УДК 539.37+514

СТРУКТУРА КИНЕМАТИЧЕСКОГО И СИЛОВОГО ПОЛЕЙ В РИМАНОВОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

М. А. Гузев

Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: guzev@iam.dvo.ru

Рассматривается неевклидова модель сплошной среды, для которой структура дефектов в материале характеризуется с помощью внутренней метрики и скалярной кривизны. Показано, что безвихревое поле перемещений для точек данной среды складывается из упругих перемещений (в отсутствие дефектов) и поля, характеризующего отличие внутренней геометрии модели от евклидовой геометрии. Соответствующие компоненты внутренних напряжений являются суммой упругих напряжений и самоуравновешенных напряжений, определяемых скалярной кривизной. Построено точное решение для вихревого поля дислокаций, сформулированы условия существования в материале ненулевого поля напряжений, параметризуемого скалярной кривизной, в отсутствие внешних сил.

Ключевые слова: внутренние напряжения, дефекты, несовместность, тензор Римана.

Введение. Одной из основных проблем механики деформируемого твердого тела является описание упругопластического поведения материалов. Расхождение интересов исследователей в этой области обусловлено в первую очередь необходимостью решения качественно различных задач, в которых для описания свойств реальных материалов при деформировании в общем случае используются различные математические модели. Так, в классических моделях пластичности при построении теории упругопластического деформирования вводятся параметры описания, включающие тензоры упругой (обратимой) и пластической (необратимой) деформаций, и задаются соотношения, определяющие связь этих тензоров с другими кинематическими и динамическими характеристиками рассматриваемой модели. Если выполнено разбиение полной деформации на обратимые и необратимые деформации, то на основе формализма неравновесной термодинамики можно получить уравнения состояния материала.

Следует отметить, что механика деформируемого твердого тела как макроскопическая теория не учитывает внутренние механизмы упругопластического деформирования, обусловленные наличием дефектов в материале. При изучении микрохарактеристик различных материалов с помощью физических методов вводятся такие понятия, как дислокация, дисклинация, вакансия, и другие характеристики дефектов кристаллического строения. В инженерной практике при построении континуальных моделей кристаллической решетки каждому виду дефекта, как правило, ставится в соответствие состояние континуума с внутренними напряжениями. Если из такого материала вырезается малый элемент, то этот элемент самопроизвольно деформируется, а величина этой деформации, в отличие от деформации, создаваемой внешними силами, в общем случае не удовлетворяет условиям совместности. Если тензор несовместности задан, то нахождение поля полной деформа-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-12130-офи-м).

ции сводится к решению задачи теории упругости, краевое условие которой определяется после решения уравнения несовместности для необратимой составляющей деформации и нахождения дополнительных упругих сил на границе области [1].

В физических теориях прочности и пластичности отличные от нуля значения напряжений появляются в моделях, учитывающих дефекты кристаллической структуры материалов (см., например, [2. Гл. 4]). Анализ таких физических моделей, выполненный в 50-е гг. XX в., позволил сделать вывод о необходимости использовать при описании напряжений неевклидовы геометрические объекты, запрещенные в классической теории упругости [3, 4]. Эти объекты используются в [5, 6] при анализе общих соотношений неравновесной термодинамики в неевклидовых моделях сплошных сред. В [7] неевклидовы геометрические объекты введены для параметризации ненулевых внутренних самоуравновешенных напряжений. Поле напряжений σ_{ij} внутри материала можно представить в виде $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + T_{ij}$, где Σ_{ij}, T_{ij} — поле упругих напряжений и самоуравновешенное поле, определяемые дефектами структуры материала. Данный подход используется в [8, 9] для расчета напряженно-деформированного состояния материала, содержащего дислокации. Однако, несмотря на простейшие предположения о зависимости энергии от термодинамических переменных, для неевклидовой модели сплошной среды не исследовалась геометрическая структура поля перемещений, не сформулировано уравнение состояния, не рассматривалось влияние выбора внутренних инвариантов неевклидовой модели на структуру кинематического и силового полей. В данной работе проводятся такие исследования для римановой модели сплошной среды.

1. Кинематические переменные римановой модели сплошной среды. В процессе деформирования сплошной среды происходит изменение положения ее точек. Для внешнего наблюдателя в качестве меры полной деформации используем тензор Альманси [10]

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\delta_{ij} - \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i}\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\Big) = \frac{1}{2}\,(\delta_{ij} - G_{ij}). \tag{1}$$

Здесь $\xi^i(\boldsymbol{x}, t) = x^i - U^i(\boldsymbol{x}, t)$; $U^i = U^i(\boldsymbol{x}, t)$ — поле смещений. Тензор G_{ij}, определяющий изменение формы тела, называется внешним метрическим тензором. В классической модели упругой сплошной среды свободная энергия F является функцией температуры и тензора G_{ij}: $F = F(T, G_{ij})$.

Предполагается, что при деформировании материала в нем образуются дефекты, вызывающие изменение внутреннего напряженного состояния и появление необратимой составляющей деформации, связанной с метрическим тензором g_{ij} [1], характеризующим внутреннюю геометрию материала. Тогда дополнительные гипотезы об алгебраической структуре g_{ij} приводят к различным моделям сплошной среды. Если

$$g_{ij} = G_{ij} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i}\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}, \tag{2}$$

то кинематику материала можно описать с помощью классической теории упругости. В общем случае для произвольного симметричного неотрицательного тензора g_{ij} существование функции $\xi^\alpha(\boldsymbol{x}, t)$ эквивалентно разрешимости системы уравнений (2) относительно дисторсий $\partial\xi^\alpha/\partial x^i$. В [10] показано, что необходимым и достаточным условием разрешимости этой системы является обращение в нуль тензора Римана

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^l}\Big) - g_{ps}(\Gamma^p_{il}\Gamma^s_{jk} - \Gamma^p_{jl}\Gamma^s_{ik}),$$
$$\Gamma^k_{ij} = \frac{g^{ks}}{2}\Big(\frac{\partial g_{si}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\Big), \qquad g^{ks}g_{sp} = \delta^k_p. \tag{3}$$

Однако с геометрической точки зрения условие $R_{ijkl} = 0$ означает [11], что для многообразия, порождаемого внутренней структурой материала, можно ввести евклидовы координаты, т. е. построить отображение точек материала на координатные оси пространства внешнего наблюдателя $\mathbb{R}^3$. Таким образом, использование классической теории упругости для описания внутренней структуры материала означает совпадение его внутренней геометрии с геометрией евклидова пространства наблюдателя, исключительным свойством которой является неустойчивость по отношению к малым изменениям значений кривизны. Поэтому при описании внутренней метрической структуры напряженного состояния материала предположение $R_{ijkl} \neq 0$ является более общим. В результате расширения модели упругой сплошной среды с помощью введения в нее g_{ij}, R_{ijkl} в качестве дополнительных параметров получаем риманову модель сплошной среды.

В случае $\mathbb{R}^3$ тензор Римана [11] определяется тензором Риччи R_{ij}, который связан с тензором кривизны соотношениями

$$R_{ik} = R^j_{ijk} = g^{jl}R_{ijkl},$$
$$R_{lijk} = R_{lj}g_{ik} + R_{ik}g_{lj} - R_{lk}g_{ij} - R_{ij}g_{lk} + (R/2)(g_{lk}g_{ij} - g_{lj}g_{ik}), \quad R = g^{ij}R_{ij} \tag{4}$$

(R — скалярная кривизна). Вводя тензор $\varepsilon_{ij} = (\delta_{ij} - g_{ij})/2$ и записывая (3), (4) в линейном приближении относительно $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$, получаем

$$R_{ik} \approx R_{jijk} \approx S_{jijk} = S_{ik} \equiv \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x^i\,\partial x^k} + \Delta\varepsilon_{ik} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^j} \tag{5}$$

(Δ — оператор Лапласа). Поскольку величины S_{ik} совпадают в ведущем порядке с компонентами тензора Риччи R_{ik}, они определяют отличие внутренней геометрии модели от евклидовой геометрии в линейном приближении по полю ε_{ij}. При этом соотношение $S_{ik} = 0$ совпадает с известным в механике [10] условием совместности Сен-Венана и тождественно удовлетворяет тензору малых деформаций Альманси a_{ij}, который с учетом (1) равен

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U^i}{\partial x^j} + \frac{\partial U^j}{\partial x^i}\Big). \tag{6}$$

Из сказанного выше следует, что минимальный полный набор кинематических переменных для модели материала с дефектами структуры включает переменные A_{ij}, ε_{ij}, R_{ij}, которые входят в выражение для энергии через собственные и совместные инварианты. Для простоты дальнейшего анализа рассмотрим малые деформации, учитывая в модели инвариант тензора Римана, совпадающий со скалярной кривизной R, для которого согласно (4), (5) справедливо выражение

$$R \approx S_{ii} = 2\Big(\Delta\varepsilon_{kk} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i\,\partial x_j}\Big). \tag{7}$$

Тогда кинематическими переменными являются a_{ij}, ε_{ij}, R и при этом не формулируются гипотезы о кинематической связи между объектами a_{ij}, ε_{ij}, R, естественные соотношения между которыми появляются при получении уравнения состояния для материала.

2. Система определяющих уравнений модели и выбор энергии. С использованием условия минимума свободной энергии F получим уравнения модели. Вариация соответствующего функционала свободной энергии равна

$$\delta\int F\,dV = \int\Big(\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}\,\delta a_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\,\delta\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial R}\,\delta R\Big)\,dV.$$

С помощью (6), (7) подынтегральные вклады представим в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}\,\delta a_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}\,\delta U^i\Big) - \delta U^i\,\frac{\partial}{\partial x^j}\,\frac{\partial F}{\partial a_{ij}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial R}\,\delta R = 2\,\frac{\partial}{\partial x^i}\Big[\frac{\partial F}{\partial R}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\,\delta\varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x^j}\,\delta\varepsilon_{ij}\Big) + \delta\varepsilon_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^j}\,\frac{\partial F}{\partial R} - \delta\varepsilon_{kk}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\frac{\partial F}{\partial R}\Big] + {} + 2\delta\varepsilon_{ij}\Big(\delta_{ij}\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\Big)\frac{\partial F}{\partial R}.$$

Полагая $\delta U^i = 0$, $\delta\varepsilon_{ij} = 0$ на границе области, находим вариацию свободной энергии

$$\delta\int F\,dV = \int\Big[-\delta U^i\,\frac{\partial}{\partial x^j}\,\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} + \delta\varepsilon_{ij}\,\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}} + 2\delta\varepsilon_{ij}\Big(\delta_{ij}\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\Big)\frac{\partial F}{\partial R}\Big]\,dV.$$

В силу произвольности вариаций δU^i, $\delta\varepsilon_{ij}$ получаем систему уравнений для материала с дефектами

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\,\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}} + 2\Big(\delta_{ij}\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\Big)\frac{\partial F}{\partial R} = 0. \tag{8}$$

Первое соотношение в (8) совпадает с уравнениями механического равновесия материала

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \tag{9}$$

Из (8), (9) следует формула для компонент поля напряжений

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial a_{ij}}. \tag{10}$$

Второе соотношение в (8) определяет поле ε_{ij}. Для дальнейшего анализа полученных соотношений необходимо выбрать конкретный вид свободной энергии F. Рассмотрим материал с некоторой постоянной температурой. Выражение для объемной плотности свободной энергии F запишем в виде

$$F = F_0 + F_a + F_\varepsilon + F_{a\varepsilon} + F_R, \tag{11}$$

где F_0 — фиксированное значение энергии, от которого отсчитывается значение энергии напряженного состояния материала с дефектами; F_a, F_ε зависят от a_{ij} и ε_{ij} соответственно; $F_{a\varepsilon}$ характеризует взаимодействие полей a_{ij} и ε_{ij}; F_R — функция скалярного параметра R. Поскольку рассматриваются малые деформации, выражение для каждой функции можно получить с помощью разложения в ряд по своим аргументам. Так как свободная энергия является скалярной величиной, в разложении должны быть скаляры. Следовательно, функции F_a и F_ε определяются с помощью первого и второго инвариантов соответствующих тензорных аргументов a_{ij} и ε_{ij}.

Параметризация взаимодействия $F_{a\varepsilon}$ может быть выполнена различными способами. Рассмотрим случай, когда $F_{a\varepsilon}$ зависит от произведения первых инвариантов a_{kk} и ε_{kk}. Тогда имеем следующее представление:

$$F_a = \lambda_1(a_{kk})^2/2 + \mu_1 a_{ij}a_{ij}, \qquad F_\varepsilon = \lambda_2(\varepsilon_{kk})^2/2 + \mu_2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},$$
$$F_{a\varepsilon} = -g a_{kk}\varepsilon_{ii}, \qquad F_R = \mu_3 R^2/4. \tag{12}$$

Здесь λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, g, μ_3 — феноменологические параметры модели. Выбор F_R в (12) обусловлен требованием выпуклости свободной энергии относительно скалярной кривизны.

Из (8), (10)–(12) получаем

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = \lambda_1 \delta_{ij} a_{kk} + 2\mu_1 a_{ij} - g\delta_{ij}\varepsilon_{kk}; \tag{13}$$

$$\lambda_2 \delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu_2 \varepsilon_{ij} - g\delta_{ij} a_{kk} + \mu_3\Big(\delta_{ij}\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\Big) R = 0. \tag{14}$$

В отличие от классической теории упругости в рассматриваемой модели поле напряжений σ_{ij} содержит дополнительный вклад, определяемый величиной ε_{kk}, который после суммирования диагональных слагаемых в (14) равен

$$\varepsilon_{kk} = \frac{3g}{3\lambda_2 + 2\mu_2}\, a_{kk} - \frac{2\mu_3}{3\lambda_2 + 2\mu_2}\, \Delta R. \tag{15}$$

Подставляя это выражение в (14), находим

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\mu_3}{2\mu_2}\Big(\delta_{ij}\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^j}\Big) R + \frac{g}{3\lambda_2 + 2\mu_2}\, a_{kk}\delta_{ij} + \delta_{ij}\, \frac{\lambda_2\mu_3}{\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}\, \Delta R.$$

Данное соотношение должно существовать совместно с (7), вследствие чего имеет место уравнение

$$\frac{\mu_3}{\mu_2}\, \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{3\lambda_2 + 2\mu_2}\, \Delta^2 R + \frac{R}{2} = \frac{2g}{3\lambda_2 + 2\mu_2}\, \Delta a_{kk}. \tag{16}$$

Рассмотрим предельный случай полученных формул для $R = 0$. Тензор ε_{ij} является диагональным, и из (13), (15) получаем представление для компонент напряжений

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = \delta_{ij}\Lambda_1 a_{kk} + 2\mu_1 a_{ij}, \\ \Lambda_1 = \lambda_1 - \alpha(\lambda_1 + 2\mu_1), \qquad \alpha = \frac{3g^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(3\lambda_2 + 2\mu_2)}, \end{gathered} \tag{17}$$

которое показывает, что σ_{ij} определяется в соответствии с законом Гука, поскольку значение одного из параметров Ламе λ_1 необходимо заменить на Λ_1, оставив второй параметр Ламе μ_1 неизменным. При этом из формулы (16) следует известное в теории упругости [2] уравнение $\Delta a_{kk} = 0$, т. е. величина $a_{kk} = \operatorname{div} \boldsymbol{U}$ является гармонической функцией.

В случае если $R \neq 0$, для вычисления напряжений необходимо знать распределение первого инварианта тензора Альманси.

3. Безвихревое поле перемещений и поле самоуравновешенных напряжений. Подставляя (13) в (9), получаем

$$(\lambda_1 + \mu_1)\nabla a_{kk} + \mu_1 \Delta \boldsymbol{U} - g\nabla\varepsilon_{kk} = 0. \tag{18}$$

Используя известную формулу векторного анализа $\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{U} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{U} = \Delta \boldsymbol{U}$, (18) можно записать в виде

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{U} - g\nabla\varepsilon_{kk} = \mu_1 \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{U}. \tag{19}$$

При рассмотрении безвихревого поля перемещений $\operatorname{rot} \boldsymbol{U} = 0$ и уравнение (19) сводится к уравнению $\nabla[(\lambda_1 + 2\mu_1)\operatorname{div} \boldsymbol{U} - g\varepsilon_{kk}] = 0$, которое интегрируется:

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\operatorname{div} \boldsymbol{U} - g\varepsilon_{kk} = B$$

(B — некоторая постоянная). Подставляя в это выражение ε_{kk} из (15), получаем соотношение

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)(1 - \alpha)\operatorname{div} \boldsymbol{U} = B - \frac{2\mu_3\alpha}{3g}\, \operatorname{div} \nabla R, \tag{20}$$

в котором учтено тождество $\operatorname{div} \nabla R = \Delta R$.

В силу линейности уравнения (20) перемещение $\boldsymbol{U}$ представим в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{U}_0$ и $\boldsymbol{W}$, которые соответственно удовлетворяют условиям

$$\operatorname{div}\boldsymbol{U}_0 = \frac{B}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(1-\alpha)}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{U}_0 = 0,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{W} = -\frac{2\mu_3\alpha}{3(1-\alpha)g}\operatorname{div}\nabla R, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{W} = 0. \tag{21}$$

Известно, что поле $\boldsymbol{U}_0$ совпадает с решением $\boldsymbol{U}_{cl}$ классической модели упругой сплошной среды. Поле $\boldsymbol{W}$ зависит от распределения дефектов. Из (21) следует, что $\boldsymbol{W}$ определяется через ∇R. Тогда

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{cl} - \frac{2\mu_3\alpha}{3(1-\alpha)g}\nabla R. \tag{22}$$

Таким образом, безвихревое упругое поле перемещений в среде раскладывается на две составляющие: поле ∇R, которое создали бы в бесконечной среде дефекты, и поле $\boldsymbol{U}_{cl}$, которое выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия равновесия для поля напряжений (13).

Соотношение (22) совместно с (13), (15) позволяет вычислить поле внутренних напряжений:

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + T_{ij},$$
$$\Sigma_{ij} = \delta_{ij}\Lambda_1 a_{kk}^{cl} + 2\mu_1 a_{ij}^{cl}, \qquad T_{ij} = \frac{4\alpha\mu_1\mu_3}{3(1-\alpha)g}\Big(\delta_{ij}\,\Delta R - \frac{\partial^2 R}{\partial x^i\,\partial x^j}\Big), \tag{23}$$
$$a_{ij}^{cl} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U_{cl}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial U_{cl}^j}{\partial x^i}\Big).$$

Из (23) следует, что Σ_{ij} совпадает с упругим полем напряжений (17). Дополнительный вклад T_{ij} является решением уравнения равновесия (9). Представим поле T_{ij} в виде

$$T_{ij} = \frac{4\alpha\mu_1\mu_3}{3(1-\alpha)g}\,\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpn}\delta_{nq}\,\frac{\partial^2}{\partial x^p\,\partial x^s}\,R. \tag{24}$$

В [12] показано, что правая часть (24) удовлетворяет интегральным условиям механического равновесия, т. е.

$$\int\limits_{\partial V} T_{ij}n_j\,dS = 0, \qquad \int\limits_{\partial V}(T_{il}x_k - T_{kl}x_i)n_l\,dS + \int\limits_{V}(T_{ki} - T_{ik})\,dV = 0 \tag{25}$$

(V — произвольный объем внутри тела; ∂V — поверхность, ограничивающая заданный объем). Ненулевые решения системы (9), удовлетворяющие соотношениям (25), называются самоуравновешенными напряжениями.

Следовательно, структура поля внутренних напряжений (23) складывается из поля упругих напряжений и поля созданных дефектами самоуравновешенных напряжений.

Приведем уравнение для скалярной кривизны. Исключая a_{kk} из (16), (20), получаем уравнение для скалярной кривизны R

$$\Delta^2 R + \Gamma R = 0, \qquad \Gamma = \frac{3\beta(3\lambda_2 + 2\mu_2)(1-\alpha)}{2[3\lambda_2(1-\alpha) + 2\mu_2(3-\alpha)]}, \qquad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_3}. \tag{26}$$

4. Свойство калибровочной инвариантности. Рассмотрим другую параметризацию свободной энергии, связанную с выбором взаимодействия $F_{a\varepsilon}$. Пусть $F_{a\varepsilon}$ зависит от совместных инвариантов a_{ij} и ε_{ij}. Поскольку деформации незначительны, единственным таким инвариантом второго порядка относительно переменных a_{ij} и ε_{ij} является $F_{a\varepsilon} = g_1 a_{ik}\varepsilon_{ki}$ с некоторым феноменологическим параметром g_1.

Последовательность дальнейших вычислений совпадает с изложенной выше при исследовании задачи в случае параметризации (12). Тогда поле напряжений (10) равно $\sigma_{ij} = \lambda_1\delta_{ij}a_{kk} + 2\mu_1 a_{ij} + g_1\varepsilon_{ij}$, где

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{g_1 A_{ij}}{2\mu_2} + \frac{g_1\lambda_2 A_{kk}\delta_{ij}}{2\mu_2(3\lambda_2+2\mu_2)} + \frac{\lambda_2\mu_3\,\Delta R\delta_{ij}}{\mu_2(3\lambda_2+2\mu_2)} + \frac{\mu_3}{2\mu_2}\Big(\delta_{ij}\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\Big)R.$$

Проинтегрированное уравнение равновесия для безвихревого поля перемещений сводится к соотношениям

$$(\lambda_1+2\mu_1)\Big(1-\alpha_1\,\frac{\lambda_1+2\mu_1}{4\mu_2}\Big)\operatorname{div}\boldsymbol{U} = B - \alpha_1\,\frac{\lambda_2\mu_3(\lambda_1+2\mu_1)}{4\mu_2 g_1}\operatorname{div}\nabla R,$$

где $\alpha_1 = g_1^2/[(\lambda_1+2\mu_1)(3\lambda_2+2\mu_2)]$. Соответствующее решение для поля перемещений имеет вид

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{cl} - \frac{\alpha_1}{4\mu_2 - \alpha_1(\lambda_1+2\mu_1)}\,\frac{\lambda_2\mu_3}{g_1}\,\nabla R. \tag{27}$$

Дальнейшее вычисление поля напряжений приводит к следующим формулам:

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + T_{ij}, \qquad \Sigma_{ij} = \delta_{ij}\Lambda a_{kk} + 2\mu a_{ij},$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U^i_{cl}}{\partial x^j} + \frac{\partial U^j_{cl}}{\partial x^i}\Big), \qquad \Lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2 g_1^2}{2\mu_2(3\lambda_2+2\mu_2)}, \qquad \mu = \mu_1 - \frac{g_1^2}{4\mu_2}, \tag{28}$$

$$T_{ij} = s\Big(\delta_{ij}\,\Delta R - \frac{\partial^2 R}{\partial x^i\,\partial x^j}\Big), \qquad s = \frac{\mu_3}{2\mu_2 g_1}\Big(g_1^2 - 4\mu_1\lambda_2\alpha_1\,\frac{1-g_1^2/(4\mu_1\mu_2)}{1-\alpha_1(\lambda_2+\mu_2)/\mu_2}\Big).$$

Из (22), (23) и (27), (28) следует, что для рассмотренных видов взаимодействия структуры полей перемещений и напряжений одинаковы. Возникает естественный вопрос о причине такого результата.

Заметим, что величины S_{ik} в (5) остаются инвариантными в случае градиентных преобразований $\varepsilon_{ij} \to \varepsilon_{ij} + \varphi_{ij}$, где $\varphi_{ij} = \partial\varphi_i/\partial x^j + \partial\varphi_i/\partial x^j$ — тензор с произвольной функцией φ_i. В физике градиентные преобразования, обусловленные векторным полем $\boldsymbol{\varphi}$, появляются, например, в теории поля [13], когда исследуется проблема определения тензора электромагнитного поля через потенциалы. При этом электромагнитное поле остается инвариантным относительно калибровочных (градиентных в терминологии теории поля) преобразований, а потенциалы определяются неоднозначно. По аналогии с теорией поля в рассматриваемом случае величины ε_{ij} соответствуют потенциалам, а функция S_{ik} — тензору электромагнитного поля. Вследствие неоднозначного определения потенциалов их можно выбрать таким образом, чтобы они удовлетворяли одному произвольному условию — условию калибровки.

Зафиксируем калибровку, выбрав функцию φ_i в виде $\varphi_i = \nu U_i/2$, где необходимо определить параметр ν. Такой выбор φ_i означает, что рассматриваются калибровочные преобразования, обусловленные деформацией упругой сплошной среды. Это позволяет ввести тензор $E_{ij} = \varepsilon_{ij} + \nu a_{ij}$ и записать выражение для свободной энергии в следующем виде:

$$F_0 + \frac{\lambda_1}{2}\,(a_{kk})^2 + \mu_1 a_{ij}a_{ij} + \frac{\lambda_2}{2}\,(\varepsilon_{kk})^2 + \mu_2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + g_1 a_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\mu_3}{4}\,R^2 =$$
$$= F_0 + \frac{\lambda_1}{2}\Big(1 + \frac{\nu^2\lambda_2}{\lambda_1}\Big)(a_{kk})^2 + (\mu_1 + \nu^2\mu_2 - g_1\nu)a_{ij}a_{ij} + \frac{\lambda_2}{2}\,(E_{kk})^2 +$$
$$+ \mu_2 E_{ij}E_{ij} - \lambda_2\nu a_{kk}E_{jj} + a_{ij}E_{ij}(g_1 - 2\nu\mu_2) + \frac{\mu_3}{4}\,R^2. \qquad (29)$$

Если выбрать $\nu = g_1/(2\mu_2)$, то правая часть (29) совпадет с (11), (12) с точностью до постоянных.

Таким образом, совпадение структур полей перемещений и напряжений в случае рассмотренных в пп. **3, 4** видов взаимодействия полей a_{ij} и ε_{ij} обусловлено инвариантностью свободной энергии относительно калибровочных преобразований, порождаемых деформацией упругой сплошной среды.

5. Связь неевклидовых характеристик с параметрами дефектов. В качестве приложения полученные соотношения используются в задаче о равновесии дислокаций в цилиндре в условиях плоской деформации. Введем цилиндрические координаты r, φ, z таким образом, чтобы координата z совпала с осью симметрии полости — кругового цилиндра радиусом r_0. Компоненты $a_{rz} = a_{\varphi z} = a_{zz} = 0$. Тогда поле перемещений обладает радиальной симметрией, т. е. вектор $\boldsymbol{U} = (U(r), 0, 0)$ направлен по полярному радиусу. В силу регулярности решения задачи потребуем, чтобы поле смещений $U(r)$ обращалось в нуль на оси цилиндра: $U \to 0$ при $r \to 0$. Компоненты напряжений σ_{ij} на границе цилиндра $r = r_0$ удовлетворяют обычному силовому условию $\sigma_{rr}\big|_{r=r_0} = P$.

Покажем, что рассматриваемая в данной работе модель включает дефекты дислокационного типа. Отметим, что в условиях плоской деформации скалярная кривизна R является единственным инвариантом для тензора Риччи R_{ij}. Выберем внутренний метрический тензор в виде $g_{ij} = p_i^\alpha p_j^\alpha$, полагая, что при малых деформациях $p_i^\alpha = \delta_i^\alpha + \varphi_i^\alpha$ ($|\varphi_i^\alpha| \ll 1$). Из этого представления и из (7) следует формула для скалярной кривизны в линейном приближении

$$\frac{R}{2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial\varphi_2^2}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_1^2}{\partial x_2}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial\varphi_2^1}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_1^1}{\partial x_2}\Big). \qquad (30)$$

Используем представление для тензора плотности дислокаций $B^{i\alpha} = -\varepsilon^{ikj}(\partial p_j^\alpha/\partial x^k - \partial p_k^\alpha/\partial x^j)/2$ [10]. Тогда правая часть (30) определяется через компоненты этого тензора в виде $R = 2(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})_z$, если ввести вектор $\boldsymbol{B} = (B^1, B^2, 0) \equiv (B^{31}, B^{32}, 0)$. В цилиндрических координатах $\boldsymbol{B} = (0, B_\varphi(r), 0)$ и

$$\frac{R}{2} = \frac{1}{r}\,\frac{d(rB_\varphi)}{dr}. \qquad (31)$$

Формула (31) связывает неевклидову геометрическую характеристику с параметром дефектной структуры. В [1] отмечено, что дефекты, соответствующие таким характеристикам, являются дислокациями клиновидного типа.

Рассмотрим возможные параметризации для функции $B_\varphi(r)$ через ненулевое решение уравнения (26) для R. Для упрощения анализа исследуем случай $\Gamma < 0$ и построим решения, зависящие только от r и не содержащие сингулярностей при $r \to 0$. Запишем (26) в виде $(\Delta - \sqrt{-\Gamma}\,)(\Delta + \sqrt{-\Gamma}\,)R = 0$. Решение для R является линейной комбинацией функций $R_\pm$:

$$R = R_- + R_+, \qquad \Delta R_+ = \gamma R_+, \qquad \Delta R_- = -\gamma R_-, \qquad \gamma = \sqrt{-\Gamma}\,, \qquad (32)$$

что позволяет проинтегрировать (31):

$$B_\varphi = \pm \frac{1}{2\gamma}\,\frac{dR_\pm}{dr}. \tag{33}$$

Регулярные при $r \to 0$ решения R_+, R_- уравнений (32) определяются через цилиндрическую функцию I_0 мнимого аргумента и функцию Бесселя J_0 соответственно. Используя формулы, приведенные в пп. **2, 3**, получаем распределение для полей перемещений и напряжений:

$$\begin{gathered}
U = ar - D\,\frac{dR_\pm}{dr}, \qquad D = \frac{2\mu_3\alpha}{3g(1-\alpha)}, \\
\sigma_{rr} = P + 2\mu_1 D\Big(\frac{1}{r}\,\frac{dR_\pm}{dr} - \frac{1}{r_0}\,\frac{dR_\pm}{dr}\Big|_{r=r_0}\Big), \\
\sigma_{\varphi\varphi} = P - 2\mu_1 D\Big(\frac{1}{r}\,\frac{dR_\pm}{dr} \mp \gamma R_\pm + \frac{1}{r_0}\,\frac{dR_\pm}{dr}\Big|_{r=r_0}\Big).
\end{gathered} \tag{34}$$

Таким образом, в отсутствие внешних сил ($P = 0$) компоненты напряжений не равны нулю. С точки зрения физики это обусловлено наличием дефектов, определяемых с помощью скалярной кривизны согласно соотношению (33). При этом в условиях равновесия образец сохраняет свою форму. В данных условиях существуют дополнительные ограничения для значений напряжения σ_{rr} в различных точках образца.

Рассмотрим функцию $R_+ = c_+ I_0(r\sqrt{\gamma}\,)$. Пусть $\sigma_0 = \sigma_{rr}$ при $r \to 0$ и $\sigma_1 = \sigma_{rr}$ при $r = r_1 < r_0$, а $z_1 = r_1\sqrt{\gamma}$, $z_0 = r_0\sqrt{\gamma}$. Тогда из (34) следует соотношение

$$I_1(z_1) = z_1\Big(\frac{\sigma_1}{2\sigma_0} + \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0}\,\frac{I_1(z_0)}{z_0}\Big),$$

которое может быть рассмотрено как уравнение для нахождения корня z_1. Тем не менее решение z_1 существует не при всех значениях σ_0, σ_1. С помощью асимптотических формул для $I_0(z)$ нетрудно провести анализ в предельных случаях $z_0 \ll 1$, $z_1 \ll 1$ и $z_0 \gg 1$, $z_1 \ll 1$, что соответствует выбору модельного параметра γ. В результате имеем следующее ограничение на выбор σ_0, σ_1: $(\sigma_0 - \sigma_1)/\sigma_0 > 0$. Заметим, что такое же ограничение должно выполняться при рассмотрении решения для скалярной кривизны в виде $R_- = c_- J_0(r\sqrt{\gamma}\,)$.

Отметим, что классификация дефектов, соответствующих отдельным значениям тензора Римана, приведена в [14].

Заключение. Выполненный в рамках римановой модели сплошной среды анализ напряженно-деформированного состояния материала показывает, что изменения структуры кинематического поля и структуры внутренних напряжений зависят от скалярной кривизны. Для определения феноменологических постоянных наряду с условиями, которые обычно формулируются в классической теории упругости, необходимо задать дополнительные условия.

Для того чтобы учесть влияние других типов дефектов, необходимо использовать дополнительные геометрические характеристики, которые сопоставляются с этими дефектами. Таким образом, сделан переход к неевклидовой модели сплошной среды [6], которая имеет геометрическую структуру аффинно-метрического пространства. Для исследования напряженно-деформированного состояния материала на основе этой модели можно использовать подходы, реализованные для римановой модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. **Ландау Л. Д.** Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.
3. **Kondo K.** On the geometrical and physical foundations of the theory of yeilding // Proc. of the 2nd Japan nat. congress on appl. mech., Tokyo, Nov. 29 — Dec. 2, 1952. Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1953. V. 2. P. 41–47.
4. **Bilby B. A., Bullough R., Smith E.** Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Reimannian geometry // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. 231. P. 263–273.
5. **Гузев М. А., Мясников В. П.** Термомеханическая модель упругопластического материала с дефектами структуры // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 4. С. 156–172.
6. **Мясников В. П., Гузев М. А.** Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях // Физ. мезомеханика. 2000. Т. 3, № 1. С. 5–16.
7. **Мясников В. П., Гузев М. А.** Геометрическая модель внутренних самоуравновешенных напряжений в твердых телах // Докл. АН. 2001. Т. 380, № 5. С. 627–629.
8. **Киселев С. П.** Внутренние напряжения в твердом теле с дислокациями // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 131–136.
9. **Белай О. В., Киселев С. П.** Расчет полей внутренних напряжений для плоскодеформированного состояния упругого тела с дислокациями // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 6. С. 116–123.
10. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды / С. К. Годунов, Е. И. Роменский. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
11. **Дубровин Б. А.** Современная геометрия: Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. М.: Наука, 1986.
12. **Мясников В. П., Гузев М. А., Ушаков А. А.** Поля самоуравновешенных напряжений в сплошной среде // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 121–130.
13. **Ландау Л. Д.** Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988.
14. **Онами М.** Введение в микромеханику / М. Онами, С. Ивасимидзу, К. Гэнка и др. М.: Металлургия, 1987.

Поступила в редакцию 6/VII 2010 г.