ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 5

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ С ЗАДАННЫМИ ДЕФОРМАЦИОННО-ПРОЧНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. Г. Колпаков

Сибирская государственная академия телекоммуникаций и информатики, 630009 Новосибирск

Приводится решение задачи проектирования композитов, армированных высокомодульными волокнами, с заданными деформационно-прочностными характеристиками. Задача относится к классу некорректных [1]. Осуществлено математическое исследование задачи, предложен численный алгоритм ее решения, рассмотрены примеры.

1. Постановка задачи расчета волокнистых композитов. В [2, 3] для волокнистых композитов, армированных периодически чередующимися слоями волокон (модуль Юнга волокон E много больше модуля Юнга связующего), получены следующие формулы для вычисления усредненных упругих постоянных $\{a_{ijkl}\}$ в плоскости армирования композита (i, j, k, $l = 1$, 2, слои взяты параллельными плоскости Ox_1x_2) и локальных напряжений $\{\sigma^\varepsilon_{ij}\}$ (с указанной в [2] точностью в волокнах отличны от нуля только осевые напряжения σ^α_n):

$$a_{ijkl} = ES\sum_{\alpha=1}^{M}\gamma^\alpha_i\gamma^\alpha_j\gamma^\alpha_k\gamma^\alpha_l\mu_\alpha; \tag{1.1}$$

в α-м слое армирующих волокон

$$\sigma^\varepsilon_{ij} = E\gamma^\alpha_i\gamma^\alpha_j\sum_{k,l=1,2}\gamma^\alpha_k\gamma^\alpha_l e_{kl},\ \sigma^\alpha_n = E\sum_{k,l=1,2}\gamma^\alpha_k\gamma^\alpha_l e_{kl}. \tag{1.2}$$

Здесь S — объемное содержание волокон в композите; μ_α — удельное (отнесенное к S) содержание волокон в α-м армирующем семействе; $\{\gamma^\alpha_i\}$ — направляющие косинусы осей волокон α-го семейства; M — число армирующих семейств на периоде структуры композита; $\{e_{kl}\}$ — усредненные деформации композита (т. е. деформации, определяемые из решения задачи о деформировании материала с упругими постоянными $\{a_{ijkl}\}$ (1.1)).Отметим, что формулы (1.1), (1.2) систематически использовались до их математически строгого обоснования.

Для удельных содержаний $\{\mu_\alpha\}$ должны быть выполнены соотношения

$$\mu_\alpha \geqslant 0 \qquad (\alpha = 1,\dots,M),\quad \sum_{\alpha=1}^{M}\mu_\alpha = 1. \tag{1.3}$$

Направляющие косинусы при укладке волокон параллельно плоскости Ox_1x_2 (рис. 1) имеют вид $\gamma^\alpha_1 = \cos\varphi_\alpha$, $\gamma^\alpha_2 = \sin\varphi_\alpha$, $\gamma^\alpha_3 = 0$, где φ_α — угол между осями волокон α-го семейства и осью Ox_1.

2. Формулировка задачи проектирования. Зная состав и структуру композита, пользуясь формулами (1.1), (1.2), можно определить его

© А. Г. Колпаков, 1995

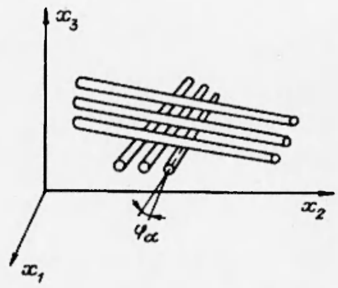

Рис. 1

усредненные упругие характеристики и локальные напряжения в волокнах. Если известен критерий прочности волокон, например, если он задан в виде

$$0 \leqslant f(\sigma_{ij}^{\varepsilon}) \leqslant \sigma^*, \tag{2.1}$$

то также можно судить о разрушении или неразрушении волокон в композите при приложении к нему усредненных напряжений $\{\sigma_{ij}\}$ (которые определяются усредненным законом Гука $\sigma_{ij} = a_{ijkl}e_{kl}$). Описанная задача является задачей расчета композитов. Ей было уделено много внимания в работах различных авторов (см., например, библиографию в [2]).

Рассмотрим обратную по отношению к задаче расчета задачу проектирования (ЗП) композита с заданными характеристиками. Ее описательная постановка следующая: каким составом и структурой должен обладать композит, чтобы он имел заданный набор усредненных упругих характеристик $\{a_{ijkl}\}$ и выдерживал без разрушения приложение к нему усредненных напряжений $\{\sigma_{ij}\}$.

Замечание 1. Состав и структура композита рассматриваемого типа описываются набором величин S, M, $\{\varphi_\alpha\}$, $\{\mu_\alpha\}$.

Задача проектирования является некорректной [4]. Поэтому ее изучение без привлечения адекватных математических методов оказывается мало информативным. Посмотрим, что представляет собой задача проектирования с математической точки зрения.

Композит обладает заданным набором усредненных упругих характеристик $\{a_{ijkl}\}$. Как следует из формул (1.1), все указанные характеристики выражаются через четыре функции аргументов $\{\varphi_\alpha\}$ и $\{\mu_\alpha\}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{\alpha=1}^{M} \mu_\alpha \cos^4\varphi_\alpha, & y_2 &= \sum_{\alpha=1}^{M} \mu_\alpha \sin^4\varphi_\alpha, \\ y_3 &= \sum_{\alpha=1}^{M} \mu_\alpha \sin\varphi_\alpha \cos^3\varphi_\alpha, & y_4 &= \sum_{\alpha=1}^{M} \mu_\alpha \sin^3\varphi_\alpha \cos\varphi_\alpha. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Решив (1.1) относительно величин y_1, y_2, y_3, y_4, получим задачу относительно неизвестных S, M, $\{\varphi_\alpha\}$, $\{\mu_\alpha\}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{M} \mu_\alpha \cos^4\varphi_\alpha = y_1 = \frac{a_{1111}}{ES}, & &\sum_{\alpha=1}^{M} \mu_\alpha \sin^4\varphi_\alpha = y_2 = \frac{a_{2222}}{ES}, \\ &\sum_{\alpha=1}^{M} \mu_\alpha \sin\varphi_\alpha \cos^3\varphi_\alpha = y_3 = \frac{a_{1112}}{ES}, & &\sum_{\alpha=1}^{M} \mu_\alpha \sin^3\varphi_\alpha \cos\varphi_\alpha = y_4 = \frac{a_{2221}}{ES}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

При этом между усредненными упругими характеристиками возникает соотношение $a_{1122} = a_{1212} = (1/2)(ES - a_{1111} - a_{2222})$, которое является условием разрешимости системы (1.1) относительно величин y_1, y_2, y_3, y_4.

Равенство (2.3) и условие (1.3), представляющие собой задачу о выпуклых комбинациях (ЗВК) [1] относительно объемных содержаний волокон $\{\mu_\alpha\}$, — это математическая формулировка условия, что композит имеет заданный набор усредненных характеристик $\{a_{ijkl}\}$. Условие разрешимости возникшей задачи в общем случае таково.

Предложение 1 [5]. Задача (1.3), (2.3) при $M \geqslant 5$ имеет решение тогда и только тогда, когда точка $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ принадлежит множеству $\operatorname{conv}\Gamma$, где $\Gamma = \{(\cos^4\varphi,\ \sin^4\varphi,\ \sin\varphi\cos^3\varphi,\ \sin^3\varphi\cos\varphi) : \varphi \in \Phi\}$, Φ — множество допустимых углов укладки, conv — выпуклая оболочка.

Композиты с симметричной укладкой волокон. В практике часто используются симметричные укладки волокон, характеризующиеся соотношениями $\varphi_i = \varphi_{M-i}$, $\mu_i = \mu_{M-i}$ (M — четное число). В этом случае последние два выражения из (2.2) обращаются тождественно в нуль, и в (2.3) остаются только первые два уравнения. Условие разрешимости задачи (1.3), (2.3) дается предложением 1, если в нем положить $\Gamma = \{(\cos^4\varphi, \sin^4\varphi) : \varphi \in \Phi\} = \{(\eta, (1-\sqrt{\eta})^2),\ \eta \in \cos^4\Phi\}$, где $\eta = \cos^4\varphi$, $\cos^4\Phi = \{\eta = \cos^4\varphi : \varphi \in \Phi\}$ и $M \geqslant 5$.

Волокна не разрушаются при приложении к композиту усредненных напряжений $\{\sigma_{ij}\}$. Если $\{a_{ijkl}\}$ заданы, то усредненные деформации даются формулой $e_{ij} = \{a_{ijkl}\}^{-1}\sigma_{kl}$. Подставив это выражение в (1.2), получаем усредненный критерий прочности (называемый так в связи с тем, что в отличие от (2.1) он формулируется в терминах усредненных напряжений [6–8])

$$f_\alpha = f\Big(E\gamma_i^\alpha\gamma_j^\alpha \sum_{k,l=1,2} \gamma_k^\alpha\gamma_l^\alpha \sum_{m,n=1,2} \{a_{klmn}\}^{-1}\sigma_{mn}\Big) \leqslant \sigma^* \tag{2.4}$$

в α-м семействе армирующих волокон.

Поскольку $\{\gamma_i^\alpha\}$ выражаются через φ_α, а $\{a_{ijkl}\}$ — через $\mathbf{y}$, то (2.4) можно переписать в виде

$$F(\varphi_\alpha, \mathbf{y}, \sigma_{mn}) \leqslant \sigma^* \tag{2.5}$$

в α-м семействе армирующих волокон. Здесь F — известная функция (получается из левой части (2.4) заменой $\{\gamma_i^\alpha\}$, $\{a_{ijkl}\}$ на их выражения через φ_α, $\mathbf{y}$). Чтобы сформулировать требование о выполнении условия прочности всех семейств армирующих волокон, введем в рассмотрение функцию

$$M(\sigma_{mn}, \{\varphi_\alpha\}) = \max F_\alpha(\varphi_\alpha, \mathbf{y}, \sigma_{mn})$$

(максимум берется по углам укладки φ_α всех семейств волокон, действительно входящих в композит, т. е. таких, для которых выполнено условие $\mu_\alpha > 0$) и потребуем выполнения условия

$$M(\sigma_{mn}, \{\varphi_\alpha\}) \leqslant \sigma^*. \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) является математической формулировкой условия неразрушения волокон композита при заданных усредненных напряжениях.

Замечание 2. В условие прочности α-го семейства волокон в качестве аргумента входит только угол укладки волокон этого семейства φ_α. Это используется далее.

Типичные задачи проектирования (математические постановки).

1. Проектирование композита с заданным набором усредненных характеристик $\{a_{ijkl}\}$: требуется решить задачу (1.3), (2.3).

2. Проектирование композита максимальной прочности с заданным набором усредненных упругих характеристик $\{a_{ijkl}\}$: требуется решить задачу (1.3), (2.3), при этом левой части (2.6) требуется придать минимальное значение $M(\sigma_{mn}, \{\varphi_\alpha\}) \to \min$ $(1/M(\sigma_{mn}, \{\varphi_\alpha\})$ имеет смысл запаса прочности).

3. Проектирование композита с заданным набором усредненных упругих характеристик, выдерживающего приложение заданных усредненных напряжений без разрушения волокон: требуется решить задачу (1.3), (2.3), (2.6), при этом (2.6) должно выполняться для усредненных напряжений σ_{ij} из некоторого заданного множества Σ.

4. Проектирование композита с заданным набором усредненных характеристик $\{a_{ijkl}\}$ при использовании минимального объема волокон: требуется решить задачу (1.3), (2.3), при этом величине S (объемному содержанию волокон) следует придать минимальное значение: $S \to \min$. Отметим, что если волокно тяжелее связующего (что, как правило, имеет место), то сформулированная задача также является задачей проектирования композита минимального веса.

Дискретная задача проектирования. Рассмотрение задачи с бесконечным числом возможных углов укладки часто нецелесообразно или затруднено. В этой связи значительный интерес представляет дискретная задача проектирования, возникающая в случае, когда множество возможных значений углов укладки волокон имеет вид $\Phi = \{\varphi_\beta,\ \beta = 1, \dots, N\}$. При больших N дискретная задача аппроксимирует непрерывную (подробнее см. [9]).

Метод численного решения задачи проектирования. Введем векторы $\mathbf{y}_\beta = (\cos^4\varphi_\beta, \sin^4\varphi_\beta, \sin\varphi_\beta\cos^3\varphi_\beta, \sin^3\varphi_\beta\cos\varphi_\beta) \in R^4$, $\beta = 1, \dots, N$. Тогда задача (1.3), (2.2) может быть переписана в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{M} y_{1\alpha}\mu_\alpha = y_1, \quad \mu_\alpha \geqslant 0; \quad \alpha = 1, \dots, M; \quad \sum_{\alpha=1}^{m} \mu_\alpha = 1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{2.7}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{M} y_{4\alpha}\mu_\alpha = y_4.$$

Будем решать полученную задачу методом свертывания системы линейных уравнений [10] (название — по аналогии с методом свертывания систем линейных неравенств [11]). Указанный метод основан на возможности решения одномерной ЗВК

$$\sum_{\beta=1}^{m} y_\beta\mu_\beta = x, \ \mu_\beta \geqslant 0 \quad (\beta = 1, \dots, m), \quad \sum_{\beta=1}^{m} \mu_\beta = 1 \tag{2.8}$$

в явном виде.

Предложение 2.

1. Задача (2.8) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено следующее *условие* P: $y_1 \leqslant x \leqslant y_m$ (при этом считается, что в (2.8) точки упорядочены в сторону возрастания: $y_1 < y_2 < \dots < y_m$, что не ограничивает общности).

2. Пусть выполнено *условие* P, тогда точка x представима как выпуклая комбинация точек $\{y_a\}$ и $\{y_b\}$ таких, что $y_a \leqslant x$, $y_b > x$ в виде

$x = \lambda_a y_a + \lambda_b y_b$. Для данных a, b введем обозначения:

$$S_\eta = \{S_{\eta\beta}\} = (0,\ldots,0,\ \underset{\text{на } a\text{-м месте}}{\underset{\uparrow}{\lambda_a}},\ 0,\ldots,0,\ \underset{\text{на } b\text{-м месте}}{\underset{\uparrow}{\lambda_b}},\ 0,\ldots,0) \in R^m. \tag{2.9}$$

Тогда множество решений задачи (2.9) дается следующей формулой свертки:

$$\mu_\beta = \sum_{\eta=1}^{M_1} S_{\eta\beta}\lambda_\eta. \tag{2.10}$$

Здесь M_1 — общее число отрезков вида $[y_a,\ y_b]$, содержащих точку x, а $\{\lambda_\eta\}$ —произвольные числа, удовлетворяющие условию

$$\lambda_\eta \geqslant 0 \quad (\eta = 1,\ldots,M_1), \qquad \sum_{\eta=1}^{M_1} \lambda_\eta = 1. \tag{2.11}$$

Замечание 3. Значения λ_a, λ_b из (2.9) подсчитываются по формулам $\lambda_a = (x - y_a)/(y_b - y_a)$, $\lambda_b = 1 - \lambda_a$.

Свертывание системы (2.7) осуществляется следующим образом. Первое уравнение в (2.7) — это одномерная ЗВК. Ее решение, если задача разрешима (см. п. 1 предложения 2), имеет вид (2.10), (2.11). Подставим (2.10) во 2-е–4-е уравнения в (2.7). После изменения порядка суммирования получим

$$\begin{gathered}\sum_{\eta_1=1}^{M_1} \lambda_{\eta_1}\Big(\sum_{\alpha=1}^{M} y_{2\alpha}S_{\eta_1\alpha}\Big) = y_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{\eta_1=1}^{M_1} \lambda_{\eta_1}\Big(\sum_{\alpha=1}^{M} y_{4\alpha}S_{\eta_1\alpha}\Big) = y_4.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Обозначим

$$y_{\eta_1} = \sum_{\alpha=1}^{M} y_\alpha S_{\eta_1\alpha}.$$

Как видно, первое уравнение в (2.12) с условием (2.11) — это вновь одномерная ЗВК, решение которой находится на основании предложения 1. В результате за четыре шага предложенного алгоритма удовлетворяем все четыре уравнения в (1.3), (2.2) (при условии, что на каждом шаге выполнено *условие Р*). Решение задачи (1.3), (2.2) (если оно существует) дается формулой

$$\mu_\alpha = \sum_{\eta_4=1}^{M_4} \lambda_{\eta_4}P_{\eta_4\alpha}, \quad \lambda_{\eta_4} \geqslant 0, \quad \sum_{\eta_4=1}^{M_4} \lambda_{\eta_4} = 1, \tag{2.13}$$

где

$$\mathbf{P}_{\eta_4} = \{P_{\eta_4\alpha}\} = \Big\{\sum_{\eta_1=1}^{M_1}\sum_{\eta_2=1}^{M_2}\sum_{\eta_3=1}^{M_3} S_{\eta_4\eta_3}S_{\eta_3\eta_2}S_{\eta_2\eta_1}S_{\eta_1\alpha}\Big\}_{\alpha=1}^{M}.$$

Как следует из формулы (2.13), число решений задачи (1.3), (2.2) бесконечно и выражается через конечное число векторов $\{\mathbf{P}_{\eta_4}\}$.

Замечание 4. При замене M_4 на M_k формула (2.13) дает решение первых k уравнений. Как показано в [8], множество решений, даваемых (2.13), не изменится, если в процессе свертывания на k-м шаге исключать векторы, имеющие более $k+1$ ненулевых координат (по аналогии с [11] назовем этот прием процедурой сокращенного свертывания).

Замечание о методах решения задачи проектирования. Рассматриваемая задача сводится к ЗВК. Последняя для двух уравнений (ЗВК, возникающая при использовании симметричных укладок) может быть решена графически, а в случае большей размерности — только численно. Приведем примеры решения в том и другом случае.

Пример 1. Требуется создать композит со следующими усредненными упругими характеристиками: $a_{1111} = 0{,}15 \cdot 10^{11}$ Па, $a_{2222} = 0{,}03 \times 10^{11}$ Па симметричной структуры на основании волокна с модулем Юнга $E = 0{,}7 \cdot 10^{11}$ Па (стекловолокно) при заданном объемном содержании волокон $S = 0{,}4$ и минимально возможном объемном содержании волокон.

Из (2.2) получаем (с учетом симметрии рассматриваются только первые два уравнения)

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2) = \left(\frac{1}{16}, \frac{9}{16}\right) \qquad \text{при} \quad S = 0{,}4.$$

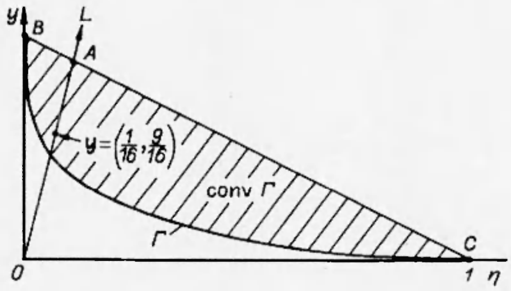

Рис. 2

Множество $\Gamma = \{\eta, (1-\sqrt{\eta})^2 : \eta \in [0,1]\}$ изображено на рис. 2, откуда видно, что $\mathbf{y} \in \operatorname{conv}\Gamma$ и задача разрешима. Возможных проектов бесконечно много. Найдем проект с минимальным содержанием волокон (т. е. удовлетворяющий условию $S \to \min$). Пусть S меняется от 0 до 1. При этом точка $\mathbf{y}$ движется по лучу L, как показано на рис. 2. Наименьшее значение S, при котором $\mathbf{y}$ еще принадлежит $\operatorname{conv}\Gamma$, отвечает точке A и равно 0,25. Соответствующий проект композита с минимальным объемом волокна есть $\mu_1 = BA/BC = 0{,}9$, $\mu_2 = AC/BC = 0{,}1$, углы укладки $\varphi_1 = 90°$, $\varphi_2 = 0$.

Пример 2. Требуется создать композит со следующими усредненными упругими характеристиками: $a_{1111} = 0{,}25 \cdot 10^{11}$ Па, $a_{2222} = 0{,}1 \cdot 10^{11}$ Па. Используются волокна с модулем Юнга $E = 0{,}7 \cdot 10^{11}$ Па (стекловолокно). Объемное содержание волокон задано: $S = 0{,}6$.

Пусть ограничения на углы укладки отсутствуют: $\Phi = [-\pi/2, \pi/2]$. Произведем дискретизацию интервала $[-\pi/2, \pi/2]$ с шагом $\delta = \pi/15$, после чего возникает дискретная ЗП, решаемая на ЭВМ. В результате счета (проводился на ЭВМ ЕС 1033, время счета ~ 1 мин, включая трансляцию) получено $M_4 = 281$ векторов $\{\mathbf{P}_{\eta_4}\}$. Приведем некоторые из них:

$\mathbf{P}_1 = (0{,}1736;\ 0{,}0545;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}4009;\ 0;\ 0;\ 0{,}2285;\ 0{,}1426;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0), \ldots,$

$\mathbf{P}_{107} = (0;\ 0;\ 0{,}2116;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}3946;\ 0{,}1819;\ 0;\ 0{,}0004;\ 0;\ 0{,}2115;\ 0;\ 0), \ldots$

Множество проектов композита с заданными выше усредненными характеристиками имеет вид

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 = 0{,}1736\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, & \mu_9 = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0{,}1819\lambda_{107} + \dots, \\
\mu_2 = 0{,}0545\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, & \mu_{10} = 0{,}2285\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, \\
\mu_3 = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0{,}2116\lambda_{107} + \dots, & \mu_{11} = 0{,}1426\lambda_1 + \dots + 0{,}004\lambda_{107} + \dots, \\
\mu_4 = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, & \mu_{12} = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, \\
\mu_5 = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, & \mu_{13} = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0{,}2115\lambda_{107} + \dots, \\
\mu_6 = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, & \mu_{14} = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, \\
\mu_7 = 0{,}4009\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, & \mu_{15} = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0\cdot\lambda_{107} + \dots, \\
\mu_8 = 0\cdot\lambda_1 + \dots + 0{,}3946\lambda_{107} + \dots, &
\end{array}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_{107}, \dots, \lambda_{281} \geqslant 0$; $\lambda_1 + \dots + \lambda_{107} + \dots + \lambda_{281} = 1$.

3. Проектирование композита максимальной прочности. Как отмечено в замечании 2, прочность волокон α-го семейства определяется углом их укладки. В силу этого задача $M(\sigma_{mn}, \{\varphi_\alpha\}) \to \min$ с условиями (1.3), (2.3) будет решена, если сумеем отобрать среди возможных углов укладки волокон $\{\varphi_\beta,\ \beta = 1, \dots, N\}$ семейства $\{\varphi_\alpha\}$, удовлетворяющие двум условиям:

1) для семейства $\{\varphi_\alpha\}$ выполнены условия (1.3), (2.3),
2) для семейства $\{\varphi_\alpha\}$ величина $\max\limits_\alpha\{f_\alpha\}$ минимальна.

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, поступим следующим образом. Занумеруем углы укладки волокон в порядке возрастания величин $\{f_\beta\}$ (определены (2.4)). Возьмем угол φ_1 и проверим, выполнены ли для соответствующего ему вектора $\mathbf{y}_1$ соотношения (1.3), (2.3). Если нет, то добавим к φ_1 угол φ_2 и т. д., пока для некоторого семейства $\{\varphi_1, \dots, \varphi_K\}$ $(\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K\})$ впервые не будут выполнены соотношения (1.3), (2.3). Проверка выполнения соотношений (1.3), (2.3) производится описанными выше методами. После чего решение задачи $M(\sigma_{mn}, \{\varphi_\alpha\}) \to \min$ с условиями (1.3), (2.3) дается формулой (2.13), только в качестве векторов $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M\}$ должны использоваться векторы $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_K\}$. При этом имеет место равенство

$$\min M(\sigma_{mn},\ \{\varphi_\alpha\}) = f_K. \tag{3.1}$$

Замечание 5. ЗП наиболее прочного композита разрешима тогда и только тогда, когда разрешима ЗП композита с заданными усредненными характеристиками. Условие прочности для наиболее прочного композита в силу (3.1) может быть записано в виде $f_K \leqslant \sigma^*$ (при $f_K > \sigma^*$ происходит разрушение некоторых семейств армирующих волокон).

Замечание о методах решения задачи. Для двух уравнений задача (возникающая при использовании симметричных укладок) может быть решена графически, а в случае большей размерности — численно.

Пример 3. Требуется создать композит со следующими усредненными упругими характеристиками: $a_{1111} = 0{,}15\cdot10^{11}$ Па, $a_{2222} = 0{,}03\cdot10^{11}$ Па. Используются волокна с модулем Юнга $E = 0{,}7\cdot10^{11}$ Па (стекловолокно). Объемное содержание волокон задано: $S = 0{,}4$. При этом композит должен иметь максимально возможную прочность при приложении усредненного напряжения вида $\sigma_{11} \neq 0$, $\sigma_{ij} = 0$ при $ij \neq 11$ (растяжение вдоль оси Ox_1).

Условие прочности материала волокон возьмем в виде

$$f(\sigma^\varepsilon_{ij}) = |\sigma^{\text{ч}}_n| \leqslant \sigma^* \quad (\text{для стекловолокна } \sigma^* = 0{,}024\cdot10^{11} \text{ Па}). \tag{3.2}$$

Согласно (1.2), напряжения в волокнах α-го семейства есть

$$\sigma_n^\alpha = E \sum_{k,l=1,2} \gamma_k^\alpha \gamma_l^\alpha e_{kl}.$$

Усредненные деформации в рассматриваемом случае имеют вид

$$e_{11} = \frac{a_{1111}\sigma_{11}}{\Delta}, \qquad e_{22} = -\frac{a_{1122}\sigma_{11}}{\Delta}, \qquad e_{12} = 0,$$

где $\Delta = a_{1111}a_{2222} - a_{1122}^2$. Величина a_{1122} вычисляется по a_{1111}, a_{2222} в соответствии с (2.2) и равна $0{,}05 \cdot 10^{11}$ Па. Тогда

$$\sigma_n^\alpha = E(a_{1111}\cos^2\varphi_\alpha - a_{1122}\sin^2\varphi_\alpha)\sigma_{11}/\Delta.$$

После подстановки этого выражения в локальное условие прочности получаем усредненный критерий прочности

$$\sigma_n^\alpha = E(a_{1111}\cos^2\varphi_\alpha - a_{1122}\sin^2\varphi_\alpha)\sigma_{11}/\Delta \leqslant 1 \tag{3.3}$$

в α-м семействе армирующих волокон.

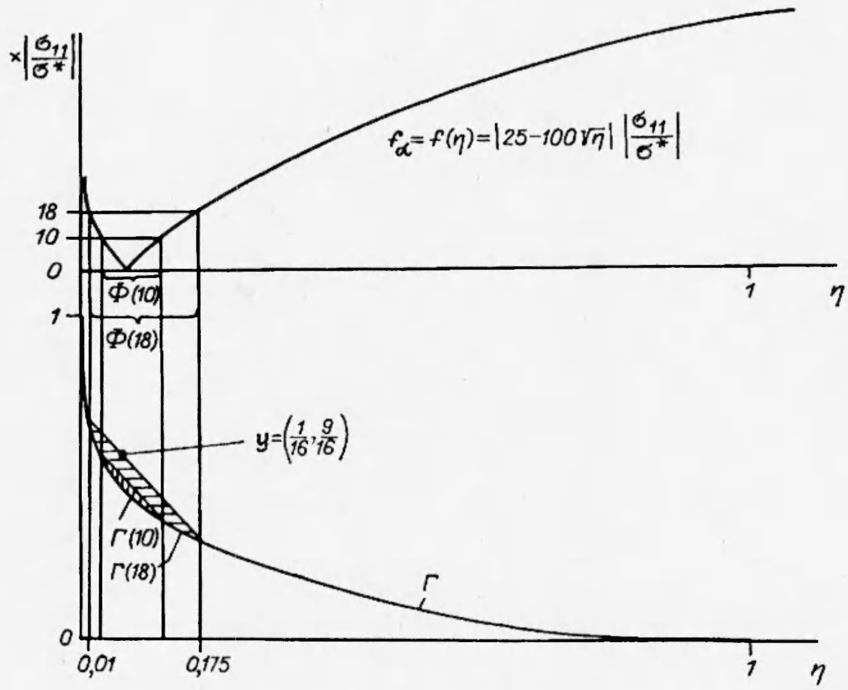

Рис. 3

Рассмотрим график функции $f_\alpha = f(\eta) = |(25 - 100\sqrt{\eta})\sigma_{11}/\sigma^*|$, полученной из (3.3) при $\eta = \cos^4\varphi$ (представлен в верхней части рис. 3). В нижней части рис. 3 нанесена линия $\Gamma = \{(\eta, (1-\sqrt{\eta})^2) : \eta \in [0,1]\}$ и показаны система возрастающих множеств $\Phi(\sigma) = \{f(\eta) \leqslant \sigma\}$ и $\Gamma(\sigma) = \{(\eta, (1-\sqrt{\eta})^2) \, . \, \eta \in \Phi(\sigma)\}$, а также точка $\mathbf{y} = (1/16, 9/16)$ — решение первых двух уравнений (2.3) (см. замечание о симметричных укладках). Точка $\mathbf{y}$ впервые накрывается множеством $\operatorname{conv}\Gamma(\sigma)$ при $\sigma = \sigma_{\min} = 18|\sigma_{11}/\sigma^*|$. Соответственно проект наиболее прочного композита таков: углы укладки волокон $\varphi_{1,4} = \pm 72°$ и $\varphi_{2,3} = \pm 50°$, содержание волокон в армирующих семействах $\mu_{1,4} = 0{,}16$ и $\mu_{2,3} = 0{,}34$. Критерий прочности для спроектированного материала представим в виде $\sigma_{\min} \leqslant 1$ или $18|\sigma_{11}| \leqslant \sigma^*$

Пример 4. Требуется спроектировать композит максимальной прочности с теми же усредненными упругими характеристиками, что в примере 2. Пусть к композиту приложены усредненные напряжения $\sigma_{11} = 0{,}01 \cdot 10^{11}$ Па, $\sigma_{ij} = 0$ при $ij \neq 11$ (осевое растяжение вдоль оси Ox_1). Условие прочности материала волокон возьмем в виде (3.2). Усредненный критерий прочности имеет вид (3.3).

γ	β	f_β
1	6	0,0154
2	11	0,0154
3	7	0,2713
4	10	0,2713
5	5	0,3121
6	12	0,3121
7	8	0,4113
8	9	0,4113
9	4	0,6546
10	13	0,6546
11	3	0,9528
12	14	0,9528
13	2	1,1552
14	15	1,1552
15	1	1,2268

Подсчитаем значения $\{f_\beta\}$ и перенумеруем $\{\varphi_\beta\}$ в порядке возрастания $\{f_\beta\}$ (см. таблицу, где значения β относятся к исходной нумерации, а γ — к новой). После чего решаем задачу (1.3), (2.2) для семейств $\Phi_k = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$, начиная с $k = 1$, пока при некотором $k = K$ она не окажется впервые разрешимой. В результате численного счета (ЭВМ ЕС 1033, время счета ~ 10 мин) было найдено, что $K = 11$, $f_K = f_{11} = 0{,}9529$, а множество решений задачи (1.3), (2.2) для системы векторов $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{11}\}$ имеет вид

$$M_4 = 7,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &= (0;\ 0;\ 0{,}2116;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}3948;\ 0{,}1813;\ 0{,}0007;\ 0;\ 0;\ 0{,}2115;\ 0;\ 0),\\
\mathbf{P}_2 &= (0;\ 0;\ 0{,}2116;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}3946;\ 0{,}1819;\ 0{,}0007;\ 0;\ 0;\ 0{,}2115;\ 0;\ 0),\\
\mathbf{P}_3 &= (0;\ 0;\ 0{,}2116;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}3945;\ 0{,}1821;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}2113;\ 0;\ 0),\\
\mathbf{P}_4 &= (0;\ 0;\ 0{,}2114;\ 0;\ 0;\ 0{,}0003;\ 0;\ 0{,}3938;\ 0{,}1828;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}2116;\ 0;\ 0),\\
\mathbf{P}_5 &= (0;\ 0;\ 0{,}2115;\ 0;\ 0;\ 0{,}0003;\ 0;\ 0{,}3938;\ 0{,}1828;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}2116;\ 0;\ 0),\\
\mathbf{P}_6 &= (0;\ 0;\ 0{,}2114;\ 0;\ 0;\ 0{,}0003;\ 0;\ 0{,}3938;\ 0{,}1828;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}2116;\ 0;\ 0),\\
\mathbf{P}_7 &= (0;\ 0;\ 0{,}2116;\ 0;\ 0;\ 0{,}0006;\ 0;\ 0{,}3932;\ 0{,}1830;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}2116;\ 0;\ 0).
\end{aligned}$$

Как видно, полученные решения близки между собой (совпадение некоторых решений является результатом округления в ЭВМ). Объяснение этому можно найти в [7]. С учетом сказанного в качестве окончательного решения можно взять любое из полученных, например решение $\mathbf{P}_2$ (совпадающее с решением $\mathbf{P}_{107}$ из примера 2). Соответствующий проект наиболее прочного композита таков: удельное содержание волокон в армирующих семействах есть

$$\begin{array}{llll}
\text{семейство} & \mu_3 = 0{,}2116, & \text{угол укладки} & \varphi_3 = -\pi/2 + 3\pi/15,\\
\text{семейство} & \mu_8 = 0{,}3946, & \text{угол укладки} & \varphi_8 = -\pi/2 + 8\pi/15,\\
\text{семейство} & \mu_9 = 0{,}1819, & \text{угол укладки} & \varphi_9 = -\pi/2 + 9\pi/15,\\
\text{семейство} & \mu_{11} = 0{,}0004, & \text{угол укладки} & \varphi_{11} = -\pi/2 + 11\pi/15,\\
\text{семейство} & \mu_{13} = 0{,}2115, & \text{угол укладки} & \varphi_{13} = -\pi/2 + 13\pi/15.
\end{array}$$

Остальные армирующие семейства не используются.

Условие прочности спроектированного композита (см. замечание 6) может быть записано в виде $f_{11} \leqslant 1$. Поскольку для полученного проекта $f_{11} = 0{,}9529$, то спроектированный композит выдерживает приложенную нагрузку. Отметим, что композит, образованный по проекту $\mathbf{P}_1$ из примера 2, разрушался бы при той же усредненной нагрузке, а именно: разрушались бы волокна первого ($f_1 = 1{,}2268 > 1$), второго и пятнадцатого ($f_2 = f_{15} = 1{,}1552 > 1$) армирующих семейств (см. таблицу).

З а м е ч а н и е 6. В примере 4 критерий прочности волокон — критерий первого порядка (т. е. $f(t\sigma_{11}) = |t|f(\sigma_{11})$). Это позволяет подсчитать предел прочности спроектированного композита при одноосном растяжении $-\sigma_1^*$ вдоль оси Ox_1. Имеем $f_{11} = \sigma^*|\sigma_1^*/0{,}01|\, f(0{,}01) = 1$, откуда $\sigma_1^* = \sigma^* 0{,}01/f(0{,}01) = \sigma^* 1{,}045$ Па.

Проектирование композита, выдерживающего заданные усредненные нагрузки. Пусть требуется спроектировать композит с заданным набором усредненных характеристик, выдерживающий без разрушения волокон приложение усредненных напряжений $\sigma_{ij} \in \Sigma$ (т. е. напряжений из некоторого класса Σ). В силу (2.4), (2.5) это означает, что должны быть выполнены следующие требования:

1) в композит входят только такие семейства армирующих волокон, для которых

$$f_\alpha = F(\varphi_\alpha, \mathbf{y}, \sigma_{mn}) \leqslant \sigma^* \quad \text{при всех} \quad \sigma_{mn} \in \Sigma; \tag{3.4}$$

2) выполнены условия (1.3), (2.2).

Таким образом, для решения задачи достаточно отобрать углы укладки, для которых выполнено (3.4), а затем решить для них задачу (1.3), (2.2) (методы ее решения описаны выше).

Замечание 7. Естественно, встает вопрос об учете прочности второго компонента — связующего, который может быть решен на основании дальнейшего развития изложенных выше методов (см. [12, 13]). Отметим, что в [14] указаны качественные критерии, позволяющие выявить наименее прочный компонент композита, а в [15–20] получены усредненные критерии неразрушения связующего волокнистых композитов, армированных высокомодульными волокнами.

Замечание 8. ЗП и ЗВК в общем случае имеют очень большое количество решений. По этому поводу отметим следующее: даваемое алгоритмом множество, как правило, оптимально (т. е. не может быть уменьшено без потери решений задачи). Попытка сократить полученное множество решений равносильна переходу к поиску частных решений [21]. Один из путей перехода — постановка задач оптимального проектирования (понимаемого в узком смысле как постановка задач, содержащих минимизируемую/максимизируемую функцию). Уменьшение множества решений в таких случаях (вплоть до единственности решения) можно наблюдать в приводившихся выше примерах.

Отметим, что интерес к ЗП в приведенных в данной работе постановках проявлялся постоянно, хотя применение неадекватных математических методов сдерживало исследование задачи. В качестве примера укажем на монографию [22], в которой формулируется и обсуждается аналог ЗВК (1.3), (2.2) и которая демонстрирует, что без использования адекватных математических методов исследование ЗП малопродуктивно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kolpakov A. G., Kolpakova I. G.** Convex combinations problem and its application for problem of design of laminated composite materials // Proc. 13th World Congr. on Numerical and Applied Mathematics. Dublin. 22–26 July, 1991. V. 4. P. 1955–1956.
2. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Усреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1982.
3. **Лионс Ж.-Л.** Замечание по некоторым вычислительным аспектам метода гомогенизации в композиционных материалах // Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. Новосибирск: Наука, 1978.
4. **Тихонов Н. А., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

5. **Колпаков А. Г.** Задача проектирования волокнистых композитов с заданными характеристиками // Материалы IV Всесоюз. конф. по композиционным материалам. Ереван, 1987. Т. 1. С. 144–145.
6. **Колпаков А. Г., Ракин С. И.** К задаче синтеза композиционного материала одномерного строения с заданными характеристиками // ПМТФ. 1986. № 6. С. 143–150.
7. **Колпаков А. Г., Ракин С. И.** Задача синтеза композита одномерного строения в заданном классе материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 78. С. 56–64.
8. **Kolpakov A. G.** Problem of design of laminated composites // Proc. Figth. Int. Symp. on Numerical Methods in Engineering. Southampton, Boston: Computational Mechanics Publ., Berlin et al.: Springer-Verl., 1989. V. 1.
9. **Расчет** и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Л. Каламкаров, А. Г. Колпаков, В. З. Партон. Новосибирск: Наука, 1993.
10. **Колпаков А. Г.** К решению задачи о выпуклых комбинациях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 8. С. 1323–1330.
11. **Черников С. Н.** Системы линейных неравенств. М.: Наука, 1968.
12. **Kolpakov A. G.** On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Second World Congr. on Computational Mechanics. Stuttgart. 1990: Extended Abstr. Lect. C. 453–456.
13. **Kolpakov A. G.** On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Comput. and Struct. 1992. V. 44, N 1/2. C. 97–101.
14. **Панасенко Г. П.** Прочность пространственно-армированных композиционных материалов // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1985. № 2. С. 37–41.
15. **Колпаков А. Г.** Усредненный критерий прочности связующего волокнистых композитов // ПМТФ. 1988. № 2. С. 145–152.
16. **Аннин Б. Д. , Колпаков А. Г.** Проектирование слоистых и волокнистых композитов с заданными характеристиками // ПТМФ. 1990. № 2. С. 136–150.
17. **Колпаков А. Г.** Деформационно-прочностные характеристики слоистых и волокнистых композитов. Расчет и проектирование // Тез. докл. I Всесоюз. симпоз. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций», Ужгород, 21–23 сент. 1988 г. Ужгород. 1988. С. 179–180.
18. **Колпаков А. Г.** Расчет и проектирование волокнистых высокомодульных композитов и оболочечных конструкций из них // Московская Междунар. конф. по композитам: Тез. докл. М.: 1990. Ч. 1.
19. **Партон В. З., Каламкаров А. Л., Колпаков А. Г.** Расчет высокомодульных перекрестно армированных композитных оболочек // Механика композит. материалов. 1989. № 1. С. 129–135.
20. **Annin B. D., Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G.** Analysis of local stresses in high modulus fiber composites // Localized Damage Computer-Aided Assesment and Control. Southampton: Computational Mechanics Publ., 1990. V. 2. P. 231–244.
21. **Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G.** Numerical design of thin-walled structural members on account of their strength // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1993. V. 36. P. 3341–3349.
22. **Нарусберг В. Л., Тетерс Г. А.** Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига: Зинатне, 1988.

Поступила в редакцию 6/IX 1994 г.