ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 2

УДК 532.59

ДВИЖЕНИЕ ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ В ЯДРЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ТОРНАДОПОДОБНОГО ВИХРЯ

В. В. Никулин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В [1] в длинноволновом приближении рассмотрено движение жидкости в ядре вертикального торнадоподобного вихря. При этом строгие результаты были получены в предположении, что в ядре вихря не равна нулю только азимутальная компонента завихренности.

В настоящей работе рассматривается общий случай, когда в ядре не равны нулю как азимутальная, так и вертикальная компоненты завихренности. Учет вращения жидкости в ядре вокруг оси существенно усложняет анализ. Однако и в этом случае удается установить некоторые важные закономерности движения.

1. Постановка задачи. Рассматривается невязкая несжимаемая неоднородная жидкость в поле тяжести. Течение считается стационарным и вращательно-симметричным. Вводится цилиндрическая система координат (r, φ, z), r — радиус, φ — азимутальный угол, z — ось симметрии, направленная против силы тяжести. Область, занимаемая жидкостью, разбивается на две: $r \le r_0(z)$ — ядро вихря, $r > r_0(z)$ — внешнее течение. На границе ядра возможен скачок плотности и касательной к ней компоненты скорости. Для перехода к безразмерным величинам вводятся масштабы длины, скорости и плотности. За единицу длины принимается характерный масштаб изменений по оси z, за единицу скорости — вращательная компонента скорости при $r = r_0$, $z = 0$, за единицу плотности — плотность внешнего течения, которая считается постоянной. При этом характерные давление и ускорение будут равны единице. Безразмерный параметр r_0 при $z = 0$ обозначается через δ. Далее все величины, если не указано особо, берутся в безразмерном виде.

Запишем через (u, v, w) компоненты скорости, соответствующие (r, φ, z), p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести. Внешнее течение считается известным и задается в виде, удовлетворяющем уравнениям движения:

$$u = w = 0, \quad v = \delta/r, \quad p = -\delta^2/(2r^2) - gz. \tag{1.1}$$

Следует отметить, что (1.1) хорошо аппроксимирует внешнее течение, наблюдаемое как в лабораторных [2, 3], так и в атмосферных вихрях [4].

Течение в ядре вихря исследуется в длинноволновом по оси z приближении. Совершается растяжение координат и функций:

$$r^2 \to \delta^2\eta,\ z \to z,\ 2ur \to \delta^2 q,\ vr \to \delta A,\ w \to w,\ \rho \to \rho,\ p \to p,\ g \to g.$$

Граница $r_0(z)$ переходит в $\eta_0(z)$. После замены уравнения движения и неразрывности принимают вид

$$\begin{gathered} qA_\eta + wA_z = 0, \quad \rho\delta^2(qq_\eta - q^2/(2\eta) + wq_z)/2 - \rho A^2/\eta = -2\eta p_\eta, \\ \rho(qw_\eta + ww_z) = -p_z - \rho g, \quad q_\eta + w_z = 0, \quad q\rho_\eta + w\rho_z = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

(нижние индексы означают дифференцирование по соответствующей переменной). На оси симметрии и границе ядра ставятся краевые условия:

$$q = A = 0 \qquad (\eta = 0); \tag{1.3}$$

$$p = -1/(2\eta_0) - gz \qquad (\eta = \eta_0); \tag{1.4}$$

$$q = w(\eta_{0z}) \qquad (\eta = \eta_0). \tag{1.5}$$

Условие (1.4) следует из (1.1) и требования непрерывности давления на границе ядра, (1.5) — кинематическое условие.

Предполагается, что $\delta \ll 1$. Слагаемые в (1.2), пропорциональные δ^2, опускаются. Полученная система преобразуется аналогично [1]. Вводятся новые независимые переменные z', ν, $\nu \in [0,1]$ по соотношениям $z = z'$, $\eta = R(z',\nu)$, где R удовлетворяет уравнению

$$wR_{z'} = q \tag{1.6}$$

и краевым условиям

$$R(z',0) = 0, \quad R(z',1) = \eta_0. \tag{1.7}$$

Начальное значение $R(0,\nu)$ — произвольная однозначная непрерывная функция, удовлетворяющая (1.7). При таком определении R краевые условия (1.3) (для q) и (1.5) выполняются автоматически. Неизвестная граница $\eta_0(z)$ переходит в известную $\nu = 1$. В переменных z', ν система (1.2) с учетом $\delta \ll 1$ преобразуется к виду [1] (далее штрих при z' опускается)

$$A = A(\nu), \quad \rho = \rho(\nu), \quad (wR_\nu)_z = 0,$$
$$\rho w w_z = -\Big(\frac{1-\rho_1 A_1^2}{2R_1^2}\Big)R_{1z} + \Big(\int\limits_\nu^1 \Big[\frac{a(\nu)}{2R}\Big]\,d\nu\Big)_z + (1-\rho)g, \tag{1.8}$$

где $a(\nu) = (\rho A^2)_\nu$; R_1, A_1, ρ_1 — значения R, A, ρ при $\nu = 1$ (на границе ядра). Система (1.8) решается с начальными данными при $z = 0$. Полагается $w = w_0(\nu)$, $R = \nu$ при $z = 0$.

В [1] изучен случай $A = 0$, $\rho = \text{const}$. В настоящей работе результаты обобщаются для $A = A(\nu)$, $\rho = \rho(\nu)$. На функции, задаваемые начальными условиями, наложены следующие естественные ограничения: $\rho(\nu) \geq \beta > 0$, $w_0(\nu) \geq \gamma > 0$. Считается, что $\rho(\nu)$, $w_0(\nu)$, $a(\nu)/\nu$ непрерывны и ограничены на $[0,1]$. Ограниченность $a(\nu)/\nu$ при $\nu \to 0$ вытекает из требования ограниченности вертикальной компоненты завихренности на оси.

Обозначим $x = \rho(w^2 - w_0^2)$, $\xi_0 = \rho^{1/2}w_0$, $y = 2g(1-\rho)z$. Тогда (1.8) после интегрирования по z от 0 до z приводится к виду

$$y = F(x),$$
$$F(x) = x - (1-\rho_1 A_1^2)(R_1^{-1} - 1) - \int\limits_\nu^1 [a(t)R^{-1}]\,dt + \int\limits_\nu^1 [a(t)t^{-1}]\,dt, \tag{1.9}$$
$$R(t) = \int\limits_0^t \xi_0(\xi_0^2 + x)^{-1/2}\,du, \quad R_1 = R(1).$$

Таким образом, задача свелась к решению нелинейного интегрального уравнения (1.9). Далее y считается независимой переменной. Первоначально доказывается локальная разрешимость (1.9) в окрестности $x = 0$, $y = 0$. Затем исследуется поведение решения $x(\nu, y)$ в зависимости от y.

2. Общие свойства оператора $F(x)$. Пусть C — пространство непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, D — множество функций x из C таких, что $x > -\xi_0^2$. Очевидно, что D открыто по метрике C.

Утверждение 2.1. *$F(x)$ отображает D в C. Отображение $F(x)$ непрерывно дифференцируемо по Фреше в D, причем $F'(x)h = (I - B_1(x) + B_2(x))h$, I — единичный оператор, B_1, B_2 — ограниченные линейные операторы:*

$$B_1(x)h = (1 - \rho_1 A_1^2)R_1^{-2}\int_0^1 (\xi_0/2)(\xi_0^2 + x)^{-3/2} h\,dt +$$
$$+ \int_0^1 a(t)R^{-2}\Big(\int_0^t (\xi_0/2)(\xi_0^2 + x)^{-3/2} h\,du\Big)\,dt,$$

$$B_2(x)h = \int_0^\nu a(t)R^{-2}\Big(\int_0^t (\xi_0/2)(\xi_0^2 + x)^{-3/2} h\,du\Big)\,dt.$$

Доказательство. Если $x \in D$, то в силу определений величины R, R_1, a/R, a/ν ограничены на отрезке $\nu \in [0,1]$. Тогда $\forall x \in D$, $y(\nu) = F(x)$ будет непрерывной функцией на $[0,1]$, следовательно, $F(x) \in C$. Положим $F(x+h) - F(x) - F'(x)h = \|h\|\,\omega(\nu, x, h)$; $F(x)$, R и R_1 выражаются через функции, которые имеют по x как по аргументу непрерывные производные. Для заданной $x \in D$ величины ξ_0, x, h, R, R_1, a/R будут ограничены $\forall \nu \in [0,1]$. Тогда в силу непрерывной зависимости $F(x)$, $F'(x)$ от x как от своего аргумента и от ν величина $\omega(\nu, x, h)$ будет равномерно непрерывна по своим аргументам и $\omega \to 0$ при $\|h\| \to 0$. В силу равномерной непрерывности ω $\omega \to 0$ равномерно, что доказывает существование $F'(x)$; $F'(x)$ непрерывна в D, поскольку выражается через функции, непрерывно зависящие от x как от аргумента.

Найдем условия, при которых линейный оператор $F'(x)$ имеет ограниченный обратный. Для этого предварительно докажем

Утверждение 2.2. *Оператор $[I + B_2(x)]$ имеет ограниченный обратный, причем*

$$[I + B_2(x)]^{-1}h = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_2^n h, \quad h \in C. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для фиксированного $x \in D$ выполнено: $|\xi_0(\xi_0^2 + x)^{-3/2}/2| \le M_1$, $|taR^{-2}| \le M_2$, M_1, M_2 — постоянные. Тогда $|B_2 h| \le \|h\| M\nu$, $|B_2^n h| \le \|h\| M^n \nu^n/(n!)^2$, где $M = M_1 M_2$. Таким образом, ряд (2.1) абсолютно сходится. Равенство $(I + B_2)(I + B_2)^{-1}h = h$ проверяется непосредственно из (2.1).

Утверждение 2.3. *$F'(x)$ имеет ограниченный обратный оператор, если*

$$B_1(x)[I + B_2(x)]^{-1}1 \ne 1. \tag{2.2}$$

Доказательство. Из вида B_1 следует, что $\forall f \in C$, $B_1 f = \text{const}$. Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$[F'(x)]^{-1}f = ((I + B_2)^{-1}1)(B_1(I + B_2)^{-1}f)(I - B_1(I + B_2)^{-1}1)^{-1} +$$
$$+ (I + B_2)^{-1}f, \tag{2.3}$$

откуда следует доказательство утверждения.

Из утверждений 2.1–2.3 вытекает

Теорема 2.1. *Уравнение* (1.9) *разрешимо в некоторой окрестности точки* (x_*, y_*), *где* $y_* = F(x_*)$, $x_* \in D$, *если* $B_1(x_*)[I + B_2(x_*)]^{-1}1 \neq 1$. *При этом x дифференцируемо по y и*

$$x'_y(y_*) = [F'(x_*)]^{-1}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Согласно утверждениям 2.1–2.3, отображение $y = F(x)$ удовлетворяет в окрестности $x_* \in D$ условиям теоремы о неявной функции [5]: оператор $F(x)$ непрерывен в D, $F(x) \in C$, а оператор $F'(x)$ существует, непрерывен и имеет ограниченный обратный. Отсюда следует доказательство теоремы.

3. Структура решений. Первоначально отметим, что $\forall y = \text{const}$ из (2.3), (2.4) вытекает

$$\begin{gathered} x'_y(\nu, y)y = [F'(x)]^{-1}y = yG(\nu, x)G_1^{-1}(x), \\ G(\nu, x) = [I + B_2(x)]^{-1}1, \quad G_1(x) = 1 - B_1(x)[I + B_2(x)]^{-1}1. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Следующее утверждение устанавливает качественно разное поведение решений в зависимости от начальных данных.

Утверждение 3.1. *Если* $G_1(0) > 0$, *то для достаточно малых* ν $x'_y(\nu, y) > 0$, *если* $G_1(0) < 0$, *то* $x'_y(\nu, y) < 0$ *для тех y, для которых сохраняются неравенства* $G_1(x) > 0$ *и* $G_1(x) < 0$.

Доказательство. Так как $x = 0 \in D$, $F(0) = 0$, то, согласно теореме 2.1, уравнение (1.9) разрешимо в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, если $G_1(0) \neq 0$. При этом функция $x(\nu, y)$ дифференцируема по y, причем x'_y выражается по формуле (3.1). Очевидно, (1.9) разрешимо до тех пор, пока $G_1(x) \neq 0$ или x не выйдет за границу области D. Из доказательства утверждения 2.2 следует, что $G(\nu, x) > 0$ для достаточно малых ν. Тогда, если $G_1(x) > 0$, то $x'_y > 0$, если $G_1(x) < 0$, то $x'_y < 0$ для достаточно малых ν.

Таким образом, в зависимости от начальных данных вблизи оси вихря x либо растет с увеличением y, либо убывает.

Дальнейшие утверждения доказываются при дополнительных ограничениях: $a(\nu) > 0$, $\rho_1 A_1^2 < 1$. Эти ограничения естественны, так как течения, в которых они нарушаются, обладают центробежной рэлеевской неустойчивостью.

В этом случае для выполнения неравенства $G_1(0) > 0$ достаточно выполнения более наглядного соотношения.

Утверждение 3.1а. *Если* $a(\nu) > 0$, $\rho_1 A_1^2 < 1$, $B_1(0)1 < 1$, *то* $G_1(0) > 0$.

Доказательство. Из сделанных предположений и вида B_1, B_2 следуют неравенства $0 < B_2(0)1 < B_1(0)1 < 1$. Действуя оператором $B_1 B_2^n$ на неравенства $0 < B_2(0)1 < 1$, получим $0 < B_1 B_2^{n+1}1 < B_1 B_2^n 1$. Отсюда, из (2.1) и определения $G_1(x)$ вытекает, что $G_1(0)$ представляется в виде знакопеременного ряда с монотонно убывающими членами. Сумма такого ряда не меньше разности первых двух. Тогда $G_1(0) > 1 - B_1(0)1 > 0$.

В утверждении 3.1 установлено, что x возрастает или убывает вблизи оси при увеличении y в зависимости от начальных данных при $y = 0$. Ниже устанавливается, как качественно меняется зависимость x от ν в окрестности оси при увеличении y.

Следствие 3.1. *Пусть* $a(\nu) > 0$, $\rho_1 A_1^2 < 1$. *Тогда, если* $G_1(x) > 0$, *то* $x''_{\nu y} < 0$, *если* $G_1(x) < 0$, *то* $x''_{\nu y} > 0$ *для достаточно малых* ν.

Доказательство. Согласно (3.1), $x''_{\nu y}(\nu, y) = G'_\nu(\nu, x)G_1^{-1}(x)$. Из выражения для $G(\nu, x)$ вытекает

$$G'_\nu(\nu, x) = -a(\nu)R^{-2}\int\limits_0^\nu(\xi_0/2)(\xi_0^2 + x)^{-3/2}G(t, x)\,dt. \tag{3.2}$$

В утверждении 3.1 отмечалось, что $G(\nu, x) > 0$ для достаточно малых ν. Тогда в силу положительности a, ξ_0 из (3.2) следует, что для достаточно малых ν $G'_\nu < 0$. Отсюда с учетом выражения для $x''_{\nu y}$ вытекает доказательство следствия.

Таким образом, если $G_1(x) > 0$, то x возрастает вблизи оси с ростом y, причем наибольшее нарастание x происходит на оси. Если $G_1(x) < 0$, то x убывает вблизи оси, причем наибольшее убывание происходит на оси.

В следующем утверждении устанавливается условие, при выполнении которого уравнение (1.9) не имеет решения при конечном $y > 0$.

Утверждение 3.2. *Если $a(\nu) > 0$, $\rho_1 A_1^2 < 1$, $G_1(0) < 0$, то уравнение (1.9) не имеет решения при конечном $y > 0$.*

Доказательство. Если $G_1(0) < 0$, то, согласно теореме 2.1, уравнение (1.9) разрешимо в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ и имеет решение $x(\nu, y)$. Очевидно, решение продолжаемо до тех пор, пока $G_1(x) \neq 0$ или x не достигнет границы области D. Если при некотором конечном y выражение $G_1(x)$ обращается в нуль, то утверждение доказано, так как, согласно теореме 2.1, в этом случае уравнение (1.9) не имеет решения. Предположим, что $G_1(x)$ не обращается в нуль. Тогда в силу условия $G_1(0) < 0$ будет выполнено $G_1(x) < 0$. Из определений $G(\nu, x)$, $B_2(x)$ и (2.1) следует $G(0, x) = 1$. Тогда из (3.1) получаем $x'_y(0, y) = G_1^{-1}(x) < 0$. Отсюда с учетом равенства $x = 0$ при $y = 0$ вытекает, что $x(0, y) < 0$ для $y > 0$. Тогда в силу положительности R, a, $1 - \rho_1 A_1^2$ из (1.9) при $\nu = 0$ получается неравенство

$$y \leq (1 - \rho_1 A_1^2) + \int\limits_0^1 a(t)t^{-1}\,dt. \tag{3.3}$$

Таким образом, y ограничено.

Рассмотрим частный случай $\rho_1 A_1^2 = 1$. Данное равенство реализуется, например, тогда, когда на границе ядра ($\nu = 1$) нет скачка плотности и вращательной компоненты скорости. В этом случае можно развить результаты утверждений 3.1 и 3.2.

Следствие 3.2. *Пусть $\rho_1 A_1^2 = 1$, $a(\nu) > 0$. Тогда, если $G_1(0) < 0$, то при достаточно малых ν $x'_y(\nu, y) < 0$, при ν, достаточно близких к 1, $x'_y(\nu, y) > 0$ для тех x, для которых сохраняется неравенство $G_1(x) < 0$.*

Доказательство. Неравенство $x'_y < 0$ для достаточно малых ν доказано в утверждении 3.1. Докажем вторую часть. Если $\rho_1 A_1^2 = 1$, то, очевидно, $B_1(x)$ равно значению $B_2(x)$ при $\nu = 1$. Тогда из (2.1), (3.1) следует, что в этом случае $G_1(x) = G(1, x)$. Отсюда с учетом (3.1) получается

$$x'_y(\nu, y) = G(\nu, x)G^{-1}(1, x), \tag{3.4}$$

где x'_y непрерывна по ν, так как $G(\nu, x)$ представляется в виде абсолютно сходящегося ряда, члены которого непрерывны по ν. Из (3.4) следует, что $x'_y(1, y) = 1$. В силу непрерывности x'_y по ν неравенство $x'_y(\nu, y) > 0$ сохраняется и для ν, достаточно близких к 1.

Таким образом, в этом случае вблизи оси x убывает, а вблизи границы ядра возрастает.

Утверждение 3.3. *Если* $\rho_1 A_1^2 = 1$, *то уравнение* (1.9) *не имеет решения при конечном* $y < 0$.

Доказательство. Из (1.9) следует, что при $\nu = 1$ $y = x$. Так как $x > -\xi_0^2$, то $y > -\xi_0^2(1)$.

4. Обсуждение результатов. Ранее [1] исследовано движение жидкости в ядре вертикального торнадоподобного вихря без учета ее вращения вокруг оси. Было показано, что в этом случае вертикальная компонента скорости в ядре изменяется в зависимости от z на одинаковую величину при любом ν, т. е. профиль вертикальной компоненты скорости как функция от ν при фиксированном z в процессе движения не деформируется. Однако при построении модели распада вихря [1] было принципиально важным, чтобы вертикальная компонента скорости имела минимум на оси, для того чтобы точка остановки в процессе движения возникала на оси вихря. Поэтому при построении модели распада предполагалось, что такой минимум имеется в начальном профиле $w_0(\nu)$. В связи с этим возможность деформации профиля в процессе движения, а также вид деформации являются важными вопросами для понимания механизмов возникновения таких явлений, как распад или прыжок вихря.

На основе полученных результатов проанализируем, какие изменения вносит учет вращения жидкости в ядре. Для большей наглядности положим $\rho = \rho_1 = \text{const}$. Отметим, что данное предположение не меняет качественных выводов, полученных ниже. Рассмотрим случай, когда $\rho_1 < 1$, т. е. жидкость в ядре легче окружающей. Такие течения реализуются как в природных вихрях [4], так и в лабораторных [3, 6, 7].

Поскольку $\rho = \text{const}$, то условие $z = \text{const}$ соответствует $y = \text{const}$. Так как $\rho_1 < 1$, то возрастание z отвечает возрастанию y. Поэтому можно непосредственно использовать результаты, полученные выше. Так, если $G_1(0) > 0$, то вертикальная компонента скорости вблизи оси вихря растет с увеличением высоты, если $G_1(0) < 0$, то убывает (утверждение 3.1), причем наибольшая скорость убывания находится на оси. Таким образом, профиль вертикальной компоненты скорости деформируется с увеличением высоты, при этом точка остановки может возникнуть на оси лишь в том случае, когда начальные данные при $z = 0$ таковы, что $G_1(0) < 0$. Кроме того, в этом случае, согласно утверждению 3.2, решение не существует при некотором конечном $z > 0$. Аналогично [1] можно предположить, что отсутствие решения означает распад вихря. Тогда условием распада является $G_1(0) < 0$, а ограничение на высоту вихря можно получить, используя (3.3).

Количественные оценки выполним в размерном виде. Считая, что жидкость в ядре вихря вращается по твердотельному закону (что согласуется с наблюдениями [2, 4]), получим $A = (v_1/v_0)\nu$. Здесь v_1, v_0 — вращательные компоненты скорости при $z = 0$, $r = r_0$ в ядре и во внешнем течении соответственно (в общем случае $v_1 \neq v_0$, если на границе ядра ввести разрыв вращательной компоненты скорости). Тогда с учетом определения y неравенство (3.3) примет вид

$$z \le \frac{\rho_0 v_0^2 + \rho_1 v_1^2}{2g(\rho_0 - \rho_1)} \tag{4.1}$$

(ρ_1, ρ_0 — плотности жидкости в ядре вихря и во внешнем течении, $\rho_1 < \rho_0$).

Найдем выражение для $G_1(0)$, считая $w_0 = \text{const}$. Это предположение хорошо аппроксимирует экспериментальные данные [2]. Тогда

$$G_1(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n M^n}{(n!)^2} - \frac{\rho_0 v_0^2 - \rho_1 v_1^2}{2\rho_1 w_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n M^n}{(n!)^2(n+1)},$$

где $M = (v_1/w_0)^2$. Обычно на границе ядра и внешнего течения $\rho_0 v_0^2 \cong \rho_1 v_1^2$. Тогда

$$G_1(0) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n M^n}{(n!)^2}.$$

Отсюда $G_1(0) > 0$, если $M < 1{,}4$. Таким образом, вертикальная компонента скорости вблизи оси вихря будет возрастать, если выполнено неравенство $(v_1/w_0)^2 < 1{,}4$.

По предположению условием возникновения распада вихря является отсутствие решения при конечном z. Последнее выполнено, если $G_1(0) < 0$. Ядро вихря, наблюдаемое в экспериментах [3, 7] и в натуре [8], имеет конечную высоту. Поэтому, если предположение справедливо, то теоретические оценки вихря и $G_1(0)$ должны согласовываться с данными измерений.

Формула (4.1) с точностью до коэффициента 1/2 аналогична выражению, полученному в [1] для высоты вихря без учета вращения жидкости в ядре. Поэтому расчет высоты, согласно (4.1), по порядку величины согласуется с результатами наблюдений в [3, 7, 8].

Величину $G_1(0)$ можно рассчитать на основе [7]. Полагаем $v_1 \cong v_0 = 100$ см/с, $w_0 = 40 - 50$ см/с. Для $M = 4;\ 6;\ 7$ имеем $G_1(0) \cong -0{,}35;\ -0{,}2;\ -0{,}05 < 0$.

Таким образом, в работе проанализированы особенности движения завихренной жидкости в ядре вертикального торнадоподобного вихря. Получен строгий критерий, разделяющий качественно различное поведение решений в зависимости от начальных данных. Аналитические оценки по порядку величины согласуются с результатами наблюдений за лабораторными и природными вихрями. Дана теоретическая основа для выполнения численных расчетов движения жидкости в ядрах вертикальных торнадоподобных вихрей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Никулин В. В.** Распад вертикального торнадоподобного вихря // ПМТФ. 1992. № 4. С. 42–47.
2. **Никулин В. В.** Исследование взаимодействия торнадоподобного вихря с твердыми границами // ПМТФ. 1980. № 1. С. 68–75.
3. **Mullen J. B., Maxworthy T.** A laboratory model of dust devil vortices // Dynamics Atmos. and Oceans. 1977. N 1. P. 181–214.
4. **Sinclair P. C.** The lower structure of dust devils // J. Atmospheric Sci. 1973. V. 30, N 8. P. 1599–1619.
5. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
6. **Никулин В. В.** Экспериментальные измерения температуры в торнадоподобном вихре // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 6.
7. **Fitzjarrald D. E.** A laboratory simulation of convective vortices // J. Atmospheric Sci. 1973. V. 30, N 7. P. 894–902.
8. **Williams N. R.** Development of dust wirls // Bull. Amer. Meteorol. Soc. 1948. V. 29, N 3. P. 106–117.

Поступила в редакцию 8/IV 1994 г.