во втором случае

$$p_i = \sqrt{(\bar{\varepsilon}_+^p)^2 + \frac{1}{3}(\gamma_0{}^p)^2}, \qquad p_i^* = \bar{\varepsilon}_+^p + \frac{\gamma_0{}^p}{\sqrt{3}} \qquad \text{при } t \geqslant t_0$$

$$p_i = p_i{}^* = \frac{1}{3}\gamma^p \qquad \text{при } t \leqslant t_0$$

где $\varepsilon_0{}^p$ и $\gamma_0{}^p$ — деформация в момент $t = t_0$. Ясно, что

$$p_i \neq p_i{}^* \quad \text{при } t \geqslant t_0$$

На фиг. 8 сплошными линиями показаны кривые, полученные по (2.11), пунктирными — экспериментальные кривые при определении (3.4), а пунктирными с точкой— экспериментальные кривые при определении (3.3); на участке $0 \leqslant t \leqslant t_0$ пунктирные линии и пунктирные с точками совпадают.

Из фиг.8 видно, что говорить о соответствии теории и эксперимента можно только при определении интенсивности деформаций ползучести (3.3).

Поступила
2 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Наместников В. С. О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 4.
2. Работнов Ю. Н. Расчет деталей машин на ползучесть. Изв. АН СССР. ОТН, 1948, № 6.
3. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ,1948, № 10.
4. Наместников В. С. Об одной гипотезе в теории трехосной ползучести. Изв. СО АН СССР, 1960, № 2.

СРЕДНИЙ ИЗГИБ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, КВАДРАТНОЙ В ПЛАНЕ, ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЕЙ И НАПРЯЖЕНИЕМ

Х. М. Муштари, Р. Г. Суркин

(Казань)

В работе по теории среднего изгиба [1] рассматривается изгиб пологой сферической панели, квадратной в плане, нагруженной внешним нормальным давлением и опирающейся на гибкие в своей плоскости ребра при нелинейной зависимости между деформацией и напряжением. Ниже результаты этого исследования доведены до машинного счета. В частном случае получены числовые данные для плоской квадратной пластинки. Предполагается, что интенсивность напряжения σ_i выражается через интенсивность деформации e_i по формуле

$$\sigma_i = E_0 e_i (1 - \gamma e_i{}^2) \tag{1}$$

где E_0, γ — постоянные величины. При этом принимается, что коэффициент поперечного сжатия μ изменяется в зависимости от e_i по закону квадратной параболы

$$\mu = \mu_0 (1 + m e_i{}^2) \tag{2}$$

где μ_0, m — постоянные. Обычным путем [2] получаются выражения главных компонент напряжения σ_{ij} через компоненты деформации e_{ij}. В дальнейшем физическая нелинейность считается малой так, чтобы величинами порядка $\gamma^2 e_i{}^4$, $m\gamma e_i{}^4$, $m^2 e_i{}^4$ можно было пренебрегать по сравнению с единицей. Это обстоятельство используется также для упрощения выражений упругих усилий и моментов через компоненты деформации ε_{ij} и параметры изменения кривизны $\varkappa_{ij}$ срединной поверхности. Таким образом, получаются выражения главных компонент упругого усилия

$$T_1 \approx \frac{E_0 t}{1 - \mu_0{}^2}(\varepsilon_1 + \mu_0 \varepsilon_2) + F_1, \qquad T_{12} = \frac{E_0 t}{1 + \mu_0}\varepsilon_{12} + F_{12} \tag{3}$$

где F_1, F_{12} — известные функции от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ величин $\varepsilon_{ij} \approx \varepsilon_{ij}{}^{\mathrm{I}}$, найденных в первом приближении, и от постоянны E_0, μ_0, γ, m, символ (1.2) здесь и в дальнейшем означает, что аналогичные соотношения получаются перестановкой индексов.

Вводя функцию напряжения ψ и исключая u, v, получаем условие совместности деформации

$$\Delta\Delta\psi - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\right) + \mu_0\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (4)$$

Уравнение изгиба в усилиях и моментах имеет обычный вид [2]:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + T_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - p = 0 \qquad (5)$$

Здесь

$$M_{11} = D_0(\varkappa_1 + \mu_0\varkappa_2) + M_{11}{}^*$$

$$M_{12}(1-\mu_0)D_0\varkappa_{12} + M_{12}{}^* \qquad \left(D_0 = \frac{E_0 t^3}{12(1-\mu_0{}^2)}\right) \qquad (6)$$

где $M_{11}{}^*$, $M_{22}{}^*$, $M_{12}{}^*$ — известные однородные функции, линейные относительно $\varepsilon_{ij}{}^{\mathrm{I}}$ и квадратичные относительно $\varkappa_{ij}$. Искомые w и ψ, удовлетворяющие граничным условиям, аппроксимируются рядами

$$w = \sum_{mn} w_{mn} \cos m\xi \cos n\eta, \qquad \psi = \sum_{mn} \psi_{mn} \cos m\xi \cos m\eta \qquad \left(\xi = \frac{\pi x}{a},\ \eta = \frac{\pi y}{a}\right) \qquad (7)$$

в первом из которых сохраняются члены, содержащие w_{11}, w_{13}, w_{31}, w_{33}, w_{15}, w_{51}, w_{17} и w_{71}, причем в силу симметрии $w_{ij} = w_{ji}$. В выражении ψ оказывается достаточным учесть члены с амплитудами ψ_{11}, ψ_{13}, ψ_{31}, ψ_{33}, ψ_{15} и ψ_{51}. Эти последние удается выразить через w_{ij}, решая систему линейных уравнений, полученных путем интегрирования уравнения (4) по методу Бубнова—Галеркина:

$$\psi_{11} = -\frac{\zeta^2}{\delta}\left(\frac{4}{3} + \frac{176}{45}\zeta_{13} - \frac{k}{2\zeta}\right)$$

$$\psi_{13} = -\frac{\zeta^2}{25\pi^2}\left(\frac{44}{45} + \frac{25168}{1575}\zeta_{13} - A_2\psi_{11} - \frac{5}{2}\frac{k}{\zeta}\zeta_{13}\right)$$

$$\psi_{33} = -\frac{\zeta^2}{81\pi^2}\left(-\frac{4}{5} + \frac{1296}{175}\zeta_{13} - A_3\psi_{11} - \frac{9}{2}\frac{k}{\zeta}\zeta_{33}\right) \qquad (8)$$

$$\psi_{15} = -\frac{\zeta^2}{169\pi^2}\left(-\frac{12}{35} + \frac{9824}{1575}\zeta_{13} - \frac{13}{2}\frac{k}{\zeta}\zeta_{15}\right)$$

$$(\zeta = -w_{11}, \quad \zeta_{ij} = w_{ij}/w_{11}, \quad \delta = \pi^2 - A_1\zeta^2)$$

Здесь k — параметр кривизны панели; a — размер панели, R — радиус кривизны, t — толщина. Коэффициенты, учитывающие физическую нелинейность материала (т. е. зависящие от μ_0, m и γ), имеют вид

$$A_1 = \frac{\pi^2 D}{32(1-\mu_0{}^2)}\left[(7 + 91\mu_0 + 6\mu_0{}^2)\mu_0 s - (45.5 + 7\mu_0 - 38.5\mu_0{}^2 - 6\mu_0{}^3)r\right]$$

$$A_2 = \frac{\pi^2 D}{32(1-\mu_0{}^2)}\left[(72 + 51\mu_0 + 45\mu_0{}^2)\mu_0 s - (25.5 + 72\mu_0 - 28.5\mu_0{}^2 - 45\mu_0{}^3)r\right] \qquad (9)$$

$$A_3 = \frac{9\pi^2 D}{32(1-\mu_0{}^2)}\left[(1 + 7\mu_0)\mu_0 s - (3.5 + \mu_0 + 3.5\mu_0{}^2)r\right]$$

$$\left(D = \frac{1}{12(1-\mu_0{}^2)}, \quad r = \frac{\pi^4 t^4}{a^4}\gamma, \quad s = \frac{\pi^4 t^4}{a^4}m\right) \qquad (10)$$

Применяя метод Бубнова — Галеркина к интегрированию уравнения (5), получаем систему уравнений относительно неизвестных ζ_{13}, ζ_{33}, ζ_{15}, ζ_{17} и P:

$$D\pi^2\zeta\left[1 + A_1'\psi_{11}{}^2 + B_1'\psi_{11}{}^2\zeta_{13} + C_1'\psi_{11}\psi_{13} + D_1'\zeta^2 + E_1'\zeta^2\zeta_{13}\right] -$$

$$- 2.667\,\psi_{11}\zeta - 3.911\,\zeta(\psi_{11}\zeta_{13} + \psi_{13}) + 31.962\,\psi_{13}\zeta\zeta_{13} + {}^1/_2\,k\psi_{11} - P = 0 \qquad (11)$$

$$D\pi^2\zeta\left[25\,\zeta_{13} + A_2'\psi_{11}{}^2 + D_2'\zeta_2 + E_2'\,\zeta^2\zeta^2\zeta_{13}\right] - 1.956\,\psi_{11}\zeta -$$

$$- 15.98\,\zeta(\psi_{11}\zeta_{13} + \psi_{13}) - 55.771\,\psi_{13}\zeta\zeta_{13} + 2.5\,k\psi_{13} + 0.333\,P = 0 \qquad (12)$$

$$D\pi^2\zeta\left[81\,\zeta_{33} + A_3'\psi_{11}{}^2 + D_3'\zeta^2\right] + 1.6\,\psi_{11}\zeta - 7.406\,\zeta(\psi_{11}\zeta_{13} + \psi_{13}) +$$

$$+ 4.5\,k\psi_{33} - 18.514\,\psi_{11}\zeta\zeta_{33} - 0.111\,P = 0 \qquad (13)$$

$$169\,D\pi^2\zeta\zeta_{15} + 0.686\,\psi_{11}\zeta - 6.678\,\psi_{11}\zeta\zeta_{13} + 6.5\,k\psi_{15} - 0.2\,P = 0 \qquad (14)$$

$$625\,D\pi^2\zeta\zeta_{17} - 0.432\,\psi_{11}\zeta + 0.143\,P = 0 \qquad (15)$$

где $P = \frac{4}{\pi^4} \frac{pa^4}{Et^4}$ — параметр давления,

$$A_1' = \frac{1}{64}\left[(14 + 196\,\mu_0 + 12\,\mu_0^2)\,\frac{\mu_0}{1-\mu_0^2}\,s - (91 + 12\,\mu_0)\,r\right] \tag{16}$$

$$B_1' = \frac{1}{16}\left[(31 + 54\,\mu_0 + 80\,\mu_0^2)\,\frac{\mu_0}{1-\mu_0^2}\,s - (42.5 + 80\,\mu_0)\,r\right]$$

$$C_1' = \frac{1}{8}\left[(72 + 44\,\mu_0 + 73\,\mu_0^2)\,\frac{\mu_0}{1-\mu_0^2}\,s - (25.5 + 73\,\mu_0)\,r\right]$$

$$D_1' = \frac{3}{640\,(1-\mu_0^2)^2}\left[(2 + 63\,\mu_0 + 14\,\mu_0^2 + 63\,\mu_0^3 + 2\,\mu_0^4)\,\frac{\mu_0}{1-\mu_0^2}\,s - \right.$$
$$\left. - (17.5 + 7\,\mu_0 + 45.5\,\mu_0^2 + 2\,\mu_0^3)\,r\right]$$

$$E_1' = \frac{3}{640\,(1-\mu_0^2)^2}\left[(146 + 198\,\mu_0 + 752\,\mu_0^2 + 198\,\mu_0^3 + \right.$$
$$\left. + 146\,\mu_0^4)\,\frac{\mu_0}{1-\mu_0^2}\,s - (37 + 376\,\mu_0 + 161\,\mu_0^2 + 146\,\mu_0^3)\,r\right]$$

$$A_2' = \frac{1}{32}\left[(24 + 144\,\mu_0 + 27\,\mu_0^2)\,\frac{\mu}{1-\mu_0^2}\,s - (58.5 + 27\,\mu_0)\,r\right.$$

$$D_2' = \frac{9}{640\,(1-\mu_0^2)^2}\left[(5 + 11\,\mu_0 + 48\,\mu_0^2 + 11\,\mu_0^3 + 5\,\mu_0^4)\,\frac{\mu_0}{1-\mu_0^2}\,s - \right.$$
$$\left. - (2.5 + 24\,\mu_0 + 8.5\,\mu_0^2 + 5\,\mu_0^3)\,r\right]$$

$$E_2' = \frac{3}{640\,(1-\mu_0^2)^2}\left[(328 + 2715\,\mu_0 + 2314\,\mu_0^2 + 2715\,\mu_0^3 + \right.$$
$$\left. + 328\,\mu_0^4)\,\frac{\mu_0}{1-\mu_0^2}\,s - (789.5 + 1157\,\mu_0 + 1925.5\,\mu_0^2 + 328\,\mu_0^3)\,r\right]$$

$$A_3' = \frac{9}{32}\left[(1 + 14\,\mu_0)\,\frac{\mu_0}{1-\mu_0^2}\,s - 3.5\,r\right], \quad D_3' = \frac{27}{640}\,\frac{7 + 2\,\mu_0 + 7\,\mu_0^2}{(1-\mu_0^2)^2}\left(\frac{\mu_0^2}{1-\mu_0^2}\,s - 0.5\,r\right)$$

Численные значения получены для пластины ($k = 0$) и для сферической панели ($k \neq 0$). Пользуясь вышеприведенными уравнениями (8) и (11)—(15) для ряда значений γe_i^2 и me_i^2, определены прогиб и напряжение в центре как пластины, так и сферической панели с кривизнами $k = 3$ и $k = 6$, а также величина давления p, соответствующие значениям $w_{11}/t = 0.25,\ 0.5, \ldots, 2.0$ при $\mu_0 = 0.25$ и 0.3.

При этом полный прогиб в центре пластинки (панели) согласно (7) вычислялся по формуле ($\xi = \eta = 0$)

$$w_0 = \zeta\,(1 + 2\zeta_{13} + \zeta_{33} + 2\zeta_{15} + 2\zeta_{17}) \tag{17}$$

Мембранное напряжение при $\xi = \eta = 0$ будет

$$\sigma_{\text{м}}^{\circ} = \frac{T_{11}^0}{t} - E_0 t^2 \frac{\pi^2}{a^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = -E_0\,\frac{\pi^2 t^2}{a^2}\,(\psi_{11} + 10\,\psi_{13} + 26\,\psi_{15} + 9\,\psi_{33})$$

или

$$\sigma_{\text{м}}^{\circ *} = \frac{\sigma_{\text{м}}' a^2}{\pi^2 E_0 t^2} = -(\psi_{11} + 10\,\psi_{13} + 26\,\psi_{15} + 9\,\psi_{33}) \tag{18}$$

Изгибные напряжения в верхних и нижних волокнах вычислялись по формулам:

$$\sigma_{\text{и}}^{*(+)} = \pm\,\frac{\varkappa^*}{1-\mu_0}\,[1 + SF_1^2], \quad \sigma_{\text{и}}^{*(-)} = \pm\,\frac{\varkappa^*}{1-\mu_0}\,[1 + SF_2^2] \tag{19}$$

где

$$\varkappa^* = \frac{\zeta}{2}\,(1 + 10\,\zeta_{13} + 9\,\zeta_{33} + 26\,\zeta_{15} + 50\,\zeta_{17}), \quad S = \frac{\mu_0 s - (1-\mu_0)\,r}{(1-\mu_0)^3}$$

$$F_1 = -(1-\mu_0)\,\sigma_{\text{м}}^* + \varkappa^*, \quad F_2 = -(1-\mu_0)\,\sigma_{\text{м}}^* - \varkappa^*$$

Некоторые результаты вычислений на машине «Стрела» Вычислительного центра Академии наук СССР при $\xi = \eta = 0$ и $\mu_0 = 0.3$ и заданных ζ и k представлены в таблице.

	k	r	s	P	w_0	$\sigma_{\text{М}}^*$	$\sigma_{\text{И}}^{*(+)}$	$\sigma_{\text{И}}^{*(-)}$
0.5	0	0	0	0.4948	0.4848	0.0348	0.3101	0.3101
		1	0	0.4797	0.4877	0.0341	0.2938	0.2798
		2	3	0.4779	0.4861	0.0339	0.2977	0.2881
	3	0	0	0.4619	0.4907	—0.0377	0.3268	0.3268
		2	3	0.4451	0.4929	—0.0331	0.3033	0.3140
	6	0	0	0.6548	0.4912	—0.1121	0.3270	0.3270
		2	3	0.6193	0.4953	—0.1079	0.1852	0.2608
1.0	0	0	0	1.2279	0.9558	0.1349	0.5830	0.5830
		1	0	1.1776	0.9645	0.0926	0.4476	0.3047
		1	1	1.1181	0.9587	0.0955	0.5101	0.4328
	3	0	0	0.8931	0.9768	—0.0036	0.6375	0.6375
		1	1	0.8195	0.9836	0.0005	0.4978	0.4973
	6	0	0	0.9772	0.9959	—0.1423	0.6865	0.6865
		1	1	0.8663	1.0160	0.1754	0.6051	0.3702

Из этих числовых примеров видно, что наличие даже малой физической нелинейности материала по сравнению со случаем физически линейного материала уменьшает поперечное давление и полное напряжение, соответствующее данному прогибу.

В наших примерах уменьшение поперечного давления доходит до 10 %, а снижение полного напряжения до 25%. При отсутствии физической нелинейности, то есть при $\mu = \mu_0$ и $r = s = 0$ получаем результаты, совпадающие с данными работами [1]. В выполнении необходимых вычислений принимала участие Л. А. Кузнецова, программирование задачи для машины «Стрела» сделано Д. А. Касимовой.

Поступила
24 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Средний изгиб пологой оболочки, прямоугольной в плане и опирающейся на гибкие в своей плоскости ребра. Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. н., 1958, вып. 12.
2. Муштари Х. М. и Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигоиздат, Казань, 1957.

ПРИНЦИПЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ АППАРАТОВ СВЕРХВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ. ПРИНЦИП РЕДУЦИРОВАНИЯ РАДИАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Д. С. Миринский

(Москва)

Развитие промышленности минерального синтеза требует создания аппаратов с большим рабочим объемом, способных выдержать давление до 100 *кат* и температуру до 3500° С.

За последние 5—6 лет в этом направлении достигнуты большие успехи, которые дают возможность сравнительно просто решить поставленную задачу.

В 1958 г. Холл [1] предложил аппарат для создания сверхвысоких давлений в твердых веществах, который получил название тетраэдрической установки; в ней отсутствует цилиндр высокого давления;его функции совмещены с функциями четырех пуансонов, расположенных под тетраэдрическими углами друг к другу. Под действием усилий прессов, расположенных по углам тетраэдрической фермы, пуансоны перемещаются к центру и сжимают твердую среду, которая частично выдавливается в зазор между ними, образуя заусенец.

Используя пирофилит в качестве среды, передающей давление, Холлу удалось достигнуть на тетраэдрической установке давления до 100 *кат*. Так как пирофилит является диэлектриком, то пуансоны были использованы им и как электровводы.