ДИСПЕРСИЯ И СЛУЧАЙНАЯ ОШИБКА ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ЛОКАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Ю. Л. Розенштои

(Ленинград)

Процесс измерения температуры неизотермического потока газа или жидкости контактным методом сопровождается появлением случайной ошибки, определяемой статистическим характером турбулентных пульсаций температуры в потоке и динамическими характеристиками датчика. Оценка случайной ошибки измерения температуры воздуха в турбулентной атмосфере линейным термоприемником проведена в [1]. При этом результирующие выводы в [1] базировались на аппроксимации переходной характеристики термометра экспоненциальной функцией времени. Между тем известно, что такая аппроксимация имеет весьма приближенный характер и справедлива лишь в случае равенства средней температуры на поверхности термометра его среднеобъемной температуре, что соответствует применению в качестве термометрического тела материала с бесконечно большой теплопроводностью. В общем случае это условие, очевидно, не имеет места особенно для высоких частот спектра энергии турбулентности, при интенсивной теплоотдаче, а также для термометров не очень большой теплопроводности и не слишком малого радиуса.

Рассмотрим задачу об определении случайной ошибки измерения температуры локально-изотропного турбулентного потока без существенных ограничений.

Процесс переноса тепла в термометре описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = a\nabla^2 T^* \qquad (1)$$

с граничным условием на поверхности тела

$$-\nabla T^*|_s + \frac{\alpha}{\lambda}(\Theta - T_s^*) = 0 \qquad (2)$$

и начальным условием

$$T^*(x, y, z, 0) = 0 \qquad (3)$$

Здесь T^* — температура тела; λ, a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности тела; α — коэффициент теплообмена; Θ — температура окружающей среды.

Применив к задаче аппарат операционного исчисления, получим выражение для искомой температуры $T^*(x, y, z, t)$ в виде интеграла Дюамеля

$$T^*(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t u^*(x, y, z, \tau)\,\Theta(t-\tau)\,d\tau \qquad (4)$$

Здесь $u^*(x, y, z, t)$ представляет собой решение задачи в случае, когда температура окружающей среды описывается функцией Хевисайда (единичного скачка).

Соотношение (4) может быть представлено в следующей эквивалентной форме с учетом (3)

$$T^*(x, y, z, t) = \int_0^t G^*(x, y, z, \tau)\,\Theta(t-\tau)\,d\tau \qquad (5)$$

где $G^*(x, y, z, t)$ — локальная импульсная переходная функция. При этом для квазистационарного режима верхний предел интеграла можно принять равным бесконечности.

Так как большинство из применяемых датчиков температуры (термопары, термометры сопротивления и т. п.) преобразует в полезный сигнал не локальное, а среднеобъемное значение температуры, необходимо усреднить $T^*(V)$ по объему тела

$$T(t) = \frac{1}{V}\int_V\int_0^\infty G^*(V, \tau)\,\Theta(t-\tau)\,d\tau\,dV = \int_0^\infty G(\tau)\,\Theta(t-\tau)\,d\tau \qquad (6)$$

$$\left[G(\tau) = \frac{1}{V}\int_V G^*(V, \tau)\,dV\right]$$

Усредняя обе части (6) по времени для случая, когда $\Theta(t)$ представляет собой стационарную случайную функцию времени, получим, что средние значения температуры среды и термометра в точности совпадают

$$\langle T(t)\rangle = \langle \Theta(t-\tau)\rangle \int_0^\infty G(\tau)\,d\tau =$$

$$= \langle \Theta(t)\rangle \frac{1}{V}\int_V \{u^*(x, y, z, \infty) - u^*(x, y, z, 0)\}\,dV = \langle \Theta(t)\rangle \tag{7}$$

так как $u^*(x, y, z, \infty) = 1$, $u^*(x, y, z, 0) = 0$. Таким образом, если не учитывать систематических ошибок измерения температуры, вызванных пульсациями теплоотдачи со временем [2], то систематическая ошибка измерения температуры турбулентного потока линейным термометром отсутствует, в соответствии с чем средняя квадратичная погрешность характеризует собой случайную ошибку показаний прибора.

Полагая

$$T(t) = T_0 + T'(t), \qquad \Theta(t) = \Theta_0 + \Theta'(t) \tag{8}$$

где T_0 и Θ_0 — постоянные составляющие, T' и Θ' — пульсационные части, и учитывая, что $T_0 = \Theta_0$, получим формулу для преобразования корреляционной функции поля температур K_Θ линейным термоприемником

$$K_T(\tau) = \langle T'(t)\,T'(t+\tau)\rangle = \int_0^\infty\int_0^\infty G(\tau_1)\,G(\tau_2)\,K_\theta(\tau+\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 \tag{9}$$

Выражая корреляционную функцию через временную структурную функцию поля температур D_Θ, получим аналогичную формулу для соотношения структурных функций D_Θ и D_T на входе и выходе термометра

$$D_T(\tau) = 2(\sigma_T^2 - \sigma_\Theta^2) + \int_0^\infty\int_0^\infty G(\tau_1)\,G(\tau_2)\,D_\Theta(\tau+\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 \tag{10}$$

Здесь σ_T^2 — дисперсия показаний термометра, σ_Θ^2 — средний квадрат пульсаций температуры потока

$$D_\Theta(\tau) = \langle[\Theta'(t+\tau) - \Theta'(t)]^2\rangle$$

Из (9) или (10) при $\tau = 0$ найдем выражение для дисперсии и среднеквадратичной погрешности показаний термометра через корреляционную или структурную функцию поля температур и импульсную переходную характеристику термометра, определяемую для тел простой формы аналитическим путем

$$\sigma_T^2 = \sigma_\Theta^2 - \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty G(\tau_1)\,G(\tau_2)\,D_\Theta(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 \tag{11}$$

Общий интеграл уравнения Фурье (1) с условиями (2) и (3) при $\Theta = 1$ в соответствии с теоремой Буссинеска [3] выражается формулой

$$u^*(x, y, z, t) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} A_j U_j(x, y, z)\,e^{-\gamma_j t} \tag{12}$$

Здесь A_j — постоянные (начальные тепловые амплитуды), U_j — собственные функции задачи, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 U_j + m_j U_j = 0 \qquad (m_j = \gamma_j / a)$$

m_j — собственные числа. При этом собственные функции U_j удовлетворяют граничному условию (2) смешанного типа на поверхности S, ограничивающей рассматриваемое тело. Соответственно

$$G^*(x, y, z, t) = \sum_j A_j U_j \gamma_j e^{-\gamma_j t} \tag{13}$$

Из (11) и (13) получим

$$\sigma_T^2 = \sigma_\Theta^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_j A_k \gamma_j \gamma_k \varphi_j \varphi_k \psi_{jk} \tag{14}$$

где

$$\varphi_j = \frac{1}{V} \int_V U_j(V)\, dV, \quad \psi_{jk} = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-(\gamma_j \tau_1 + \gamma_k \tau_2)\right] D_\Theta(\tau_2 - \tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 =$$

$$= \frac{1}{\gamma_j + \gamma_k} \left[\int_0^\infty e^{-\gamma_j \tau_1} D_\Theta(\tau_1)\, d\tau_1 + \int_0^\infty e^{-\gamma_k \tau_2} D_\Theta(\tau_2)\, d\tau_2 \right] \tag{15}$$

В случае локально-изотропной турбулентности для временных структурных функций при малых τ может быть принята степенная аппроксимация Колмогорова — Обухова [4–7]

$$D_\Theta(\tau) = C\tau^\beta \tag{16}$$

где C и β — величины, не зависящие от τ. Отсюда

$$\psi_{jk} = \frac{C\Gamma(1+\beta)}{(\gamma_j + \gamma_k)} \left(\gamma_j^{-(1+\beta)} + \gamma_k^{-(1+\beta)}\right) \tag{17}$$

Эквивалентной формой (17) при учете (16) является

$$\psi_{jk} = \frac{\Gamma(1+\beta)}{(\gamma_j + \gamma_k)} \left[\gamma_j^{-1} D_\Theta(\gamma_j^{-1}) + \gamma_k^{-1} D_\Theta(\gamma_k^{-1})\right] \tag{18}$$

Подставляя (17) или (18) в (14) и меняя индексы суммирования в получившейся второй двойной сумме, найдем

$$\sigma_T^2 = \sigma_\Theta^2 - \Gamma(1+\beta) \sum_j \sum_k A_j A_k \frac{\gamma_j \gamma_k}{\gamma_j + \gamma_k} \varphi_j \varphi_k D_\Theta(\gamma_j^{-1}) \tag{19}$$

Применим полученное выражение (19) к определению дисперсии и случайной ошибки измерения температуры локально-изотропного турбулентного потока термометрическими телами, имеющими плоскую, цилиндрическую и сферическую формы (одномерная задача). Воспользовавшись некоторыми результатами, полученными в аналитической теории теплопроводности [9], для всех трех случаев после несложных преобразований получим

$$\sigma_T^{(\nu)2} = \sigma_\Theta^2 - \nu\Gamma(1+\beta) \sum_{j=1}^{\infty} F_j^{(\nu)} W_j^{(\nu)} D_\Theta\left(\frac{1}{\gamma_j^{(\nu)}}\right) \tag{20}$$

Здесь $\nu = 1, 2, 3$ для пластины, цилиндра и шара соответственно

$$\gamma_j^{(\nu)} = \frac{a\mu_j^{(\nu)2}}{R^2}, \qquad F_j^{(1)} = A_j^{(1)} \varphi_j^{(1)} = \frac{2B^2}{\mu_j^{(1)2}\left[B^2 + B + \mu_j^{(1)2}\right]}$$

$$F_j^{(2)} = A_j^{(2)} \varphi_j^{(2)} = \frac{4B^2}{\mu_j^{(2)2}\left[B^2 + \mu_j^{(2)2}\right]}, \qquad F_j^{(3)} = A_j^{(3)} \varphi_j^{(3)} = \frac{6B^2}{\mu_j^{(3)2}\left[B^2 - B + \mu_j^{(3)2}\right]} \tag{21}$$

где $\mu_j^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$ и $\mu_j^{(3)}$ — корни характеристических уравнений:

$$\operatorname{ctg} \mu_j^{(1)} = \frac{\mu_j^{(1)}}{B}, \qquad \frac{J_0(\mu_j^{(2)})}{J_1(\mu_j^{(2)})} = \frac{\mu_j^{(2)}}{B}, \quad \operatorname{tg} \mu_j^{(3)} = \frac{\mu_j^{(3)}}{1 - B} \tag{22}$$

$$W_j^{(1)} = \left(\frac{1}{\mu_j^{(1)}}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{cth} \mu_j^{(1)}}{\mu_j^{(1)}} + \frac{1}{B}\right)^{-1}, \qquad W_j^{(2)} = \left(\frac{1}{\mu_j^{(2)}}\right)^2 \left(\frac{1}{\mu_j^{(2)}} \frac{I_0(\mu_j^{(2)})}{I_1(\mu_j^{(2)})} + \frac{1}{B}\right)^{-1}$$

$$W_j^{(3)} = \left(\frac{1}{\mu_j^{(3)}}\right)^2 \left(\frac{1}{\mu_j^{(3)} \operatorname{cth} \mu_j^{(3)} - 1} + \frac{1}{B}\right)^{-1} \qquad \left(B = \frac{\alpha R}{\lambda}\right) \tag{23}$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода, I_0 и I_1 — модифицированные функции Бесселя первого рода, B — критерий Био, R — характерный размер.

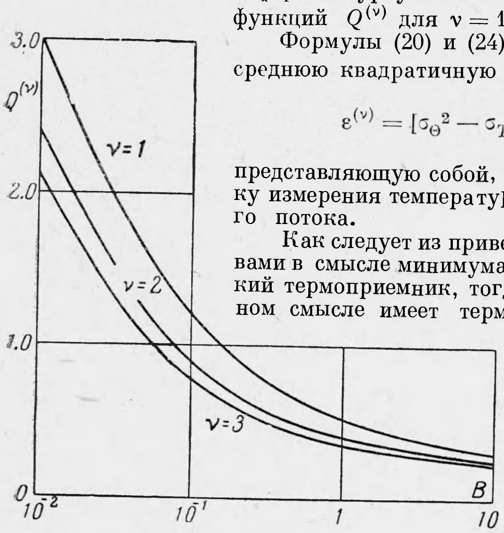
В тех случаях, когда имеются точные сведения о величинах C и β, целесообразно использовать для ψ_{jk} выражение (17). При этом

$$\sigma_T^{(\nu)2} = \sigma_\Theta^2 - CR^{2\beta}a^{-\beta}Q^{(\nu)}(B) \tag{24}$$

где

$$Q^{(\nu)}(B) = \nu\Gamma(1+\beta)\sum_{j=1}^{\infty}(\mu_j^{(\nu)})^{-2\beta}F_j^{(\nu)}W_j^{(\nu)} \tag{25}$$

Для условий атмосферной турбулентности в приземном слое $\beta \approx 0.42$ [1,8]. График функций $Q^{(\nu)}$ для $\nu = 1, 2, 3$ при $\beta = 0.42$ приведен на фигуре.



Формулы (20) и (24) дают возможность также определить среднюю квадратичную ошибку показаний термометра $a^{(\nu)}$

$$\varepsilon^{(\nu)} = [\sigma_\Theta^2 - \sigma_T^{(\nu)2}]^{1/2} = C^{1/2}R^{\beta}a^{-\beta/2}\sqrt{Q^{(\nu)}(B)} \tag{26}$$

представляющую собой, как уже указывалось, случайную ошибку измерения температуры локально-изотропного турбулентного потока.

Как следует из приведенных кривых, оптимальными свойствами в смысле минимума случайной ошибки обладает сферический термоприемник, тогда как наихудшие свойства в указанном смысле имеет термометр-пластина. Необходимо отметить наличие конечной, не обращающейся в нуль случайной ошибки при бесконечно большой теплоотдаче. В этом случае пульсации температуры на поверхности термометра совпадают по фазе и амплитуде с пульсациями температуры в потоке. Однако в результате наличия температурного перепада по толщине термометра случайная ошибка не обращается в нуль, как это имело бы место при формальном применении условия $B \to \infty$ к термометру бесконечно большой теплопроводности.

Функция $\sqrt{Q^{(\nu)}}(B)$, а следовательно, и случайная ошибка $\varepsilon^{(\nu)}$ меняются в диапазоне $10^{-2} \leqslant B \leqslant 10$ примерно в три раза. При $B > 10$ функция $\sqrt{Q^{(\nu)}}(B)$ остается постоянной и равной ≈ 0.5.

Поступила 26 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Я г л о м А. М. Об учете инерции метеорологических приборов. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, вып. 24.
2. К а г а н о в М. А., Р о з е н ш т о к Ю. Л. О температуре тел в среде с пульсирующей теплоотдачей и температурой. ПМТФ, 1962, № 3.
3. B o u s s i n e s q T. V. Theorie analitique de la chaleur. Paris, 1901.
4. К о л м о г о р о в А. Н. Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности. Докл. АН СССР, 1941, т. 32, 19.
5. О б у х о в А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1941, № 4—5.
6. О б у х о в А. М. Структура температурного поля в турбулентном потоке. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1949, 13, № 1.
7. Я г л о м А. М. О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке. Докл. АН СССР, 1949, т. 69, № 6.
8. П е р е п е л к и н а А. В. Некоторые результаты исследования турбулентных пульсаций температуры и вертикальной составляющей скорости ветра. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1957, № 6.
9. Л ы к о в А. В. Теория теплопроводности. Гостехтеоретиздат, 1952.