

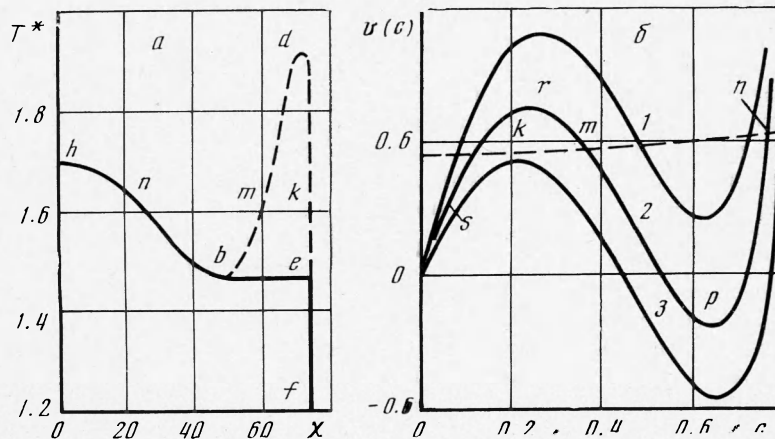
УСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К ТРЕХМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

А. А. Маслов

(Новосибирск)

Исследуется устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на сильно охлажденной пластине по отношению к трехмерным возмущениям. Рассматриваются две кривые нейтральной устойчивости, существование которых было обнаружено в [1]. На основе асимптотического анализа показано, что каждая из этих двух кривых нейтральной устойчивости в некотором диапазоне углов распространения возмущения разделяется на замкнутую и обычную нейтральные кривые. При охлаждении поверхности замкнутая нейтральная кривая стягивается в точку. Результаты асимптотического анализа подтверждены численным интегрированием уравнений устойчивости.

1. Влияние трехмерности возмущений на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя над охлаждаемой поверхностью исследовалось в [2]. Было показано, что понижение температуры поверхности увеличивает критическое число Рейнольдса потери устойчивости R^* и уменьшает



Фиг. 1

область неустойчивости для всех трехмерных возмущений. Однако полная стабилизация в отличие от случая двумерных возмущений [3] имеет место только в диапазоне углов $0 < \chi < \chi^*$, где χ — угол между направлением распространения возмущения и направлением набегающего потока, $\chi^* = \arccos M^{-1}$, M — число Маха набегающего потока. Для $\chi > \chi^*$ при любой температуре поверхности имеются нейтральные и возрастающие возмущения, но R^* для них настолько велики (числа Рейнольдса, построенные по толщине пограничного слоя, $\sim 10^6$), что они, по-видимому, не имеют практического значения. Критические значения температуры поверхности $T^* = T^*(\chi)$, ниже которых наступает полная стабилизация пограничного слоя на плоской пластине, были рассчитаны в [2] асимптотическим методом для $M = 4$ (сплошная кривая на фиг. 1, а).

Температуры полной стабилизации определялись из условия, которое должно выполняться для $c \geq c_s$

$$(1.1) \quad v(c, T) \geq \max |\psi_i(z)|$$

Здесь c — фазовая скорость возмущения, T — температура поверхности, $v(c, T)$ — функция невязки решений, вид которой для $M = 4$ показан на фиг. 1, б, $\psi_i(z)$ — мнимая часть функции вязких решений, максимум которой в зависимости от c отмечен пунктирной линией на фиг. 1, б, c_s — наименьшее значение фазовой скорости, при котором возможны затухающие вне пограничного слоя решения.

В данной работе рассматриваются нейтральные кривые при температурах поверхности, меньших температур полной невязкой стабилизации. Для таких нейтральных кривых $c \rightarrow c_s$ как на нижней, так и на верхней асимптотах. Значению c_s соответствует число Рейнольдса $R_s = \infty$ [3]

$$(1.2) \quad c_s = 1 - (M \cos \chi)^{-1}$$

Если при фиксированном значении T для $c > c_s$ $v(c)$ — монотонная функция c , температура полной стабилизации определяется из условия [2,3]

$$(1.3) \quad v(c_s, T) = \max |\psi_i(z)|$$

Решение уравнения (1.3) дает зависимость $T(\chi)$, изображенную на фиг. 1, а линией *h b d e f*. Участки *h b* и *e f* совпадают с условиями полной стабилизации. Значение пунктирной кривой, появляющейся из-за немонотонности $v(c)$, в [2] выяснено не было. Было высказано предположение, что при некоторой температуре поверхности возможно разделение нейтральной кривой на две, одна из которых стабилизируется обычным образом, а вторая продолжает существовать при конечных R .

Как отмечается в [2], чтобы подтвердить это предположение, необходим метод решения уравнений устойчивости для сверхзвуковых течений при конечных волновых числах α (при полной стабилизации, рассматриваемой в работе [2], $\alpha = 0$). Авторы [2] таким методом не располагали и дальнейший анализ в их работе не проводился.

В последние годы разработано несколько методов, позволяющих решать уравнения устойчивости численно. Это дает возможность завершить асимптотический анализ [2] и проконтролировать полученные с его помощью выводы точными численными расчетами.

2. Продолжим асимптотический анализ работы [2], основываясь на фиг. 1, а, б. Рассмотрим поведение нейтральных кривых при фиксированной температуре поверхности. Выберем такую температуру T_1 , для которой $\max |\psi_i(z)|$ три раза пересекает зависимость $v(c)$ на фиг. 1, б (кривая 2) и угол распространения возмущения $\chi_1 \leq \chi^*$ (угол, для которого c_s близко к нулю).

Тогда на отрезке *s k* (фиг. 1, б) $v(c)$ — монотонная функция c и должна существовать обычная нейтральная кривая. Каждому c из $c_k > c \geq c_s$ соответствуют два значения $\psi_i(z)$ — одно для верхней ветви нейтральной кривой, другое — для нижней [3]. При $c = c_k$ верхняя и нижняя ветви нейтральной кривой сливаются, при этом выполняется условие [3]

$$(2.1) \quad v(c) = \max |\psi_i(z)|$$

На участке *m n* (фиг. 1, б) $v(c)$ — немонотонная функция c . Для c из $c_m < c < c_n$ $v(c) < \max |\psi_i(z)|$ и возможны решения, соответствующие нейтральным и усиливающимся возмущениям. Функция $v(c)$ дважды пересекает $\psi_i(z)$, т. е. должны существовать две ветви нейтральной кривой, которые сливаются при $c = c_m$ и $c = c_n$ (для этих значений c

выполняется условие (2.1)), ограничивая замкнутую область неустойчивости. Таким образом, для температуры T_1 кроме обычной нейтральной кривой, определяемой отрезком sk зависимости $v(c)$, должна существовать замкнутая нейтральная кривая.

При уменьшении угла в области $\chi < \chi_1$ нижний предел для c , определяемый равенством (1.2), будет возрастать. Для углов, при которых $c_s > c_k$, будет существовать только одна замкнутая нейтральная кривая. На фиг. 1, *a* эта область ограничена пунктирной кривой bde .

Для угла, при котором $c_s = c_m$, число Рейнольдса, соответствующее этой точке нейтральной кривой, $R_m = R_s = \infty$, для меньших углов нейтральная кривая будет разомкнутой. На фиг. 1, *a* это линия bd .

Рассмотрим поведение нейтральных кривых при изменении температуры поверхности для фиксированного угла χ_1 .

Поведение нейтральной кривой, соответствующей отрезку sk зависимости $v(c)$, при изменении температуры поверхности такое же, как поведение нейтральной для двумерных возмущений. При уменьшении температуры для $T < T_1$ точки s и k зависимости $v(c)$ сближаются (кривая 1 на фиг. 1, *b*) и при достижении температур, отмеченных линией def на фиг. 1, *a*, значение числа Рейнольдса R для всех точек нейтральной кривой становится бесконечным, т. е. наступает полная стабилизация [2,3].

Замкнутая нейтральная кривая, соответствующая отрезку mpn зависимости $v(c)$ при изменении температуры поверхности ведет себя иначе. При уменьшении температуры поверхности для $T < T_1$ сближаются точки m и n (фиг. 1, *b*), и при температуре, когда точка p касается линии $\max[\psi_i(z)]$, замкнутая нейтральная кривая стягивается в точку. Эта температура определяется касательной в точке b на фиг. 1, *a*. Так как для всех значений c из интервала $c_m < c < c_n$ выполняется условие $c > c_s$, стягивание замкнутой нейтральной кривой происходит при конечных значениях R . Для $T > T_1$ сближаются точки k и m и при температуре, когда точка r касается линии $\max[\psi_i(z)]$, замкнутая нейтральная кривая сливается с обычной нейтральной кривой. Эта температура определяется касательной в точке d на фиг. 1, *a*.

Рассматривалась нейтральная кривая, определяемая первым максимумом $\psi_i(z)$ для $z \sim 3$ (пунктирная кривая на фиг. 1, *a*). Кроме этой нейтральной кривой при низких температурах поверхности существует еще одна вязкая нейтральная кривая [1], которая определяется вторым максимумом $\psi_i(z)$. Для малых c функция $\psi_i(z)$ очень хорошо приближается модифицированной функцией Титбенса $F_i(z)$. Тогда вторая нейтральная кривая определяется вторым максимумом $F_i(z)$, проявляющимся при $z \sim 6$. Значения $F(z)$ до $z = 10$ приведены в [4]. Для этой кривой справедливы приведенные выше рассуждения, но так как второй максимум $\psi_i(z)$ на порядок меньше, чем первый (~ 0.05), то температуры, при которых происходит образование замкнутой нейтральной кривой и стягивание ее в точку, будут больше, чем для рассмотренной ранее нейтральной кривой.

3. Для проверки выводов асимптотического анализа были проведены численные расчеты. Исследование проводилось на основе численного интегрирования уравнений устойчивости Лиза и Линя, дополненных членами, содержащими поперечную скорость основного течения [5]. Уравнения эти справедливы для плоских возмущений. Учет трехмерности проводился по приближенному методу Дана и Линя [2]. В уравнения устойчивости для плоских возмущений делалась подстановка

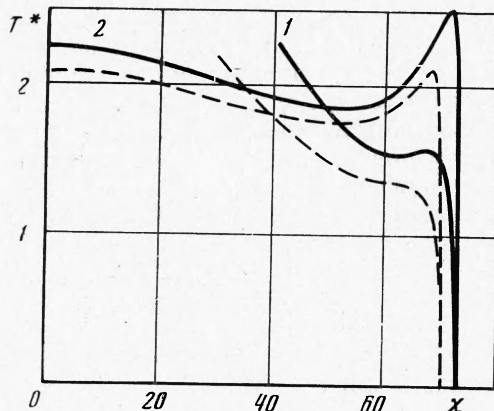
$$M^\circ = M \cos \chi, \quad R^\circ = R \cos \chi, \quad \alpha^\circ R^\circ = \alpha R, \quad c^\circ = c$$

Результаты, полученные по методу Дана и Линя для небольших сверхзвуковых чисел Маха ($M < 3$), мало отличаются от результатов, полу-

ченных при точном учете трехмерности возмущений [6], но применение этого метода позволяет значительно уменьшить время машинного счета. Температуры полной стабилизации определялись численным методом, предложенным в [1]. Кривые нейтральной устойчивости рассчитывались методом [7], позволяющим строить нейтральную кривую из условий ее полной стабилизации.

Осредненные величины, входящие в уравнения устойчивости, рассчитывались для пограничного слоя на плоской пластине при $\gamma = 1.41$, числе Прандтля $\sigma = 0.72$, $T_\infty = 157^\circ$, вязкости, изменяющейся по закону Саттерленда. Метод решения описан в [8].

В первой серии расчетов определялись температуры полной стабилизации для двух «вязких» нейтральных кривых при $M = 3.5$ (существование этих кривых для плоских возмущений было показано в [1] и исследовалось в [7]). Результаты расчета приведены на фиг. 2. Цифрой 1 отмечены температуры полной стабилизации первой кривой (соответствующей первому максимуму $\psi_i(z)$), цифрой



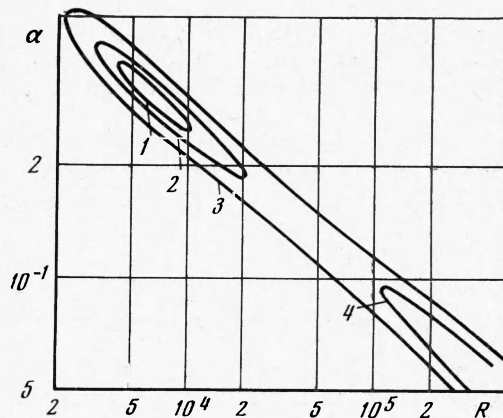
Фиг. 2

2 — второй (второму максимуму $\psi_i(z)$). Для $\chi = 40^\circ$ первая нейтральная кривая полностью исчезает аналогично тому, как она исчезла при некотором числе M для плоских возмущений [1,7]. Для $\chi < 40^\circ$ при $M = 3.5$ существует только вторая нейтральная кривая.

Особенностью зависимости $T^*(\chi)$ как для первой, так и для второй нейтральных кривых является ее немонотонность для углов $\sim 65^\circ$. Это объясняется тем, что численный метод определения температур полной стабилизации [1] эквивалентен решению уравнения (1.3), т. е. результаты, полученные на его основе, эквивалентны кривой $h b d f$ на фиг. 1, а. Тогда согласно асимптотическому анализу должны существовать замкнутые нейтральные кривые, которые при уменьшении T стягиваются в точку.

Немонотонность зависимости $T^*(\chi)$ наблюдается не для всех чисел M . На фиг. 2 пунктирной кривой нанесены температуры полной стабилизации для $M = 3$.

Для первой нейтральной кривой $T^*(\chi)$ — монотонная функция, замкнутая нейтральная кривая не образуется. Для второй нейтральной кривой область существования замкнутой нейтральной кривой значительно уменьшилась. Такое же сглаживание зависимости $T^*(\chi)$ при уменьшении M наблюдалось при асимптотическом определении температур



Фиг. 3

полной стабилизации [9]. Во второй серии расчетов исследовалось поведение первой нейтральной кривой для $\chi_1 = 71^\circ$ при изменении температуры поверхности T . Результаты расчетов приведены на фиг. 3.

Для значения температуры $T = 1.6$ существует одна нейтральная кривая (кривая 3 на фиг. 3). При уменьшении температуры поверхности она разделяется и при $T = 1.562$ существуют две нейтральные кривые (2 и 4), одна из которых замкнута (2). Для разомкнутой нейтральной кривой критическое значение числа Рейнольдса R^* на два порядка больше, чем для замкнутой. При уменьшении температуры поверхности величина R^* для нее еще больше увеличивается, поэтому в дальнейшем эта нейтральная кривая не рассматривается. Для $T_1 = 1.551$ область неустойчивости уменьшается (кривая 1 на фиг. 3) и стягивается в точку.

В третьей серии расчетов (фиг. 4) исследовалось поведение замкнутой нейтральной кривой для $T_1 = 1.562$ при изменении χ . Для $\chi = 62.5^\circ$ температура $T > T^*$ на фиг. 4 (кривая 4) разомкнута. С ростом угла нейтральная кривая замыкается и для $\chi = 67^\circ$ существует только замкнутая кривая (3). С дальнейшим ростом угла χ кривая остается замкнутой. Минимальное значение R^* достигается при $\chi = 71^\circ$ (для теплоизолированной поверхности наиболее опасны возмущения, распространяющиеся под углом $\chi \sim 60^\circ$).

Таким образом, подтвердились основные выводы асимптотического анализа, касающиеся поведения нейтральной кривой 1 при изменении T и χ . Только температура, при которой замкнутая нейтральная кривая перестает существовать, лежит, как видно из расчетов, несколько ниже, чем касательная в точке b .

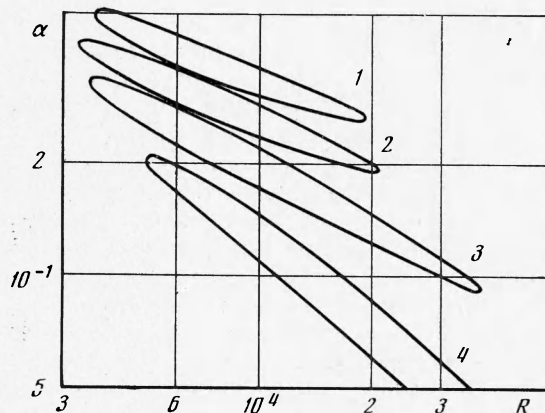
Поведение нейтральной кривой 2 (фиг. 2) при изменении χ и T аналогично поведению кривой 1, но R^* для нее в диапазоне опасных углов ($\chi \sim 60 \div 70^\circ$) значительно больше, чем для первой нейтральной кривой, взятой при тех же условиях.

Автор благодарит С. А. Гапонова за помощь в работе и обсуждения.

Поступила 10 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов С. А., Маслов А. А. Численное решение задачи о полной стабилизации сверхзвукового пограничного слоя. ПМТФ, 1972, № 2.
2. Dunn D. W., Lin C. C. On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 7.
3. Лунь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. Miles J. W. The hydrodynamic stability of a thin film of liquid in uniform motion. J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, pt. 4.
5. Cheng S.-I. On the stability of laminar boundary layer flow. Quart. Appl. Math., 1953, vol. 11, No. 3.
6. Brown W. B. Stability of compressible boundary layers. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 10.
7. Маслов А. А. Численное исследование устойчивости сверхзвукового ламинарного пограничного слоя. ПМТФ, 1972, № 5.
8. Mack L. M. Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer. In: Methods Computat. Phys., vol. 4, New York — London, Acad. Press., 1965.
9. Reshotko E. Transition reversal and Tollmien-Schlichting instability. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3.



Фиг. 4