РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООТДАЧИ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ

Ю. Л. Розеншток

(*Ленинград*)

Одномерная задача определения температурного поля $T^{(\nu)}(\xi, F)$ тела при условии симметричной теплоотдачи на его поверхности сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{\xi^{\nu-1}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^{\nu-1}\frac{\partial T^{(\nu)}}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial T^{(\nu)}}{\partial F} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$-\frac{\partial T^{(\nu)}(\xi, F)}{\partial\xi}+B(F)\,[T_c(F)-T^{(\nu)}(1, F)]=0, \qquad \frac{\partial T^{(\nu)}(0, F)}{\partial\xi}=0 \tag{2}$$

Здесь ξ — безразмерная координата, представляющая собой отношение текущей координаты тела к его характерному размеру; F — критерий Фурье; B — критерий Био; T_c — температура среды; $\nu = 1, 2, 3$ для неограниченной пластины, бесконечного цилиндра и шара соответственно.

Точное решение задачи в общем виде для различных $B(F)$ и $T_c(F)$ получить не удается; сведение (1), (2) к интегральному уравнению Вольтерра первого рода, проведенное в работе [1], также не дает возможности оценить поведение общего решения задачи при различных значениях входящих в него параметров вследствие чрезвычайно громоздкого аппарата приближенного решения.

Проведем решение поставленной задачи, пользуясь приближенным интегральным методом, широко применявшимся при решении задач динамического пограничного слоя [2]. Теоретическое обоснование метода и его применение к широкому классу вариационных задач математической физики приведено в [3,4]. Интегральный метод может быть с успехом применен к решению ряда нелинейных задач теплопроводности [5]. Рассмотрим установившуюся часть задачи, что эквивалентно заданию толщины термического слоя, равной характерному размеру тела. Будем при этом аппроксимировать температурное поле $T^{(\nu)}(\xi, F)$ квадратичным полиномом относительно ξ вида

$$T^{(\nu)}(\xi, F)=a^{(\nu)}(F)+b^{(\nu)}(F)\,\xi+c^{(\nu)}(F)\,\xi^2 \tag{3}$$

Здесь $a^{(\nu)}$, $b^{(\nu)}$, $c^{(\nu)}$ — некоторые, подлежащие определению, функции критерия Фурье. Проинтегрируем (1) по толщине термического слоя

$$\int_0^1 \xi^{1-\nu}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^{\nu-1}\frac{\partial T^{(\nu)}}{\partial\xi}\right)d\xi=\frac{\partial}{\partial F}\int_0^1 T^{(\nu)}\,d\xi \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4) и учитывая (2), получим

$$a^{(\nu)}=T_c-(1+2/B)\,c^{(\nu)}, \qquad b^{(\nu)}=0 \tag{5}$$

$$\frac{dc^{(\nu)}}{dF}+c^{(\nu)}\left(\psi-\frac{d\ln\psi}{dF}\right)=\frac{\psi}{2\nu}\frac{dT_c}{dF} \qquad \left(\psi=\nu\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{B}\right]^{-1}\right) \tag{6}$$

Таким образом, применение приближенного интегрального метода позволило свести уравнение теплопроводности в частных производных второго порядка с нестационарными граничными условиями к системе из обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка и алгебраического уравнения, содержащего неизвестные в первой степени. Решение дифференциального уравнения (6) имеет вид

$$c^{(\nu)}=\frac{\psi(F)}{2\nu}\exp\left(-\int\psi(F)\,dF\right)\int\exp\left(\int\psi(F)\,dF\right)\frac{dT_c}{dF}\,dF \tag{7}$$

Подставляя (7) в (4) и учитывая (5), получим выражение для температурного поля $T^{(\nu)}(\xi, F)$ искомой задачи.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Пусть

$$B=\mathrm{const}=B_0, \qquad T_c=T_0(1+\gamma F)$$

В соответствии с изложенным выше имеем:

$$T^{(\nu)} = T_c - \frac{\gamma T_0}{2\nu}\left(1 + \frac{2}{B_0} - \xi^2\right) \tag{8}$$

2) Пусть

$$B = \alpha + \beta F, \qquad T_c = T_0(1 + \gamma F)$$

$$c^{(\nu)} = \frac{3}{2\beta}\gamma T_0 B\,(B+3)^{9\nu/\beta - 1}\; e^{-3\nu B/\beta} \int (B+3)^{-9\nu/\beta}\; e^{3\nu B/\beta}\, dB \tag{9}$$

Интеграл в (9) при $\beta < 0$ может быть определен по таблицам неполной гамма функции. Определим асимптотическое поведение $c^{(\nu)}$ при больших значениях критерия Фурье. Интегрируя по частям, получим

$$c^{(\nu)} \sim \frac{\gamma T_0}{2\nu}\left(1 + \frac{3}{\beta}\right)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{3\nu}{\beta}\right)^{-m} (B+3)^{-m} \left\{-\frac{9\nu}{\beta}\right\}_m \tag{10}$$

Здесь

$$\{\omega\}_0 = 1, \qquad \{\omega\}_r = \omega(\omega - 1)\ldots(\omega - r + 1)$$

3) Пусть

$$B = \alpha + \beta \exp\gamma F, \qquad T_c = T_0 \exp\gamma F$$

$$c^{(\nu)} = \frac{3T_0}{2\beta} B\,(B-\alpha)^{-\alpha\varkappa}\,(B+3)^{-3\varkappa - 1} \int (B-\alpha)^{\alpha\varkappa}\,(B+3)^{3\varkappa}\, dB \left(\varkappa \equiv \frac{3\nu}{\gamma(\alpha+3)}\right) \tag{11}$$

Интеграл в (11) может быть сведен к неполной бэта-функции Эйлера. Асимптотическое поведение $c^{(\nu)}$ при больших F определится формулами

$$c^{(\nu)} \sim \frac{3T_0}{2}\, e^{\gamma F}\left(1 + \frac{3\nu}{\gamma}\right)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\alpha+3)^m \left(1 + \frac{3}{B}\right)^m \frac{\{\alpha\varkappa\}_m}{\{3\nu/\gamma\}_m} \qquad (\gamma > 0)$$

$$c^{(\nu)} \sim \frac{3T_0}{2}\, e^{\gamma F} \frac{\alpha}{(\alpha+3)(1+\alpha\varkappa)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \beta^m (\alpha+3)^m e^{m\gamma F}\, \frac{\{3\varkappa\}_m}{\{\alpha\varkappa - 2\}_m} \qquad (\gamma < 0)$$

При $\gamma < 0$ и $\alpha\varkappa = -1$

$$c^{(\nu)} \sim \frac{3T_0}{2}\,\frac{\alpha\gamma}{\alpha+3}\, F e^{\gamma F}$$

Выражение (8) совпадает с квазистационарными членами точного решения задачи теплопроводности для линейного изменения температуры среды со временем при постоянном значении коэффициента теплоотдачи, полученного операционным методом [6].

Случаи линейного и экспоненциального изменения коэффициента теплоотдачи и температуры окружающей среды со временем могут встретиться, например, при изучении температурного поля баллистического тела, движущегося в слоях с переменной температурой и плотностью, а также при контактном измерении температуры реактивной струи, выходящей из сопла с нарастающей скоростью и температурой.

Поступила 25 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев К. А., Лазарев А. И. Температурное поле неограниченной пластины при переменном значении коэффициента теплоотдачи и переменной температуре внешней среды. ЖТФ, 1960, вып. 30, стр. 616.
2. Karman T. Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM, 1921, 1, 223.
3. Канторович Л. В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. Изв. АН СССР, ОМЕН, 1933, № 5, стр. 647.
4. Канторович Л. В. О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. ДАН СССР, 1941, т. 30, № 7, стр. 579.
5. Goodman T. The heat — balance integral and its applications. Trans. ASME, 1958, vol. 80, № 2.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. ГТТИ, 1952.