

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕШЕТОК ПЛАСТИН ПРИ ИХ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Д. Н. Горелов

(Новосибирск)

Задача о гидродинамическом взаимодействии решеток профилей сложна и мало изучена. Имеющиеся публикации [1, 2] исследуют модель квазистационарного течения, в рамках которой течение жидкости в каждый момент времени предполагается стационарным, вихрей в потоке нет, а время играет роль параметра. В реальных условиях поле скоростей около движущихся решеток быстро меняется со временем. Это ставит под сомнение пригодность модели квазистационарного течения.

В данной работе предложена модель, учитывающая высокочастотные пульсации потока. Построено приближенное решение задачи, в котором интерференция между профилями определяется на основе предельного решения при бесконечно больших числах Струхала. Приведен пример расчета.

1. Рассмотрим обтекание двух решеток тонких профилей (пластин) идеальной несжимаемой жидкостью, имеющей в бесконечном удалении перед решетками скорость v_1 . Пусть вторая решетка движется вдоль фронта первой с постоянной скоростью u . Обозначим профили каждой решетки номерами $j = 0 \pm 1, \dots$. Введем декартовы инерциальные системы координат $Ox_r y_{rj}$, связанные с каждым j -м жестким профилем r -й решетки ($r = 1, 2$), выбирая начало координат в середине хорд профилей. Обозначим через h_r, c_r, β_r шаг, полухорду и угол выноса r -й решетки, d — осевой зазор между решетками, l_0 — расстояние между началами систем координат $Ox_{10}y_{10}$ и $Ox_{20}y_{20}$ в момент времени $t = 0$ (фиг. 1). Считаем, что геометрические параметры решеток удовлетворяют соотношению

$$(1.1) \quad h_1 N_1 = h_2 N_2 = L$$

где L — наименьшее расстояние, в котором укладывается целое число профилей первой и второй решеток, N_1, N_2 — натуральные числа. Тогда в случае жестких профилей течение жидкости меняется периодически по времени с периодом $T = L / u$ и по координатам с периодом L вдоль фронта решеток. Этот период сохраняется для случая колеблющихся профилей, если круговую частоту колебаний ω выбирать равной

$$(1.2) \quad \omega = T / (2n\pi), \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим, что течение жидкости вне профилей и вихревых следов потенциально, возмущения, вносимые в поток профилями, малы, а числа Струхала

$$(1.3) \quad k_r = \Omega_r c_r / V_r \gg 1, \quad r = 1, 2; \quad \Omega_r = 2\pi N_r / T$$

где V_1, V_2 — относительные скорости основного потока перед первой и второй решетками.

Для потенциала скорости $\phi(x, y, t)$ возмущенного движения жидкости около решеток вибрирующих профилей можно сформулировать следующую краевую задачу ($x = x_{10}, y = y_{10}$). Функция $\phi(x, y, t)$ вне профилей $|x_{rj}| \leq c_r, y_{rj} = \varepsilon_{rj}$ и вихревых следов L_{rj} ($r = 1, 2; j = 0, \pm 1, \dots$)

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(1.4) \quad \Delta \varphi = 0$$

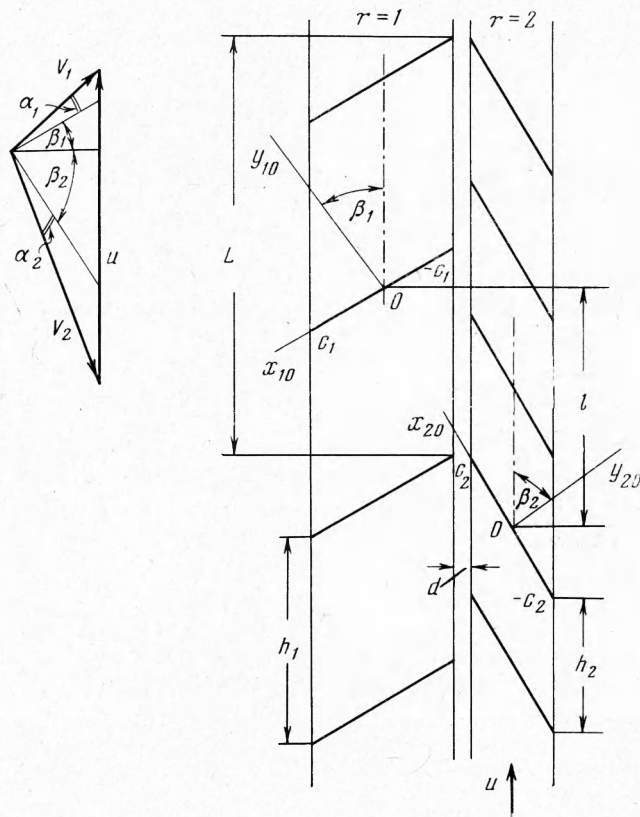
условию непротекания жидкости через профили

$$(1.5) \quad (\mathbf{v}_1 + \nabla \varphi) \cdot \mathbf{y}_{rj} = \partial \varepsilon_{rj} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{y}_{rj}) \delta_{r2} \quad \text{при} \quad y_{rj} = \varepsilon_{rj}, \\ |x_{rj}| \leq c_r$$

условию непрерывности давления на вихревых следах

$$(1.6) \quad [p] = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in L_{rj}$$

условиям затухания возмущенных скоростей в бесконечном удалении



Фиг. 1

перед решетками и периодичности течения по времени t и координатам x, y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \nabla \varphi = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(1.7) \quad \varphi(x, y, t) = \varphi(x, y, t + T), \quad \varphi(x, y, t) = \varphi(x - L \sin \beta_1, \\ y + L \cos \beta_1, t)$$

и постулату Жуковского в задних острых краях профилей.

Здесь y_{rj} — орт оси y_{rj} , ε_{rj} — нормальная составляющая деформации j -го профиля r -й решетки при его колебаниях, δ_{r2} — символ Кронекера, p — гидродинамическое давление. Контуры L_{rj} предполагаются мало отклоняющимися от прямых $y_{rj} = 0$, $x_{rj} < -c_r$.

Потенциал скорости φ определим методом интерференции [3] в виде

$$(1.8) \quad \varphi(x, y, t) = \sum_{n=1}^2 \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \varphi_{n\sigma}(x_{n\sigma}, y_{n\sigma}, t)$$

где $\varphi_{n\sigma}$ — потенциал скорости обтекания одиночного профиля с условием непротекания

$$(1.9) \quad \partial \varphi_{n\sigma} / \partial y_{n\sigma} = v_{n\sigma}(x_{n\sigma}, t) + u_{n\sigma}(x_{n\sigma}, t) \text{ при } y_{n\sigma} = \varepsilon_{n\sigma}, |x_{n\sigma}| \leq c_n$$

Здесь $v_{n\sigma}$ — заданная нормальная составляющая скорости профиля

$$(1.10) \quad v_{n\sigma} = \partial \varepsilon_{n\sigma} / \partial t + (\delta_{n2} \mathbf{u} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{y}_{n\sigma}$$

а $u_{n\sigma}$ — искомая функция, которая вводится для выполнения условий (1.5) на всех профилях.

В соответствии с условиями периодичности

$$(1.11) \quad v_{n\sigma} = v_{n,\sigma+N_n}, \quad u_{n\sigma} = u_{n,\sigma+N_n}, \quad n = 1, 2$$

Представим функции $v_{n\sigma}$, $u_{n\sigma}$ в виде

$$(1.12) \quad v_{n\sigma} = 1/2 q_0^{(n\sigma)} + \sum_{m=1}^{\infty} q_m^{(n\sigma)} \cos m \eta_{n\sigma},$$

$$u_{n\sigma} = 1/2 \delta_0^{(n\sigma)} + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m^{(n\sigma)} \cos m \eta_{n\sigma}$$

где $\eta_{n\sigma} = \arccos(x_{n\sigma}/c_n)$, $q_m^{(n\sigma)}$ — известные, а $\delta_m^{(n\sigma)}$ — искомые коэффициенты. Подставляя (1.8) в (1.5) и учитывая (1.9) — (1.12), для определения коэффициентов $\delta_m^{(n\sigma)}$ получим систему $(N_1 + N_2)$ линейных уравнений

$$(1.13) \quad 1/2 \delta_0^{(rj)} + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m^{(rj)} \cos m \eta_{rj} + \sum_{\substack{\lambda=-\infty \\ (\lambda \neq 0)}}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{N_r} \frac{\partial \varphi_{r\sigma}}{\partial y_{rj}} + \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{N_n} \frac{\partial \varphi_{n\sigma}}{\partial y_{rj}} = 0$$

при $y_{rj} = \varepsilon_{rj}$, $|x_{rj}| \leq c_r$; $n, r = 1, 2$; $n \neq r$; $j = 1, \dots, N_r$; $\sigma = \lambda N_r + \kappa$, $p = \lambda N_n + \kappa$.

Здесь координаты x_{rj} , y_{rj} связаны с координатами $x_{r\sigma}$, $y_{r\sigma}$ и x_{np} , y_{np} соотношениями

$$(1.14) \quad x_{r\sigma} = x_{rj} + (\sigma - j) h_r \sin \beta_r, \quad y_{r\sigma} = y_{rj} - (\sigma - j) h_r \times$$

$$\times \cos \beta_r \text{ для } n = r$$

$$x_{n\sigma} = x_{n0} + \sigma h_n \sin \beta_n, \quad y_{n\sigma} = y_{n0} - \sigma h_n \cos \beta_n \text{ для } n \neq r$$

$$(1.15) \quad x_{n0} = x_{r0} \cos(\beta_n - \beta_r) + \text{sign}(n - r) [y_{r0} \sin(\beta_n - \beta_r) -$$

$$- l \sin \beta_n + h \cos \beta_n]$$

$$y_{n0} = y_{r0} \cos(\beta_n - \beta_r) + \text{sign}(n - r) [-x_{r0} \sin(\beta_n - \beta_r) +$$

$$+ l \cos \beta_n + h \sin \beta_n]$$

где x_{r0} , y_{r0} вычисляются по (1.14), а

$$l = l_0 + ut, \quad h = c_1 \cos \beta_1 + c_2 \cos \beta_2 + d$$

Представим потенциал скорости $\varphi_{n\sigma}$ в виде

$$(1.16) \quad \varphi_{n\sigma}(x_{n\sigma}, y_{n\sigma}, t) = \varphi_{n\sigma}^{(0)}(x_{n\sigma}, y_{n\sigma}) + \varphi_{n\sigma}^{(1)}(x_{n\sigma}, y_{n\sigma}, t)$$

где $\varphi_{n\sigma}^{(0)}$, $\varphi_{n\sigma}^{(1)}$ — стационарная и нестационарная части $\varphi_{n\sigma}$. В качестве $\varphi_{n\sigma}^{(0)}$ можно взять среднее за период T значение функции $\varphi_{n\sigma} = \varphi_{n\sigma}^*$, получаемое при решении задачи (1.4) — (1.7) в квазистационарной постановке. Тогда

$$(1.17) \quad \varphi_{n\sigma}^{(0)}(x_{n\sigma}, y_{n\sigma}) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_{n\sigma}^*(x_{n\sigma}, y_{n\sigma}, t) dt$$

Функция $\varphi_{n\sigma}^*$ определяется выражениями

$$(1.18) \quad \varphi_{n\sigma}^* = \Phi_{n\sigma}^{(0)}(x_{n\sigma}, y_{n\sigma}, t) + \int_{y_{n\sigma}}^{x_{n\sigma}} \frac{\partial}{\partial y_{n\sigma}} g_{n\sigma}(x, y_{n\sigma}) dx$$

$$(1.19) \quad \Phi_{n\sigma}^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} [q_{m-1}^{(n\sigma)} - q_{m+1}^{(n\sigma)} + r_{m-1}^{(n\sigma)} - r_{m+1}^{(n\sigma)}] \operatorname{Im} \{z_{n\sigma} - \sqrt{z_{n\sigma}^2 - 1}\}$$

$$(1.20) \quad g_{n\sigma} = -1/2 [q_0^{(n\sigma)} - q_1^{(n\sigma)} + r_0^{(n\sigma)} - r_1^{(n\sigma)}] \operatorname{Re} \{\ln [z_{n\sigma} - \sqrt{z_{n\sigma}^2 - 1}]\}$$

Здесь $\Phi_{n\sigma}^{(0)}$ — потенциал скорости бесциркуляционного обтекания соответствующего профиля, функция $g_{n\sigma}$ определяет дополнительное квазистационарное течение, обусловленное выполнением постулата Жуковского в задней кромке того же профиля, $z_{n\sigma} = x_{n\sigma} + iy_{n\sigma}$, коэффициенты $r_m^{(n\sigma)}$ являются коэффициентами Фурье для функции $u_{n\sigma}^*$, учитывающей интерференцию других профилей. Величины $r_m^{(n\sigma)}$ определяются как решение системы (1.13), в которой $\delta_m^{(n\sigma)} = r_m^{(n\sigma)}$, $\varphi_{n\sigma} = \varphi_{n\sigma}^*$.

Потенциал скорости $\varphi_{n\sigma}^{(1)}$ дополнительного нестационарного течения должен удовлетворять в соответствии с (1.9), (1.12), (1.16) — (1.20) условию непротекания

$$(1.21) \quad \frac{\partial \varphi_{n\sigma}^{(1)}}{\partial y_{n\sigma}} = \frac{1}{2} [\theta_0^{(n\sigma)} + \delta_0^{(n\sigma)}] + \sum_{m=1}^{\infty} [\theta_m^{(n\sigma)} + \delta_m^{(n\sigma)}] \cos m\eta_{n\sigma}$$

при $y_{n\sigma} = \varepsilon_{n\sigma}, \quad |x_{n\sigma}| \leq c_n$

где $\delta_m^{(n\sigma)}$ — искомые коэффициенты

$$(1.22) \quad \theta_m^{(n\sigma)} = q_m^{(n\sigma)} + r_m^{(n\sigma)} - \frac{1}{T} \int_0^T [q_m^{(n\sigma)} + r_m^{(n\sigma)}] dt$$

Коэффициенты $\delta_m^{(n\sigma)}$ определяем как решение системы (1.13) при $\varphi_{n\sigma} = \varphi_{n\sigma}^{(1)}$. Функции $\varphi_{n\sigma}^{(1)}$ полагаются равными потенциалу скорости бесциркуляционного обтекания профиля $\Phi_{n\sigma}^{(0)}$. Это приближение основано на предположении (1.3) и том факте, что в предельном случае бесконечно больших значений числа Струхала гидродинамическое влияние других профилей решетки на рассматриваемый определяется только бес-

циркуляционной частью течения жидкости [3]. В принятом приближении наличие вихревых следов учитывается только в задаче обтекания каждого одиночного профиля, а взаимодействие профилей (решеток) рассматривается без учета следов. Система уравнений (1.13) решается методом коллокаций.

2. Гидродинамическое давление p_{kj} в точках j -го профиля k -й решетки определяется интегралом Коши — Лагранжа

$$(2.1) \quad p_{kj} - p_0 = -\rho (\partial \varphi / \partial t - V_k \partial \varphi / \partial x), \quad |x_{kj}| \leq c_k, \quad y_{kj} = \pm 0, \quad p_0 = \text{const}$$

Подъемная сила Y_{kj} и момент M_{kj} — формулами

$$(2.2) \quad Y_{kj} = \int_{-c_k}^{c_k} [p_{kj}(x, -0, t) - p_{kj}(x, +0, t)] dx$$

$$M_{kj} = \int_{-c_k}^{c_k} x [p_{kj}(x, -0, t) - p_{kj}(x, +0, t)] dt$$

Здесь ρ — плотность, а M_{kj} — момент относительно середины профиля. В точках рассматриваемого профиля терпит разрыв только потенциал скорости φ_{kj} . Поэтому (2.2) с учетом (1.16) — (1.21) можно записать в виде

$$(2.3) \quad Y_{kj} = -\pi \rho V_k c_k \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [q_0^{(kj)} - q_1^{(kj)} + r_0^{(kj)} - r_1^{(kj)}] dt + \right.$$

$$+ 1/2 [\theta_0^{(kj)} - \theta_1^{(kj)} + \delta_0^{(kj)} - \delta_1^{(kj)}] +$$

$$+ (c_k / 4V_k) (\partial / \partial t) [\theta_0^{(kj)} - \theta_2^{(kj)} + \delta_0^{(kj)} - \delta_2^{(kj)}] \}$$

$$(2.4) \quad M_{kj} = -\frac{\pi}{2} \rho V_k c_k^2 \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [q_0^{(kj)} - q_2^{(kj)} + r_0^{(kj)} - r_2^{(kj)}] dt + \right.$$

$$+ 1/2 [\theta_0^{(kj)} + \theta_1^{(kj)} + \delta_0^{(kj)} + \delta_1^{(kj)} - 2(\theta_2^{(kj)} + \delta_2^{(kj)})] +$$

$$+ (c_k / 4V_k) (\partial / \partial t) [\theta_1^{(kj)} - \theta_3^{(kj)} + \delta_1^{(kj)} - \delta_3^{(kj)}] \}$$

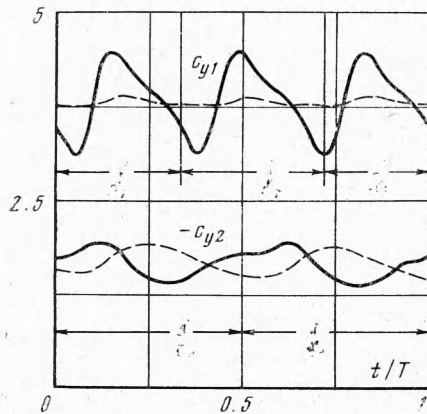
В качестве примера на фиг. 2, 3 приведены результаты расчета гидродинамического взаимодействия двух решеток, изображенных на фиг. 1, с параметрами

$$\tau_1 = 0.8, \quad \tau_2 = 1.2 \quad (\tau_k = b_k / h_k, \quad b_k = 2c_k), \quad c_1 / c_2 = 1,$$

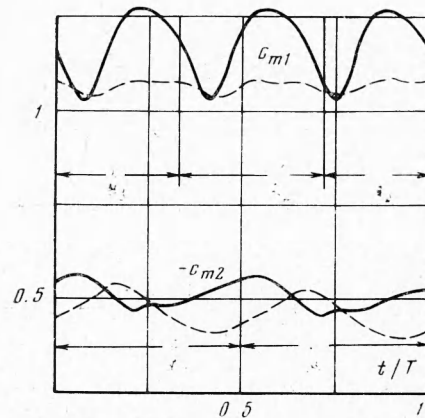
$$l_0 = 2c_1, \quad d = 0.2c_1, \quad \beta_1 = 30^\circ, \quad \beta_2 = -60^\circ, \quad \alpha_1 = -\alpha_2 = 0.2$$

Здесь под α_k понимается угол между вектором скорости V_k и хордой профилей k -й решетки. В (1.12) было учтено шесть членов ряда Фурье, что позволило свести (1.13) к системе 30 алгебраических уравнений. Шаг по времени выбирался равным $\Delta t = T / 20$. Результаты расчета представлены в виде зависимости аэродинамических коэффициентов подъемной силы $C_{y_k} = Y_{k0} / (1/2 \rho V_k^2 b_k)$ и момента $C_{m_k} = M_{k0} / (1/2 \rho V_k^2 b_k^2)$ от t для исходных профилей первой и второй решеток. Пунктир соответствует расчету по гипотезе квазистационарности, а сплошные кривые — по (2.3), (2.4). Стрелками на фиг. 2, 3 указаны интервалы равные T/N_2 (вверху) и T/N_1 (внизу).

В случае взаимодействия двух решеток гидродинамические реакции на первой решетке меняются по времени периодически с периодом T / N_2 , на второй решетке — с периодом T / N_1 [2]. Результаты расчета подчиняются этому закону, хотя в алгоритме была предусмотрена периодичность течения лишь с общим периодом T . Это обстоятельство является одним из критериев оценки точности расчета. Построенный алгоритм может быть



Фиг. 2



Фиг. 3

обобщен на случай гидродинамического взаимодействия нескольких решеток. В частности, программа, с помощью которой проводился расчет на ЭЦВМ, составлена для трех решеток.

Поступила 20 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлович Г. С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М., «Наука», 1969.
2. Сарен В. Э. О гидродинамическом взаимодействии решеток профилей в потенциальном потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
3. Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск, «Наука», 1971.