный метод, при использовании которого получаем тот же ответ, но затрачивая значительно больше усилий. В работе в основном использовался метод коллокаций при  $N = 20$  (такое количество гармоник позволяет достаточно быстро производить вычисления с точностью приблизительно 10 знаков после запятой), конечно-разностный метод использовался в некоторых случаях для контроля точности.

Форма свободной поверхности для первого решения является слабдеформированной и близкой к окружности. Наибольшая деформация свободной поверхности достигается при  $\delta = 0$ ,  $\beta = 4/27$  (см. рис. 3).

При аналитическом продолжении решения из области малых  $\beta$  по прямой  $\delta = \text{const}$  с ростом  $\beta$  достигается предельное значение  $\tilde{\beta}(\delta)$ , при котором якобиан системы обращается в нуль. Найденные точки бифуркации, как показано ниже, являются точками поворота: дальнейшее аналитическое продолжение в область  $\beta > \tilde{\beta}(\delta)$  невозможно. Таким образом, в параметрической плоскости  $(\delta, \beta)$  найдена замкнутая область, в каждой точке которой существует первое решение (рис. 4). Эта область представляет собой криволинейную полуполосу, ограниченную справа кривой  $\beta = \tilde{\beta}(\delta)$ , причем при  $\delta \rightarrow \infty$  криволинейная полоса становится прямолинейной:  $0 \leq \beta \leq \beta^*$ .

**Второе решение.** Согласно теореме Пухначева должно существовать еще одно решение, которое будем называть вторым решением. Для его нахождения методом Ньютона необходимо найти начальное приближение и осуществить аналитическое продолжение по прямым  $\beta = \text{const}$  из бесконечно удаленных точек  $\delta = \infty$  в направлении уменьшения  $\delta$ .

Предел  $\delta \rightarrow \infty$  соответствует сильнокапиллярной жидкости, при этом уравнение (2) становится линейным:

$$\eta''' + \eta' = 0.$$

Это уравнение имеет три линейно независимых решения:

$$1, \quad \cos \theta, \quad \sin \theta, \tag{13}$$

поэтому общее решение имеет вид

$$\eta = s + q \cos \theta - \tau \sin \theta. \tag{14}$$

Однако константы  $s, q, \tau$  не могут быть произвольными, поскольку решение исходной задачи (2), (3) должно удовлетворять трем интегралам. Эти интегралы можно получить, если (2) умножить соответственно на три решения (13) и затем проинтегрировать от 0 до  $2\pi$ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\eta - 1}{\eta^3} d\theta = 0; \tag{15}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\eta - 1}{\eta^3} \cos \theta d\theta = \pi\beta; \tag{16}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\eta - 1}{\eta^3} \sin \theta d\theta = 0. \tag{17}$$

Соотношения (15)–(17) должны быть выполнены при всех значениях параметра  $\delta$ , в том числе при  $\delta = \infty$ . Подставив (14) в (15)–(17) и проинтегрировав эти выражения (интегралы берутся с помощью теории вычетов), получим соотношения между параметрами  $s, q, \tau$ . Из (15), (16), (17) соответственно имеем

$$\frac{\pi[s(2q^2 - 2s^2 + 2\tau^2 + 3s) + (q^2 + \tau^2 - s^2)]}{(s^2 - q^2 - \tau^2)^{5/2}} = 0; \tag{18}$$

$$\frac{\pi q(2q^2 - 2s^2 + 2\tau^2 + 3s)}{(s^2 - q^2 - \tau^2)^{5/2}} = \pi\beta; \tag{19}$$

$$\frac{\pi\tau(2q^2 - 2s^2 + 2\tau^2 + 3s)}{(s^2 - q^2 - \tau^2)^{5/2}} = 0. \tag{20}$$

Из уравнения (19) следует, что выражение в скобках  $2q^2 - 2s^2 + 2\tau^2 + 3s$  не может быть равно нулю, поэтому из (20) получаем  $\tau = 0$ . С учетом этого условия уравнения (18), (19) преобразуются к виду

$$(2s + 1)q^2 - 2s^2(s - 1) = 0; \tag{21}$$

$$\frac{q(2q^2 - 2s^2 + 3s)}{(s^2 - q^2)^{5/2}} = \beta. \tag{22}$$

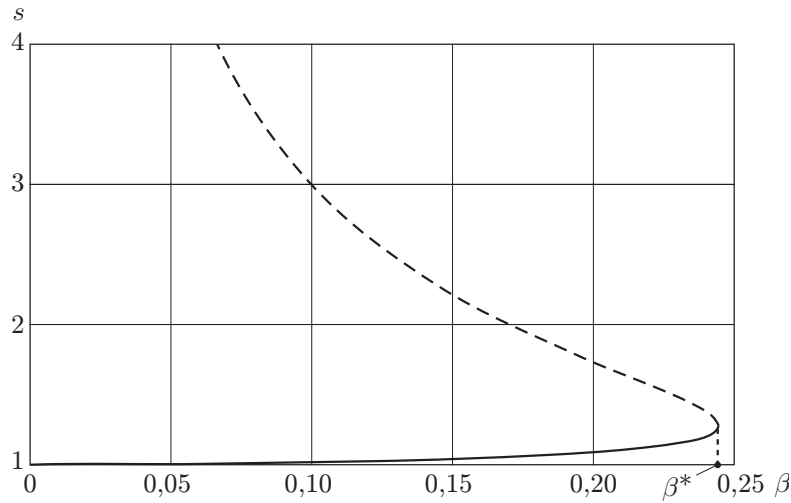


Рис. 5. Зависимость средней по окружности безразмерной толщины пленки  $s$  от силы тяжести  $\beta$  ( $\delta = \infty$ ):  
сплошная линия — первое решение; штриховая — второе решение

Из (21) можно найти  $q$ , причем с учетом оценки [2]

$$0 \leq \beta q \leq 2, \quad s \geq 1 \quad (23)$$

при извлечении корня берется знак “плюс”:

$$q = s \sqrt{2(s-1)/(2s+1)}.$$

Подставляя полученное выражение в (22), находим

$$\beta = \frac{2s+1}{s^3} \sqrt{\frac{2}{27}(s-1)}. \quad (24)$$

Таким образом,  $s$  определяется из уравнения

$$27\beta^2 s^6 - 8s^3 + 6s + 2 = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) имеет два вещественных корня, зависимость которых от  $\beta$ , полученная численно, представлена на рис. 5.

Заметим, что величина  $s$  — это либо средняя толщина пленки, либо толщина пленки при  $\theta = \pm\pi/2$ . На рис. 5 представлена зависимость  $s(\beta)$  при  $\delta = \infty$ . Видно, что для каждого значения  $\beta$  из интервала  $(0, \beta^*)$  имеется два значения этих толщин. Следовательно, задача (2), (3) имеет два решения. Сплошная линия на рис. 5 соответствует первому решению (при  $\beta \rightarrow 0$  все толщины стремятся к единице). Но существует также второе решение, показанное штриховой линией (при  $\beta \rightarrow 0$  оно неограниченно возрастает). При  $\beta \rightarrow \beta^* = \tilde{\beta}(\infty)$  решения совпадают, а при  $\beta > \beta^*$  решений не существует. Величина  $\beta^*$  находится легко. Действительно, при  $\beta = \beta^*$  уравнение (25) имеет двукратный корень  $s^*$ , следовательно, такой же корень должна иметь производная уравнения (25) по  $s$ :

$$27 \cdot 6\beta^2 s^5 - 24s^2 + 6 = 0. \quad (26)$$

Если из уравнения (25), умноженного на 6, вычесть (26), то один из корней получившегося в результате уравнения

$$4s^3 - 5s - 2 = 0 \quad (27)$$

также должен быть равен  $s^*$ . Кубическое уравнение (27) имеет три вещественных корня:

$$-\frac{1}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{17}}{4}, \quad \frac{1 + \sqrt{17}}{4}.$$

Первые два корня являются отрицательными, поэтому в силу оценки (23) не подходят. Следовательно,

$$s^* = (1 + \sqrt{17})/4 \simeq 1,28078.$$

Подставляя это значение в (24), получим

$$\beta^* = (1/24)\sqrt{17\sqrt{17} - 107}/3 \simeq 0,24447.$$

Таким образом, при  $\delta = \infty$  второе решение представлено явными формулами. Используя эти формулы в качестве начального приближения и осуществляя затем аналитическое продолжение по прямым  $\beta = \text{const}$ , можно найти второе решение при конечных  $\delta$ . При конечном фиксированном  $\delta$  зависимость толщины пленки от параметра  $\beta$  качественно не меняется и аналогична зависимости, представленной на рис. 5. По-прежнему при  $\beta \in (0; \tilde{\beta}(\delta))$  имеется два решения, которые при  $\beta = \tilde{\beta}(\delta)$  совпадают; при  $\beta > \tilde{\beta}(\delta)$  решений не существует.

Таким образом, на правой границе криволинейной полуполосы, представленной на рис. 4, второе решение совпадает с первым. На левой границе второе решение неограниченно возрастает при  $\beta \rightarrow 0$  и не существует при  $\beta = 0$ , в то время как первое решение остается конечным. Но криволинейная полоса имеет также третью нижнюю границу:  $\delta = 0$ . Представляет интерес изучение поведения второго решения при  $\delta \rightarrow 0$ , поскольку, как сказано выше, в отсутствие капиллярности ( $\delta = 0$ ) задача (2), (3) имеет единственное решение. Первоначально предполагалось, что возможны два варианта поведения второго решения: либо оно совпадает с первым (как на правой границе), либо неограниченно возрастает (как на левой границе). Однако ситуация на нижней границе сложнее: при  $\delta \rightarrow 0$  одновременно наблюдаются как совпадение обоих решений, так и неограниченное возрастание второго (рис. 6). Первому типу поведения соответствуют штриховые линии

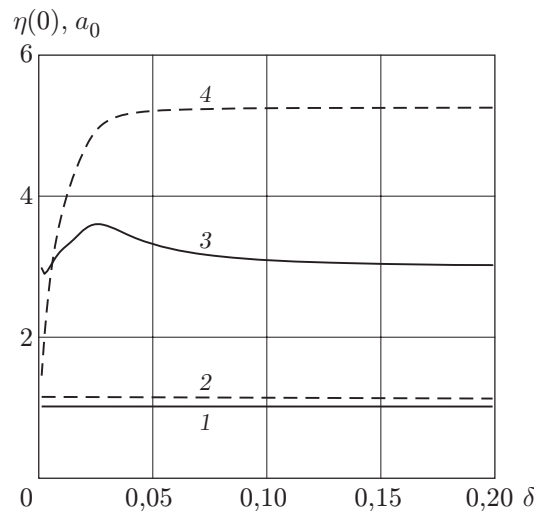


Рис. 6. Зависимость толщины пленки  $\eta(0)$  при  $\theta = 0$  (штриховые линии) и средней толщины  $a_0$  (сплошные линии) от коэффициента поверхностного натяжения  $\delta$  ( $\beta = 0,1$ ):

1, 2 — первое решение; 3, 4 — второе решение



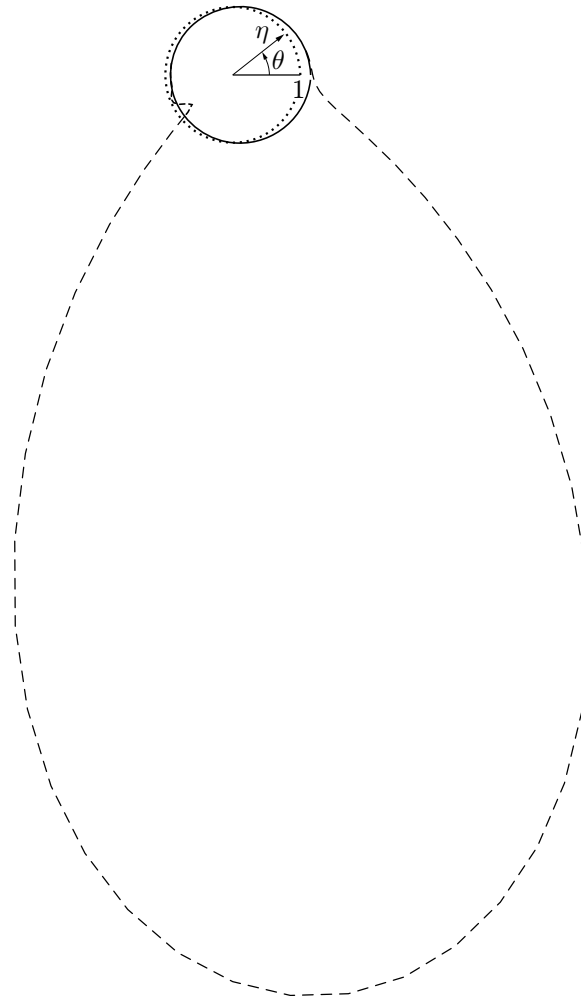


Рис. 7. Зависимость  $\eta(\theta)$  при  $\beta = 0,1$ ,  $\delta = 0,0005$ :

сплошная линия — первое решение; штриховая — второе решение; пунктирная линия — единичная окружность

на рис. 6. При фиксированном  $\beta$  и  $\delta \rightarrow 0$  толщины пленки, рассчитанные для первого и второго решений при  $\theta = 0$ , практически одинаковы. Обе толщины стремятся к известному пределу, соответствующему бескапиллярной пленке. Другому варианту поведения соответствуют сплошные линии на рис. 6. Видно, что средняя толщина пленки (или коэффициент  $a_0$  в тригонометрическом полиноме (6)), которая для первого решения стремится к известному бескапиллярному пределу, для второго решения к этому пределу явно не стремится, и неизвестно, стремится ли к какому-либо пределу вообще. Такое качественно различное поведение толщины пленки в точке и средней толщины пленки для второго решения объясняет рис. 7. На рис. 7 в полярной системе координат показана толщина пленки для первого и второго решений при  $\beta = 0,1$  и очень малом значении  $\delta$ . Видно, что приблизительно на половине свободной поверхности первое решение совпадает со вторым решением, а на другой половине они существенно различаются.

Несмотря на используемое приближение тонкой пленки, второе решение тем не менее является физически содержательным: описывает режим со свисающей каплей. С уменьшением  $\delta$ , т. е. с уменьшением поверхностного натяжения, размеры свисающей части капли значительно увеличиваются. Отметим, что возрастание толщины пленки не противоречит

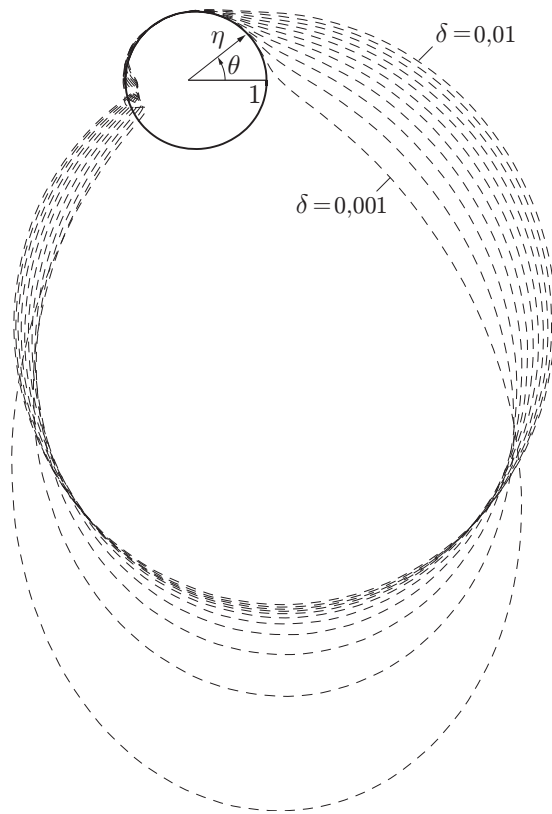


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость  $\eta(\theta)$  при  $0,001 \leq \delta \leq 0,010$  ( $\beta = 0,1$ ):  
 сплошная линия — первое решение; штриховые линии — второе решение

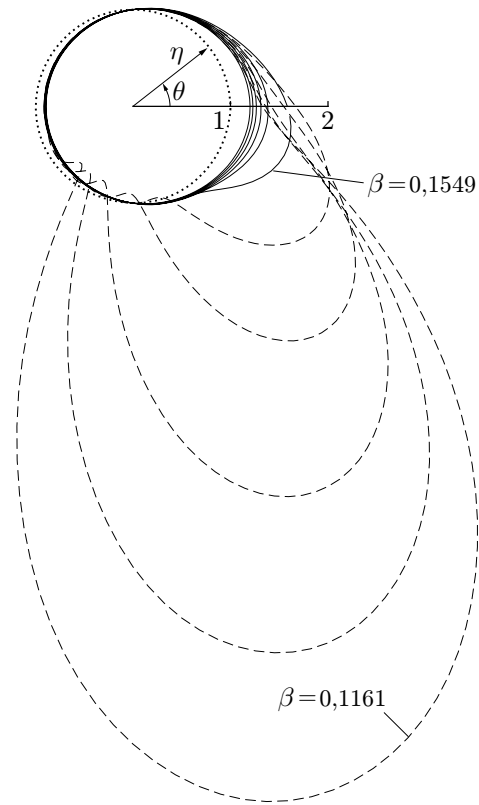


Рис. 9

Рис. 9. Зависимость  $\eta(\theta)$  при  $0,1161 \leq \beta \leq 0,1549$  ( $\delta = 0,001$ ):  
 сплошные линии — первое решение; штриховые — второе решение; пунктирная линия — единичная окружность

теории тонкой пленки, так как по сравнению с бесконечно большим радиусом цилиндра толщина пленки по-прежнему мала.

На рис. 8, где величина  $\beta$  фиксирована, показано изменение формы свободной поверхности в динамике. Параметр  $\delta$  уменьшается с постоянным шагом от 0,01 до 0,001. При таком небольшом изменении  $\delta$  форма свободной поверхности первого решения практически не меняется и представляет собой одну почти правильную окружность. Для второго решения форма свободной поверхности меняется значительно. С уменьшением капиллярности (при уменьшении  $\delta$ ) на свободной поверхности во втором решении формируется и начинает увеличиваться свисающая капля.

Не вполне ясно, что происходит со вторым решением при дальнейшем уменьшении  $\delta$ . По-видимому, второе решение невозможно продолжить до  $\delta = 0$  из-за вторичных бифуркаций, которые происходят при очень небольших значениях  $\delta = 10^{-5} \div 10^{-8}$ . Зафиксирована смена знака якобиана, на свободной поверхности обнаружены точки заострения. В этом случае необходимо дополнительное исследование. Сложность построения надежного численного алгоритма обусловлена тем, что вторичные бифуркации происходят при чрезвычайно малом значении параметра  $\delta$ .

На рис. 9 также представлены формы свободной поверхности ( $\delta = 0,001$ , параметр  $\beta$  меняется с постоянным шагом от 0,1161 до 0,1549). При максимально возможном значении

$\beta = 0,1549$  первое и второе решения совпадают, при  $\beta > 0,1549$  решений не существует. Для первого решения при уменьшении  $\beta$  толщина пленки в среднем уменьшается и при  $\beta \rightarrow 0$  стремится к единичной окружности, показанной на рис. 9 пунктирной линией. Для второго решения толщина пленки при уменьшении  $\beta$  увеличивается, и свободная поверхность принимает каплевидную форму.

**Заключение.** Показано, что область существования решения задачи (2), (3), описывающей тонкую капиллярную пленку на поверхности вращающегося цилиндра, представляет собой криволинейную полосу (см. рис. 4), имеющую три границы: правую, левую и нижнюю. В каждой точке полуполосы существует известное классическое решение. Во всех точках полуполосы, кроме небольшой окрестности нижней границы, существует также второе решение. На правой границе решения совпадают. При приближении к левой границе толщина пленки для первого решения стремится к единице, а для второго неограниченно возрастает. Второе решение имеет физический смысл: оно описывает течение со свисающей каплей и, по-видимому, является неустойчивым, что также отражает физическую природу явления, поскольку свисающие капли могут отрываться.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за помощь в работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Пухначев В. В.** Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // ПМТФ. 1977. № 3. С. 78–88.
2. **Pukhnachov V. V.** Capillary/gravity film flow on the surface of a rotating cylinder // J. Math. Sci. 2005. V. 130, N 4. P. 4871–4883.
3. **Moffatt H. K.** Behaviour of viscous film on the outer surface of a rotating cylinder // J. Mech. 1977. V. 187. P. 651–673.
4. **Hansen E. B., Kelmanson M. A.** Steady, viscous, free-surface flow on a rotating cylinder // J. Fluid Mech. 1994. V. 272. P. 91–107.
5. **Petersen R. C., Jimack P. K., Kelmanson M. A.** On the stability of viscous free-surface flow supported by a rotating cylinder // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2001. V. 457. P. 1427–1445.
6. **Hinch E. J., Kelmanson M. A.** On the decay and drift of free-surface perturbations in viscous thin-film flow exterior to a rotating cylinder // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2003. V. 459. P. 1193–1213.
7. **Hinch E. J., Kelmanson M. A., Metcalfe P. D.** Shock-like free-surface perturbations in low-surface-tension, viscous, thin-film flow // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2004. V. 460. P. 2975–2991.

*Поступила в редакцию 13/І 2006 г.,  
в окончательном варианте — 27/ІІІ 2006 г.*