$\mathcal{AMS}$ subject classification: 49J20, 65N30

Новые апостериорные оценки ошибки для задач оптимального управления, описываемых параболическими интегро-дифференциальными уравнениями*

Х. Чен, Т. Хоу

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin 132013, Jilin, China

E-mails: 274944166@qq.com (Чен Х.), 270854140@qq.com (Хоу Т.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 17, 2024.

Чен Х., Хоу Т. Новые апостериорные оценки ошибки для задач оптимального управления, описываемых параболическими интегро-дифференциальными уравнениями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 1. — С. 83–95.

В данной статье мы даем новый апостериорный анализ ошибок для линейной конечно-элементной аппроксимации параболической интегро-дифференциальной задачи оптимального управления. Состояние и сопряженное состояние аппроксимируются кусочно-линейными функциями, тогда как переменная управления дискретизируется с использованием метода вариационной дискретизации. Сначала мы определяем эллиптические реконструкции численных решений, а затем обсуждаем апостериорные оценки ошибок для всех переменных.

DOI: 10.15372/SJNM20240107
EDN: DHHTVO

Ключевые слова: *параболические интегро-дифференциальные уравнения, конечные элементы, эллиптическая реконструкция, апостериорные оценки ошибки.*

Chen H., Hou T. New a posteriori error estimates for optimal control problems governed by parabolic integro-differential equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 1. — P. 83–95.

In this paper, we provide a new a posteriori error analysis for a linear finite element approximation of a parabolic integro-differential optimal control problem. The state and co-state are approximated by piecewise linear functions, while the control variable is discretized by a variational discretization method. We first define elliptic reconstructions of numerical solutions and then discuss a posteriori error estimates for all variables.

Keywords: *parabolic integro-differential equations, finite element, elliptic reconstruction, a posteriori error estimates.*

1. Введение

Хорошо известно, что метод конечных элементов широко используется для решения задач оптимального управления, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП). Невозможно дать здесь даже очень краткий обзор.

*Работа выполнена при поддержке Программы научно-технического развития провинции Цзилинь (проект № 20230101279JC).

Систематическое использование методов конечных элементов для ДУЧП и задач оптимального управления можно найти в [3, 18]. Априорные оценки ошибок и сверхсходимость конечно-элементной аппроксимации были установлены для задач оптимального управления, описываемых линейными эллиптическими и параболическими уравнениями состояния, например в [5–8, 10, 13, 19]. Что касается апостериорных оценок ошибок, на основе которых могут быть построены адаптивные методы конечных элементов, см. [2, 12, 14, 16, 17].

В последние годы многие ученые начали разрабатывать высокоэффективные численные алгоритмы для задач оптимального управления, описываемых эллиптическими интегральными уравнениями и параболическими интегро-дифференциальными уравнениями. Эти задачи управления обычно возникают во многих практических применениях, таких как управление теплопроводностью материалов с памятью, управление динамикой населения, управление волнами. В [1] Бруннер и Ян проанализировали методы конечных элементов для задач оптимального управления, описываемых интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями. Шен с соавторами [22] рассмотрели конечно-элементную аппроксимацию параболических интегро-дифференциальных задач оптимального управления и получили эквивалентные апостериорные оценки ошибок с нижними и верхними границами. В [4] Чен и Хоу получили априорные и апостериорные оценки ошибок смешанных H^1-методов конечных элементов Галеркина для задач оптимального управления, описываемых псевдогиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями.

В [20] Макридакис и Ночетто ввели оператор эллиптической реконструкции, играющий в апостериорных оценках роль, подобную той роли, которую играет эллиптическая проекция для восстановления оптимальных априорных оценок ошибок для параболических задач. Тан и Хуа [23] использовали метод эллиптической реконструкции для анализа апостериорных оценок ошибок конечно-элементных дискретизаций задач оптимального управления, описываемых параболическими уравнениями с интегральными ограничениями. Чен и Линь [9] дали определение смешанной эллиптической реконструкции и получили апостериорные оценки ошибок полудискретной смешанной конечно-элементной аппроксимации параболических задач оптимального управления. Однако, насколько нам известно, метод эллиптической реконструкции не применялся к апостериорному оцениванию ошибок параболических интегрально-дифференциальных задач оптимального управления.

В этой статье мы используем стандартные конечные элементы для решения задачи оптимального управления, описываемой линейными параболическими интегро-дифференциальными уравнениями. Состояние и сопряженное состояние аппроксимируются кусочно-линейными и непрерывными функциями, тогда как дискретизированное управление получается методом вариационной дискретизации. Мы определяем эллиптические реконструкции для дискретизированных переменных состояния и сопряженного состояния, а затем получаем апостериорные оценки ошибок остаточного типа для всех переменных. Нас интересует следующая задача оптимального управления:

$$\min_{u\in K\subset U}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T(\|y-y_d\|^2+\|u\|^2)\,dt\right\}, \tag{1.1}$$

$$y_t-\operatorname{div}(A\nabla y)+\int_0^t\operatorname{div}(B(t,s)\nabla y(s))\,ds=f+u\quad\forall\,x\in\Omega,\quad t\in J, \tag{1.2}$$

$$y(x,t)=0\quad\forall\,x\in\partial\Omega,\quad t\in J, \tag{1.3}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{1.4}$$

где Ω — выпуклая многоугольная область в $\mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$ и $J = (0, T]$. Пусть K — замкнутое выпуклое множество в $U = L^2(J; L^2(\Omega))$, $f \in L^2(J; L^2(\Omega))$, $y_d \in H^1(J; L^2(\Omega))$ и $y_0 \in H^1(\Omega)$. Предположим, что матрица коэффициентов $A = A(x) = (a_{ij}(x))_{2\times 2} \in W^{1,\infty}(\bar{\Omega}; \mathbf{R}^{2\times 2})$ — симметрическая 2×2-матрица и имеются постоянные $c_1, c_2 > 0$, удовлетворяющие $c_1\|\mathbf{X}\|^2_{\mathbf{R}^2} \le \mathbf{X}^t A\mathbf{X} \le c_2\|\mathbf{X}\|^2_{\mathbf{R}^2}$ для любого вектора $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2$. Кроме того, $B(t,s) = B(x,t,s) = (b_{ij}(x,t,s))_{2\times 2}$ — также 2×2-матрица. Предположим, что существует положительная постоянная M такая, что

$$|b_{ij}| + \left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_2}\right| + \left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial b_{ij}}{\partial s}\right| \le M, \quad i,j = 1,2.$$

Здесь K — допустимое множество переменной управления, определяемое как

$$K = \{u \in U : u(x,t) \ge 0\}.$$

Мы используем стандартное обозначение $W^{m,p}(\Omega)$ для пространств Соболева на Ω с нормой $\|\cdot\|_{m,p}$, задаваемой путем $\|v\|^p_{m,p} = \sum_{|\alpha|\le m}\|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}$, полунормой $|\cdot|_{m,p}$, задаваемой путем $|v|^p_{m,p} = \sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}$. Положим $W^{m,p}_0(\Omega) = \{v \in W^{m,p}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Для $p = 2$ обозначим: $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H^m_0(\Omega) = W^{m,2}_0(\Omega)$, $\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,2}$.

Пусть $L^s(J; W^{m,p}(\Omega))$ — банахово пространство всех L^s-интегрируемых функций из J в $W^{m,p}(\Omega)$ с нормой $\|v\|_{L^s(J;W^{m,p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|v\|^s_{W^{m,p}(\Omega)}dt\right)^{\frac{1}{s}}$ для $s \in [1,\infty)$ и стандартной модификацией для $s = \infty$. Для простоты используется обозначение $\|v\|_{L^s(W^{m,p})}$ вместо $\|v\|_{L^s(J;W^{m,p}(\Omega))}$. Кроме того C — общая положительная постоянная, не зависящая от размера пространственного шага h.

Статья построена следующим образом. В пункте 2 мы представляем полудискретизированную конечно-элементную аппроксимацию задачи оптимального управления (1.1)–(1.4) и ее эквивалентные условия оптимальности. В п. 3 мы определяем эллиптические реконструкции численных решений и получаем апостериорные оценки ошибок между эллиптическими реконструкциями и численными решениями. В п. 4 мы обсуждаем апостериорные оценки ошибок для всех переменных. В последнем пункте мы даем заключение и описываем некоторые будущие работы.

2. Конечно-элементная аппроксимация

В данном пункте представлена конечно-элементная аппроксимация задачи оптимального управления (1.1)–(1.4).

Возьмем пространство для состояния $Q = H^1(V)$ и $V = H^1_0(\Omega)$. Затем представим (1.1)–(1.4) в следующей слабой форме: найти $(y,u) \in Q \times K$ такое, что

$$\min_{u\in K\subset U}\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \left(\|y - y_d\|^2 + \|u\|^2\right) dt\right\}, \tag{2.1}$$

$$(y_t, v) + (A\nabla y, \nabla v) = \int_0^t (B(t,s)\nabla y(s), \nabla v)\, ds + (f + u, v) \quad \forall\, v \in V, \tag{2.2}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{2.3}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение $L^2(\Omega)$ или $(L^2(\Omega))^2$.

Отсюда следует (см., например, [18]), что задача оптимального управления (2.1)–(2.3) имеет единственное решение (y, u), а пара (y, u) является решением (2.1)–(2.3), если и только если имеется сопряженное состояние $p \in Q$ такое, что (y, p, u) удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$(y_t, v) + (A\nabla y, \nabla v) = \int_0^t (B(t,s)\nabla y(s), \nabla v)\, ds + (f + u, v) \quad \forall\, v \in V, \tag{2.4}$$

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{2.5}$$

$$-(p_t, q) + (A\nabla p, \nabla q) = \int_t^T (B^*(s,t)\nabla p(s), \nabla q)\, ds + (y - y_d, q) \quad \forall\, q \in V, \tag{2.6}$$

$$p(x, T) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{2.7}$$

$$\int_0^T (u + p, \tilde{u} - u)\, dt \ge 0 \quad \forall\, \tilde{u} \in K, \tag{2.8}$$

где $B^*(s,t)$ — транспонирование $B(s,t)$.

Пусть $\mathcal{T}_h$ — регулярная триангуляция многоугольной области Ω, h_τ — диаметр элемента τ, $h = \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau$. Пусть $V_h \subset V$ определяется следующим конечно-элементным пространством:

$$V_h = \Big\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \bigcap V \,\big|\, v_h \in P_1(\tau) \quad \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h \Big\}.$$

Тогда полностью дискретная схема аппроксимации состоит в том, чтобы найти $(y_h, u_h) \in H^1(V_h) \times K$ такое, что

$$\min_{u_h \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (\|y_h - y_d\|^2 + \|u_h\|)^2 dt \right\}, \tag{2.9}$$

$$(y_{ht}, v_h) + (A\nabla y_h, \nabla v_h) = \int_0^t (B(t,s)\nabla y_h(s), \nabla v_h)\, ds + (f + u_h, v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h, \tag{2.10}$$

$$y_h(x, 0) = y_0^h(x) \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{2.11}$$

где $y_0^h(x) \in V_h$ является аппроксимацией y_0.

Снова мы видим, что задача (2.9)–(2.11) имеет единственное решение (y_h, u_h), а пара (y_h, u_h) является решением (2.9)–(2.11), если и только если имеется сопряженное состояние $p_h \in Q$ такое, что (y_h, p_h, u_h) удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$(y_{ht}, v_h) + (A\nabla y_h, \nabla v_h) = \int_0^t (B(t,s)\nabla y_h(s), \nabla v_h)\, ds + (f + u_h, v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h, \tag{2.12}$$

$$y_h(x, 0) = R_h y_0(x) \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.13}$$

$$-(p_{ht}, q) + (A\nabla p_h, \nabla q_h) = \int_t^T (B^*(s,t)\nabla p_h(s), \nabla q_h)\, ds + (y_h - y_d, q_h) \quad \forall\, q_h \in V_h, \tag{2.14}$$

$$p_h(x, T) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{2.15}$$

$$\int_0^T (u_h + p_h, \tilde{u} - u_h)\, dt \ge 0 \quad \forall\, \tilde{u} \in K. \tag{2.16}$$

3. Эллиптическая реконструкция и соответствующие результаты

В этом пункте мы сначала определяем эллиптические реконструкции и представляем апостериорные оценки ошибок между эллиптической реконструкцией и численным решением.

Введем эллиптические реконструкции $\tilde{y}(t) \in V \cap H^2(\Omega)$ и $\tilde{p}(t) \in V \cap H^2(\Omega)$ для y_h и p_h соответственно, $t \in [0, T]$. Пусть эллиптические реконструкции $\tilde{y}(t)$ и $\tilde{p}(t)$ удовлетворяют

$$\begin{aligned}(A\nabla(\tilde{y} - y_h), \nabla v) &- \int_0^t (B(t,s)\nabla(\tilde{y}(s) - y_h(s)), \nabla v)\, ds \\ &= \int_0^t (B(t,s)\nabla y_h(s), \nabla v) ds - (A\nabla y_h, \nabla v) + (f + u_h - y_{ht}, v) \quad \forall\, v \in V,\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}(A\nabla(\tilde{p} - p_h), \nabla q) &- \int_t^T (B^*(s,t)\nabla(\tilde{p}(s) - p_h(s)), \nabla q)\, ds \\ &= \int_t^T (B^*(s,t)\nabla p_h(s), \nabla q)\, ds - (A\nabla p_h, \nabla q) + (y_h - y_d + p_{ht}, q) \quad \forall\, q \in V.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Что касается существования и единственности эллиптических реконструкций $\tilde{y}(t)$ и $\tilde{p}(t)$, см. ссылку [21].

Взяв производные (3.1), (3.2) по времени, получим

$$\begin{aligned}(A\nabla(\tilde{y} - y_h)_t, \nabla v) &- \int_0^t (B_t(t,s)\nabla(\tilde{y}(s) - y_h(s)), \nabla v)\, ds - (B(t,t)\nabla(\tilde{y} - y_h), \nabla v) \\ &= \int_0^t (B_t(t,s)\nabla y_h(s), \nabla v)\, ds + (B(t,t)\nabla y_h, \nabla v) - (A\nabla y_{ht}, \nabla v) + \\ &\quad (f_t + u_{ht} - y_{htt}, v) \quad \forall\, v \in V,\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}(A\nabla(\tilde{p} - p_h)_t, \nabla q) &- \int_t^T (B_t^*(s,t)\nabla(\tilde{p}(s) - p_h(s)), \nabla q)\, ds + (B^*(t,t)\nabla(\tilde{p} - p_h), \nabla q) \\ &= \int_t^T (B_t^*(s,t)\nabla p_h(s), \nabla q)\, ds - (B^*(t,t)\nabla p_h, \nabla q) - (A\nabla p_{ht}, \nabla q) + \\ &\quad (y_{ht} - y_{dt} + p_{htt}, q) \quad \forall\, q \in V.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Легко увидеть, что

$$(A\nabla(\tilde{y} - y_h), \nabla v_h) - \int_0^t (B(t,s)\nabla(\tilde{y}(s) - y_h(s)), \nabla v_h)\, ds = 0 \quad \forall\, v_h \in V_h, \tag{3.5}$$

$$(A\nabla(\tilde{p} - p_h), \nabla q_h) - \int_t^T (B^*(s,t)\nabla(\tilde{p}(s) - p_h(s)), \nabla q_h)\, ds = 0 \quad \forall\, q_h \in V_h, \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}(A\nabla(\tilde{y} - y_h)_t, \nabla v_h) &- \int_0^t (B_t(t,s)\nabla(\tilde{y}(s) - y_h(s)), \nabla v_h)\, ds - \\ &(B(t,t)\nabla(\tilde{y} - y_h), \nabla v_h) = 0 \quad \forall\, v_h \in V_h,\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}(A\nabla(\tilde{p} - p_h)_t, \nabla q_h) &- \int_t^T (B_t^*(s,t)\nabla(\tilde{p}(s) - p_h(s)), \nabla q_h)\, ds + \\ &(B^*(t,t)\nabla(\tilde{p} - p_h), \nabla q_h) = 0 \quad \forall\, q_h \in V_h.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Для получения нашего основного результата нам нужны следующие леммы:

Лемма 3.1 [3]. *Пусть π_h — стандартный интерполяционный оператор Лагранжа. Для $m = 0$ или 1 и $q > 1/2$*

$$|v - \pi_h v|_{m,q} \leq Ch^{2-m}|v|_{2,q}.$$

Лемма 3.2 [15]. *Для $v \in W^{1,q}(\Omega)$ и $1 \leq q < \infty$*

$$\|v\|_{W^{0,q}(\partial\tau)} \leq C\left(h_\tau^{-\frac{1}{q}}\|v\|_{W^{0,q}(\tau)} + h_\tau^{l-\frac{1}{q}}|v|_{W^{1,q}(\tau)}\right).$$

Лемма 3.3 [11]. *Предположим, что Ω является выпуклой. Тогда для каждой функции $F \in L^2(\Omega)$ решение ϕ для*

$$-\mathrm{div}(A\nabla\phi) = F \quad \text{в } \Omega,\ \phi\,|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.9}$$

принадлежит $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Кроме того, существует положительная постоянная C_1 такая, что

$$\|\phi\|_2 \leq C_1\|F\|. \tag{3.10}$$

Теперь мы можем получить следующие апостериорные оценки ошибок между эллиптической реконструкцией $(\tilde{y}(t), \tilde{p}(t))$ и численным решением (y_h, p_h).

Лемма 3.4. *Пусть $(\tilde{y}, \tilde{p})$ и (y_h, y_h) удовлетворяют* (3.1), (3.2). *Тогда мы имеем*

$$\|\tilde{y} - y_h\|^2 + \|\tilde{p} - p_h\|^2 \leq C(\eta_1^2 + \eta_2^2), \tag{3.11}$$

где

$$\eta_1^2 = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^4 \left\|\mathrm{div}(A\nabla y_h) - \int_0^t \mathrm{div}(B(t,s)\nabla y_h(s))\,ds + f + u_h - y_{ht}\right\|_{L^2(\tau)}^2 +$$
$$\sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h}\int_l h_l^3[A\nabla y_h\cdot\mathbf{n}]^2 + \sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h}\int_l h_l^3\left[\int_0^t B(t,s)\nabla y_h(s)\,ds\cdot\mathbf{n}\right]^2,$$
$$\eta_2^2 = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^4 \left\|\mathrm{div}(A\nabla p_h) - \int_t^T \mathrm{div}(B^*(s,t)\nabla p_h(s))\,ds + y_h - y_d + p_{ht}\right\|_{L^2(\tau)}^2 +$$
$$\sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h}\int_l h_l^3[A\nabla p_h\cdot\mathbf{n}]^2 + \sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h}\int_l h_l^3\left[\int_t^T B^*(s,t)\nabla p_h(s)\,ds\cdot\mathbf{n}\right]^2,$$

здесь l — грань элемента τ, $[A\nabla y_h\cdot\mathbf{n}]\,|_l$ — скачки нормальной производной через внутреннюю грань l, определяемые как

$$[A\nabla y_h\cdot\mathbf{n}]\,|_l = (A\nabla y_h\,|_{\tau_l^1} - A\nabla y_h\,|_{\tau_l^2})\cdot\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали на $l = \tau_l^1 \cap \tau_l^2$ наружу τ_l^1, h_l — максимальный диаметр грани l. Другие нормальные производные могут быть определены аналогичным образом.

Доказательство. Пусть ϕ — решение (3.9) при $F = \tilde{y} - y_h$, $\phi_I = \pi_h \phi$ — стандартная интерполяция Лагранжа для ϕ. Пусть δ — произвольная положительная постоянная. Мы можем получить

$$\begin{aligned}
\|\tilde{y} - y_h\|^2 &= (\tilde{y} - y_h, F) = (A\nabla(\tilde{y} - y_h), \nabla\phi) \\
&= \big(A\nabla(\tilde{y} - y_h), \nabla(\phi - \phi_I)\big) + \int_0^t \big(B(t,s)\nabla(\tilde{y}(s) - y_h(s)), \nabla\phi_I\big)\, ds \\
&= \big(A\nabla(\tilde{y} - y_h), \nabla(\phi - \phi_I)\big) + \int_0^t \big(B(t,s)\nabla(\tilde{y}(s) - y_h(s)), \nabla(\phi_I - \phi)\big)\, ds + \\
&\quad \int_0^t \big(B(t,s)\nabla(\tilde{y}(s) - y_h(s)), \nabla\phi\big)\, ds \\
&= \int_0^t \big(B(t,s)\nabla y_h(s), \nabla(\phi - \phi_I)\big)\, ds - \big(A\nabla y_h, \nabla(\phi - \phi_I)\big) + (f + u_h - y_{ht}, \phi - \phi_I) + \\
&\quad \int_0^t \big(B(t,s)\nabla(\tilde{y}(s) - y_h(s)), \nabla\phi\big)\, ds \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \int_\tau \left(\operatorname{div}(A\nabla y_h) - \int_0^t \operatorname{div}(B(t,s)\nabla y_h(s))\, ds + f + u_h - y_{ht}\right)(\phi - \phi_I) + \\
&\quad \sum_{l \in \partial\mathcal{T}_h} \int_l \left[\int_0^t B(t,s)\nabla y_h(s)\, ds \cdot \mathbf{n} - A\nabla y_h \cdot \mathbf{n}\right](\phi - \phi_I) - \\
&\quad \int_0^t \big(\tilde{y}(s) - y_h(s), \operatorname{div}(B^*(t,s)\nabla\phi)\big)\, ds \\
&\le \frac{C}{\delta}\eta_1^2 + \frac{C}{\delta}\int_0^t \|\tilde{y}(s) - y_h(s)\|^2 ds + \delta\|\phi\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь мы использовали (3.1), (3.5), (3.9), формулу Грина, неравенство Коши и леммы 3.1 и 3.2.

Полагая $\delta = \frac{1}{2C_1^2}$ и используя (3.10) в (3.12), можно легко получить

$$\|\tilde{y} - y_h\|^2 \le 4CC_1\eta_1^2 + 4CC_1 \int_0^t \|\tilde{y}(s) - y_h(s)\|^2 ds,$$

что, вместе с неравенством Гроноулла, позволяет получить

$$\|\tilde{y} - y_h\|^2 \le C\eta_1^2.$$

Аналогичным образом мы имеем

$$\|\tilde{p} - p_h\|^2 \le C\eta_2^2,$$

что завершает доказательство леммы. □

Лемма 3.5. *Пусть* $(\tilde{y}, \tilde{p})$ *и* (y_h, y_h) *удовлетворяют* (3.1), (3.2). *Тогда*

$$\|(\tilde{y} - y_h)_t\|^2 + \|(\tilde{p} - p_h)_t\|^2 \le C\sum_{i=1}^4 \eta_i^2 + C\int_0^t \eta_1^2(s)\, ds + C\int_t^T \eta_2^2(s)\, ds, \tag{3.13}$$

где η_1 *и* η_2 *определены в лемме 3.4,*

$$\eta_3^2 = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^4 \left\| \operatorname{div}(A\nabla y_{ht} - B(t,t)\nabla y_h) - \int_0^t \operatorname{div}(B_t(t,s)\nabla y_h(s))\,ds + f_t + u_{ht} - y_{htt} \right\|_{L^2(\tau)}^2 +$$
$$\sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h} \int_l h_l^3 [A\nabla y_{ht}\cdot \mathbf{n}]^2 + \sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h} \int_l h_l^3 \left[\int_0^t B_t(t,s)\nabla y_h(s)\,ds\cdot\mathbf{n}\right]^2 +$$
$$\sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h} \int_l h_l^3 [B(t,t)\nabla y_h\cdot\mathbf{n}]^2,$$
$$\eta_4^2 = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h} h_\tau^4 \left\| \operatorname{div}(A\nabla p_{ht} + B^*(t,t)\nabla p_h) - \int_t^T \operatorname{div}(B_t^*(s,t)\nabla p_h(s))\,ds + y_{ht} - y_{dt} + p_{htt} \right\|_{L^2(\tau)}^2 +$$
$$\sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h} \int_l h_l^3 [A\nabla p_{ht}\cdot \mathbf{n}]^2 + \sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h} \int_l h_l^3 \left[\int_t^T B_t^*(s,t)\nabla p_h(s)\,ds\cdot\mathbf{n}\right]^2 +$$
$$\sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h} \int_l h_l^3 [B^*(t,t)\nabla p_h\cdot\mathbf{n}]^2.$$

Доказательство. Пусть ϕ — решение (3.9) с $F = (\tilde y - y_h)_t$. Мы приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}
\|(\tilde y - y_h)_t\|^2 &= \big((\tilde y - y_h)_t, F\big) = \big(A\nabla(\tilde y - y_h)_t, \nabla\phi\big)\\
&= \big(A\nabla(\tilde y - y_h)_t, \nabla(\phi-\phi_I)\big) + \int_0^t \big(B_t(t,s)\nabla(\tilde y(s) - y_h(s)), \nabla\phi_I\big)\,ds +\\
&\quad \big(B(t,t)\nabla(\tilde y - y_h), \nabla\phi_I\big)\\
&= \big(A\nabla(\tilde y - y_h)_t, \nabla(\phi-\phi_I)\big) - \int_0^t \big(B_t(t,s)\nabla(\tilde y(s) - y_h(s)), \nabla(\phi-\phi_I)\big)\,ds -\\
&\quad \big(B(t,t)\nabla(\tilde y - y_h), \nabla(\phi-\phi_I)\big) + \big(B(t,t)\nabla(\tilde y - y_h), \nabla\phi\big) +\\
&\quad \int_0^t \big(B_t(t,s)\nabla(\tilde y(s) - y_h(s)), \nabla\phi\big)\,ds\\
&= \int_0^t \big(B_t(t,s)\nabla y_h(s), \nabla(\phi-\phi_I)\big)\,ds + \big(B(t,t)\nabla y_h - A\nabla y_{ht}, \nabla(\phi-\phi_I)\big) +\\
&\quad (f_t + u_{ht} - y_{htt}, \phi-\phi_I) + \big(B(t,t)\nabla(\tilde y - y_h), \nabla\phi\big) +\\
&\quad \int_0^t \big(B_t(t,s)\nabla(\tilde y(s) - y_h(s)), \nabla\phi\big)\,ds\\
&= \sum_{\tau\in\mathcal{T}_h}\int_\tau \left(\operatorname{div}(A\nabla y_{ht}) - \int_0^t \operatorname{div}\big(B_t(t,s)\nabla y_h(s)\big)\,ds - \operatorname{div}\big(B(t,t)\nabla y_h\big)\right)(\phi-\phi_I) +\\
&\quad \sum_{l\in\partial\mathcal{T}_h}\int_l \left[B(t,t)\nabla y_h\cdot\mathbf{n} + \int_0^t B_t(t,s)\nabla y_h(s)\,ds\cdot\mathbf{n} - A\nabla y_{ht}\cdot\mathbf{n}\right](\phi-\phi_I) -\\
&\quad \int_0^t \big(\tilde y(s) - y_h(s), \operatorname{div}\big(B_t^*(t,s)\nabla\phi\big)\big)\,ds - \big(\tilde y - y_h, \operatorname{div}(B^*(t,t)\nabla\phi)\big) +\\
&\quad (f_t + u_{ht} - y_{htt}, \phi-\phi_I)\\
&\le \frac{C}{\delta}\,\eta_3^2 + \frac{C}{\delta}\int_0^t \|\tilde y(s) - y_h(s)\|^2 ds + \frac{C}{\delta}\,\|\tilde y - y_h\|^2 + \delta\|\phi\|_2^2,
\end{aligned}\tag{3.14}$$

где использовались (3.3), (3.7), (3.9), формула Грина, неравенство Коши и леммы 3.1, 3.2.

Аналогично оценке для $\|\tilde{y}-y_h\|$ находим, что

$$\|(\tilde{y}-y_h)_t\|^2 \le C\big(\eta_1^2+\eta_3^2\big)+C\int_0^t \eta_1^2(s)\,ds.$$

Кроме того, мы имеем

$$\|(\tilde{p}-p_h)_t\|^2 \le C\big(\eta_2^2+\eta_4^2\big)+C\int_t^T \eta_2^2(s)\,ds.$$

Доказательство леммы завершено. □

4. Апостериорные оценки ошибок

В этом пункте мы рассмотрим апостериорные оценки ошибок для переменной состояния, переменной сопряженного состояния и переменной управления.

Далее мы будем использовать следующие непрерывные решения состояния, связанные с u_h, которые удовлетворяют

$$(y_t(u_h),v)+(A\nabla y(u_h),\nabla v)=\int_0^t (B(t,s)\nabla y(u_h)(s),\nabla v)ds+(f+u_h,v)\ \forall\, v\in V, \quad (4.1)$$

$$y(u_h)(x,0)=y_0(x)\ \forall\, x\in\Omega, \quad (4.2)$$

$$-(p_t(u_h),q)+(A\nabla p(u_h),\nabla q)=\int_t^T \big(B^*(s,t)\nabla p(u_h)(s),\nabla q\big)\,ds+(y(u_h)-y_d,q)\ \forall\, q\in V, \quad (4.3)$$

$$p(u_h)(x,T)=0\ \forall\, x\in\Omega. \quad (4.4)$$

Лемма 4.1. *Пусть* (y_h,p_h) *и* $(y(u_h),p(u_h))$ *— решения* (2.12)–(2.16) *и* (4.1)–(4.4) *соответственно. Тогда имеем*

$$\|y(u_h)-y_h\|_{L^\infty(L^2)}+\|p(u_h)-p_h\|_{L^\infty(L^2)}\le C\sum_{i=1}^{4}\max_{t\in[0,T]}\eta_i+C\|y_0-y_0^h\|,$$

где η_1 *и* η_2 *определены в лемме 3.4, а* η_3 *и* η_4 *— в лемме 3.5.*

Доказательство. Определим ошибки следующим образом:

$$r_y:=y(u_h)-\tilde{y},\qquad r_p:=p(u_h)-\tilde{p}.$$

В соответствии с (3.1), (3.2), (4.1) и (4.3) получим

$$(r_{yt},v)+(A\nabla r_y,\nabla v)=\int_0^t \big(B(t,s)\nabla r_y(s),\nabla v\big)\,ds+(\tilde{y}_t-y_{ht},v)\ \forall\, v\in V, \quad (4.5)$$

$$-(r_{pt},q)+(A\nabla r_p,\nabla q)=\int_t^T \big(B^*(s,t)\nabla r_p(s),\nabla q\big)\,ds+(y(u_h)-y_h+p_{ht}-\tilde{p}_t,q)\ \forall\, q\in V. \quad (4.6)$$

Выбирая $v=r_y$ в (4.5) и используя неравенство Коши–Шварца, получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|r_y\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\nabla r_y\|^2 &= \int_0^t \big(B(t,s)\nabla r_y(s), \nabla r_y\big)\,ds + (\tilde{y}_t - y_{ht}, r_y)\\ &\le C\int_0^t \|\nabla r_y(s)\|^2 ds + \frac{c_1}{2}\|\nabla r_y\|^2 + \|\tilde{y}_t - y_{ht}\|^2 + \|r_y\|^2. \qquad (4.7)\end{aligned}$$

Интегрируя (4.7) от 0 до t, а затем используя предположение относительно A, имеем

$$\|r_y\|^2 + \int_0^t \|\nabla r_y(s)\|^2\,ds \le C\int_0^t\int_0^\lambda \|\nabla r_y(s)\|^2\,ds\,d\lambda + C\int_0^t \|\tilde{y}_t - y_{ht}\|^2\,ds + C\int_0^t \|r_y\|^2\,ds + C\|r_y(0)\|^2.$$

Из неравенства Гронуолла следует, что

$$\|r_y\|^2 + \int_0^t \|\nabla r_y(s)\|^2\,ds \le C\int_0^t \|\tilde{y}_t - y_{ht}\|^2\,ds + C\|r_y(0)\|^2,$$

где

$$\|r_y(0)\| = \|y_0 - y_0^h + y_h(0) - \tilde{y}(0)\| \le \|y_0 - y_0^h\| + \|\tilde{y}(0) - y_h(0)\|.$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$\|y(u_h) - y_h\| \le \|r_y\| + \|\tilde{y} - y_h\| \le \max_{t\in[0,T]}\eta_1 + \max_{t\in[0,T]}\eta_3 + C\|y_0 - y_0^h\|. \qquad (4.8)$$

Затем, выбрав $q = r_p$ в (4.6) и используя неравенство Коши–Шварца, мы получим

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|r_p\|^2 + \big\|A^{\frac{1}{2}}\nabla r_p\big\|^2 &= \int_t^T \big(B^*(s,t)\nabla r_p(s), \nabla r_p\big)\,ds + \big(y(u_h) - y_h + p_{ht} - \tilde{p}_t, r_y\big)\\ &\le C\int_t^T \|\nabla r_p(s)\|^2\,ds + \frac{c_1}{2}\|\nabla r_p\|^2 + \|\tilde{p}_t - y_{pt}\|^2 + \|r_p\|^2 +\\ &\quad \|y(u_h) - y_h\|^2. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Пусть $t = T$ в (3.6). Тогда мы легко получим $r_p(T) = 0$. Интегрируя (4.9) от t до T и используя предположение относительно A, имеем

$$\begin{aligned}\|r_p\|^2 + \int_t^T \|\nabla r_p(s)\|^2\,ds &\le C\int_t^T\int_\lambda^T \|\nabla r_p(s)\|^2\,ds\,d\lambda + C\int_t^T \|\tilde{p}_t - p_{ht}\|^2\,ds +\\ &\quad C\int_t^T \|r_p\|^2\,ds + C\int_t^T \|y(u_h) - y_h\|^2\,ds. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Применим неравенство Гронуолла к (4.10) для получения

$$\|r_p\|^2 \le C\|\tilde{p}_t - p_{ht}\|_{L^\infty(L^2)} + C\|y(u_h) - y_h\|_{L^\infty(L^2)}. \qquad (4.11)$$

Объединив (4.8), (4.11), леммы 3.4 и 3.5 с неравенством треугольника, мы завершаем доказательство леммы. □

Пусть

$$e_y := y - y(u_h), \qquad e_p := p - p(u_h).$$

На основании (2.4)–(2.8) и (4.1)–(4.4) приведенные выше ошибки удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(e_{yt}, v) + (A\nabla e_y, \nabla v) = \int_0^t \big(B(t,s)\nabla e_y(s), \nabla v\big)\, ds + (u - u_h, v) \quad \forall\, v \in V, \tag{4.12}$$

$$e_y(x,0) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{4.13}$$

$$-(e_{pt}, q) + (A\nabla e_p, \nabla q) = \int_t^T \big(B^*(s,t)\nabla e_p(s), \nabla q\big)\, ds + (e_y, q) \quad \forall\, q \in V, \tag{4.14}$$

$$e_p(x,T) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{4.15}$$

Мы можем легко получить следующую лемму:

Лемма 4.2. *Пусть* (y,p) *и* $(y(u_h), p(u_h))$ *— решения* (2.4)–(2.8) *и* (4.1)–(4.4) *соответственно. Тогда*

$$\|y - y(u_h)\| + \|p - p(u_h)\| \le C\|u - u_h\|_{L^2(L^2)}.$$

Теперь получим оценку ошибки для переменной управления.

Лемма 4.3. *Пусть* (y,p,u) *и* (y_h, p_h, u_h) *— решения* (2.4)–(2.8) *и* (2.12)–(2.16) *соответственно. Тогда*

$$\|u - u_h\|_{L^2(L^2)} \le C\|p(u_h) - p_h\|_{L^2(L^2)}.$$

Доказательство. Исходя из (2.8) и (2.16),

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|^2_{L^2(L^2)} &= \int_0^T (u - u_h, u - u_h)\, dt \\
&= \int_0^T (u + p, u - u_h)\, dt + \int_0^T (u_h + p_h, u_h - u)\, dt + \\
&\quad \int_0^T (p_h - p(u_h), u - u_h)\, dt + \int_0^T (p(u_h) - p, u - u_h)\, dt \\
&\le \int_0^T (p_h - p(u_h), u - u_h)\, dt + \int_0^T (p(u_h) - p, u - u_h)\, dt.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Из неравенства Коши следует, что

$$\int_0^T \big(p_h - p(u_h), u - u_h\big)\, dt \le C\|p(u_h) - p_h\|^2_{L^2(L^2)} + \frac{1}{2}\|u - u_h\|^2_{L^2(L^2)}. \tag{4.17}$$

Теперь, интегрируя (4.12) и (4.14) от 0 до T, используя (4.13), (4.15) и

$$\int_0^T \int_0^t \big(B(t,s)\nabla e_y(s), \nabla e_p\big)\, ds\, dt = \int_0^T \int_t^T \big(B^*(s,t)\nabla e_p(s), \nabla e_y\big)\, ds\, dt,$$

мы заключаем, что

$$\int_0^T \big(p(u_h) - p, u - u_h\big)\, dt = \int_0^T \big(y(u_h) - y, y - y(u_h)\big)\, dt \le 0. \tag{4.18}$$

Таким образом, используя (4.16)–(4.18), мы завершаем доказательство леммы. □

Из лемм 4.1–4.3 и неравенства треугольника мы имеем следующий основной результат:

Теорема. *Пусть* (y, p, u) *и* (y_h, p_h, u_h) *— решения* (2.4)–(2.8) *и* (2.12)–(2.16) *соответственно. Тогда мы имеем*

$$\|u - u_h\|_{L^2(L^2)} + \|y - y_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|p - p_h\|_{L^\infty(L^2)} \le C \sum_{i=1}^{4} \max_{t\in[0,T]} \eta_i + C\|y_0 - y_0^h\|,$$

где η_1 *и* η_2 *определены в лемме 3.4, а* η_3 *и* η_4 *— в лемме 3.5.*

5. Выводы

В этой статье мы получили апостериорные оценки ошибок для полудискретных конечно-элементных решений задач оптимального управления, описываемых линейными параболическими интегро-дифференциальными уравнениями. Наши апостериорные оценки ошибок для этого класса задач оптимального управления и их приближенные решения методами конечных элементов представляются новыми. В своей будущей работе мы рассмотрим полностью дискретную аппроксимацию на основе обратного метода Эйлера и разработаем адаптивный конечно-элементный алгоритм. Кроме того, мы рассмотрим апостериорные оценки ошибок для задач оптимального управления, описываемых гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями.

Литература

1. **Brunner H. and Yan N.** Finite element methods for optimal control problems governed by integral equations and integro-differential equations // J. Numer. Math. — 2005. — Vol. 101, iss. 1. — P. 1–27.
2. **Becker R. and Rannacher R.** Adaptive finite element methods for optimal control of partial differential equations: basic concept // SIAM J. Control Optim. — 2000. — Vol. 39, iss. 1. — P. 113–132.
3. **Ciarlet P.G.** The Finite Element Method for Elliptic Problems. — Amsterdam, 1978.
4. **Chen H. and Hou T.** A priori and a posteriori error estimates of H^1-Galerkin mixed finite element methods for optimal control problems governed by pseudo-hyperbolic integro-differential equations // Appl. Math. Comput. — 2018. — Vol. 328, iss. C. — P. 100–112.
5. **Chen Y. and Lu Z.** Error estimates of fully discrete mixed finite element methods for semilinear quadratic parabolic optimal control problem // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. — 2010. — Vol. 99, iss. 23-24. — P. 1415–1423.
6. **Chen Y.** Superconvergence of mixed finite element methods for optimal control problems // Math. Comput. — 2008. — Vol. 77. — P. 1269–1291.
7. **Chen Y. and Dai Y.** Superconvergence for optimal control problems governed by semi-linear elliptic equations // J. Sci. Comput. — 2009. — Vol. 39. — P. 206–221.
8. **Chen Y., Huang Y., Liu W.B., and Yan N.** Error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for convex optimal control problems // J. Sci. Comput. — 2009. — Vol. 42. — P. 382–403.
9. **Chen Y. and Lin Z.** A posteriori error estimates of semidiscrete mixed finite element methods for parabolic optimal control problems // East Asian J. Appl. Math. — 2015. — Vol. 5, iss. 1. — P. 85–108.
10. **Gunzburger M.D. and Hou L.** Finite-dimensional approximation of a class of constrained nonlinear optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 1996. — Vol. 34, iss. 3. — P. 1001–1043.

11. **Grisvard P.** Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. — Boston–London–Melbourne: Pitman, 1985.
12. **Gong W. and Yan N.** A posteriori error estimate for boundary control problems governed by the parabolic partial differential equations // J. Comput. Math. — 2009. — Vol. 27, № 1. — P. 68–88. — https://www.jstor.org/stable/43693492.
13. **Hou L. and Turner J.C.** Analysis and finite element approximation of an optimal control problem in electrochemistry with current density controls // J. Numer. Math. — 1995. — Vol. 71. — P. 289–315.
14. **Hoppe R. and Kieweg M.** A posteriori error estimation of finite element approximations of pointwise state constrained distributed control problems // J. Numer. Math. — 2009. — Vol. 17, iss. 3. — P. 219–244.
15. **Kufner A., John O., and Fucik S.** Function Spaces. — Leyden: Noordhoff, 1977.
16. **Li R., Liu W.B., and Yan N.** A posteriori error estimates of recovery type for distributed convex optimal control problems // J. Sci. Comput. — 2007. — Vol. 33. — P. 155–182.
17. **Li R., Liu W.B., Ma H., and Tang T.** Adaptive finite element approximation for distributed elliptic optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 2002. — Vol. 41, iss. 5. — P. 1321–1349.
18. **Lions J.L.** Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1971.
19. **Meyer C. and Rösch A.** Superconvergence properties of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 2004. — Vol. 43, iss. 3. — P. 970–985.
20. **Makridakis C. and Nochetto R.H.** Elliptic reconstruction and a posteriori error estimates for parabolic problems // SIAM J. Numer. Anal. — 2003. — Vol. 41, iss. 4. — P. 1585–1594.
21. **Reddy G.M.M. and Sinha R.K.** Ritz–Volterra reconstructions and a posteriori error analysis of finite element method for parabolic integro-differential equations // IMA J. Numer. Anal. — 2015. — Vol. 35, iss. 1. — P. 341–371.
22. **Shen W., Ge L., Yang D., and Liu W.** Sharp a posteriori error estimates for optimal control governed by parabolic integro-differential equations // J. Sci. Comput. — 2015. — Vol. 65. — P. 1–33.
23. **Tang Y. and Hua Y.** Elliptic reconstruction and a posteriori error estimates for parabolic optimal control problems // J. Appl. Anal. Comp. — 2014. — Vol. 4, iss. 3. — P. 295–306.

Поступила в редакцию 1 июня 2023 г.
После исправления 14 августа 2023 г.
Принята к печати 27 октября 2023 г.