УДК 532.5

К НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕРМИКОВ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

Л. Х. Ингель

Научно-производственное объединение "Тайфун", 249038 Обнинск, Россия
Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, 119017 Москва, Россия
E-mail: lev.ingel@gmail.com

Нелинейная интегральная модель турбулентного термика обобщена на случай наличия горизонтальной составляющей его движения относительно среды (например, всплывания термика в сдвиговом потоке). В отличие от традиционных моделей учтена возможность тепловыделения в термике. Получены аналитические решения для кусочно-постоянного вертикального профиля горизонтальной скорости среды и постоянного вертикального сдвига скорости, описывающие различные режимы динамики термиков. Исследовано нелинейное взаимодействие горизонтальной и вертикальной составляющих движения термика, поскольку каждая из них влияет на интенсивность вовлечения окружающей среды, т. е. на скорость увеличения размеров термика и, следовательно, на его подвижность. Показано, что интенсификация вовлечения среды за счет взаимодействия термика с поперечным потоком может приводить к существенному уменьшению его подвижности.

Ключевые слова: конвекция, термики, турбулентность, интегральные модели, сдвиговые течения, нелинейность, аналитические решения.

DOI: 10.15372/PMTF20180203

Введение. Турбулентная конвекция от локализованных источников плавучести и (или) вертикального импульса, действующих в течение малого промежутка времени, часто моделируется с помощью изолированных термиков (см., например, работы [1–12] и библиографию к ним). В такой модели область возмущения (термик) приближенно представляется в виде поднимающегося (или опускающегося — в зависимости от знака возмущения) "пузыря" или вихревого кольца переменного объема и массы. Объем термика постепенно увеличивается вследствие захвата им прилегающих объемов окружающей среды (для краткости нередко используется термин "вовлечение"). Для термика записывается система уравнений баланса массы, импульса и плавучести. Рассматривается система уравнений в виде (см., например, [2. Разд. 6.3.2; 6])

$$\frac{d}{dt}R^3 = 3\beta R^2 w; \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(R^3 w) = \beta_1 R^3 b; \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(R^3 b) = -N^2 R^3 w, \qquad (3)$$

Работа выполнена в рамках Программы № 56 фундаментальных исследований Президиума РАН.

где R, w, b — неизвестные радиус, скорость всплывания и удельная плавучесть термика, имеющая размерность ускорения и определяемая соотношением $b = g\rho'/\langle\rho\rangle$; g — ускорение свободного падения; $\langle\rho\rangle$ — невозмущенная плотность среды; ρ' — возмущение плотности; N — частота плавучести в среде; β, β_1 — безразмерные постоянные, первая из которых определяется интенсивностью вовлечения окружающей среды (в [2] рассматривались значения $\beta = 1/4$, $\beta_1 = 2/3$). Адекватность данной теоретической модели показана, например, в работе [12] путем сравнения с результатами численной модели высокого разрешения.

Уравнение (1) описывает баланс массы движущегося термика; полагается, что интенсивность вовлечения окружающей среды пропорциональна площади поверхности термика и скорости его движения относительно среды. Заметим, что уравнение (1) записано неточно: в правой части, очевидно, должна использоваться не скорость w, а абсолютное значение скорости термика относительно окружающей среды. Вообще говоря, вертикальная скорость w может быть отрицательной (направленной вниз), например, в случае термика с отрицательной плавучестью.

Задача существенно усложняется и недостаточно исследована в случаях, когда термик может двигаться под углом к вертикали. Такие ситуации возникают при подъеме или снижении термика в горизонтальном потоке с вертикальным сдвигом. Например, при значительной конвективной неустойчивости в атмосфере оседающий объем воздуха (термик с отрицательной плавучестью), движущийся по горизонтали с быстрым фоновым потоком, может переносить значительный горизонтальный импульс к приземному слою, в котором фоновое горизонтальное течение относительно медленное, что может служить одним из механизмов возникновения резких порывов ветра — шквальных ветров (микрошквалов) в приземном слое [13]. При движении в таком потоке термик приобретает также горизонтальную скорость относительно фонового течения. По данным автора настоящей работы имеются лишь отдельные небесспорные попытки соответствующего обобщения теории термиков [1, 8–10]. В этих обобщениях используется ряд гипотез и допущений; например, в некоторых случаях не учитывалась стратификация плотности среды; при численном моделировании рассматривались, как правило, случаи высокотемпературных термиков. Ниже рассматривается обобщение системы (1)–(3), которое позволяет получить решение нелинейной задачи в замкнутом аналитическом виде с учетом стратификации среды и наличия источника тепла в термике. Соответствующее обобщение уравнения (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\,R^3 = 3\beta R^2 (w^2 + \Delta u^2)^{1/2}, \qquad \Delta u \equiv u - U, \tag{4}$$

где u — горизонтальная составляющая скорости термика; U — скорость фонового горизонтального течения, зависящая от высоты, а следовательно, от времени перемещения термика на определенный уровень.

1. Случай бессдвигового сносящего потока. Представляет интерес случай $U = \text{const}$, когда в процессе движения в вертикальном направлении термик попадает в слой воздуха, горизонтальная скорость которого U существенно отличается от горизонтальной скорости термика u_0 в момент его входа в этот слой; при дальнейшем движении термика фоновая скорость U меняется несущественно. (Это соответствует частному случаю сдвигового фонового течения, в котором вертикальный сдвиг происходит в тонком слое.) Одним из примеров является случай, когда термик с отрицательной плавучестью, с большой скоростью переносимый горизонтальным потоком, оседая, попадает в приземный слой, в котором фоновая горизонтальная скорость незначительна и несущественно меняется при изменении высоты.

Уравнение (2) описывает изменение вертикальной составляющей вектора количества движения термика вследствие действия сил плавучести. В горизонтальном направлении подобные силы отсутствуют, поэтому с учетом $U = \text{const}$ аналогичное уравнение для горизонтальной составляющей вектора количества движения имеет вид

$$\frac{d}{dt}(R^3 \Delta u) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5), обобщенное на случай сдвигового фонового потока, имеет вид

$$\frac{d}{dt}(R^3 \Delta u) = -U' R^3 w \tag{6}$$

(штрих обозначает вертикальную производную (сдвиг скорости)). Уравнение (6) аналогично уравнению (3), однако описывает изменение горизонтальной составляющей вектора количества движения.

Для увеличения общности в уравнении для изменения плавучести (3) дополнительно учитывается возможность существования источника плавучести в термике:

$$\frac{d}{dt}(R^3 b) = -N^2 R^3 w + Q. \tag{7}$$

Здесь Q — интенсивность источника плавучести, связанного, например, с тепловыделением в термике [7]. Подобные задачи с объемным тепловыделением возникают, в частности, в теории активных воздействий на атмосферные процессы. Для искусственного стимулирования конвекции предложено, например, внесение в воздух мелкодисперсной примеси, поглощающей коротковолновое солнечное излучение. Вследствие тепловыделения облако такой практически невесомой примеси должно всплывать. Для описания такой конвекции используются, в частности, модели типа термиков [7]. В простейших случаях интегральное тепловыделение в термике можно считать постоянным: $Q = \text{const}$.

Рассматривается замкнутая система уравнений: уравнения (2), (4), (5), (7); в качестве начальных данных принимаются значения искомых величин R, u, w, b в начальный момент времени $t = 0$ (далее отмечены индексом 0).

Из уравнения (5) несложно получить закон адаптации горизонтальной скорости термика к скорости фонового течения:

$$\Delta u(t) = \Delta u_0 (R_0 / R(t))^3. \tag{8}$$

Из уравнений (2), (6) следует линейное уравнение относительно неизвестной величины $R^3 w$

$$\frac{d^2}{dt^2}(R^3 w) + \beta_1 N^2 R^3 w = \beta_1 Q.$$

В случае $Q = \text{const}$ решение имеет вид

$$R^3 w = A \sin N_1 t + B \cos N_1 t + Q_1, \qquad b = \frac{N}{\beta_1^{1/2} R^3}(A \cos N_1 t - B \sin N_1 t), \tag{9}$$

где

$$A = \frac{\beta_1 b_0 R_0^3}{N_1}, \qquad B = w_0 R_0^3 - Q_1, \qquad N_1 = \beta_1^{1/2} N, \qquad Q_1 = \frac{Q}{N^2},$$

постоянные интегрирования A, B определяются из начальных условий.

Исключая из равенств (4), (8), (9) все неизвестные, кроме R, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d}{dt} R^4 = 4\beta \big[(A \sin N_1 t + B \cos N_1 t + Q_1)^2 + (R_0^3 \Delta u_0)^2\big]^{1/2}. \tag{10}$$

Решение (10) можно представить в виде

$$R = R_0\Big\{1 + \frac{4\beta}{R_0^4}\int\limits_0^t \big[((A^2+B^2)^{1/2}\sin(N_1t'+\varphi)+Q_1)^2+D^2\big]^{1/2}\,dt'\Big\}^{1/4}, \tag{11}$$

где

$$\varphi = \arccos\,(A/(A^2+B^2)^{1/2}), \qquad D = R_0^3\Delta u_0.$$

Интеграл в правой части равенства (11) можно выразить в явном виде, однако в общем случае полученное выражение является очень громоздким (его можно получить, например, с помощью интегрированной системы компьютерной математики Mathematica). Данное соотношение позволяет проанализировать зависимости динамики термика от стратификации, тепловыделения и начальных данных R_0, Δu_0, w_0, b_0.

В случае $Q = 0$ (термик в отсутствие источника тепла) решение выражается через эллиптические интегралы второго рода [14]:

$$R = R_0\Big\{1 + \frac{4\beta D}{R_0^4 N_1}\,E\Big(N_1t+\varphi\Big| -\Big(\frac{A^2+B^2}{D^2}\Big)^2\Big)\Big|_{t=0}^{t}\Big\}^{1/4}.$$

В качестве простейшего примера рассмотрим частный случай отсутствия тепловыделения, стратификации, плавучести ($Q = 0$, $N = 0$, $b \equiv 0$), т. е. “чисто механическое” взаимодействие термика с окружающей средой при наличии как вертикальной, так и горизонтальной составляющей его скорости относительно среды. В этом случае из (9) следует

$$w(t) = w_0(R_0/R(t))^3. \tag{12}$$

Подставляя выражения (8), (12) в уравнение (4), получаем

$$\frac{d}{dt}\,R^4 = \frac{R_0^4}{t_1}, \qquad R = R_0\Big(1+\frac{t}{t_1}\Big)^{1/4}, \qquad \frac{w}{w_0} = \frac{\Delta u}{\Delta u_0} = \Big(1+\frac{t}{t_1}\Big)^{-3/4};$$

$$t_1 = \frac{R_0}{4\beta}\,(w_0^2+\Delta u_0^2)^{-1/2}. \tag{13}$$

Обозначив через z вертикальную координату термика, находим $w = dz/dt$, тогда закон движения термика в вертикальном направлении принимает вид

$$z = z_0 + 4w_0t_1(1+t/t_1)^{1/4}.$$

Из уравнения (4) получаем соотношение

$$\frac{d}{dz}\,R = \beta\Big[1+\Big(\frac{\Delta u}{w}\Big)^2\Big]^{1/2}.$$

Из приведенных выше результатов следует, что движение термика в горизонтальном направлении оказывает влияние на движение в вертикальном направлении. Наличие горизонтальной составляющей движения термика относительно среды приводит к более интенсивному вовлечению окружающей среды, дополнительному увеличению объема термика и замедлению его движения в вертикальном направлении. Характерное время, в течение которого термик адаптируется к движению окружающей среды, составляет порядка t_1 (13). Например, в случае $\Delta u_0 = 20$ м/с $\gg w_0$, $R_0 = 300$ м, $\beta = 0{,}25$ разность скоростей уменьшается в три раза за время порядка 1 мин, что согласуется с характерной продолжительностью шквальных ветров, обусловленных интенсивной конвекцией [13].

Рассмотрим пример конвективного движения термика. В предположении отсутствия тепловыделения и фоновой стратификации примем $w_0 = 0$, $b_0 \neq 0$. Тогда решение уравнения (11) записывается в виде

$$R = R_0\Big[1 + \frac{2\beta\beta_1 b_0}{R_0}\Big(t(t^2+T^2)^{1/2} + T^2 \ln\frac{t+(t^2+T^2)^{1/2}}{T}\Big)\Big]^{1/4}, \qquad T = \frac{\Delta u_0}{\beta_1 b_0}.$$

Отсюда, используя уравнение (1), нетрудно получить

$$w = \frac{1}{\beta}\,\frac{d}{dt}\,R = \frac{1}{4\beta R^3}\,\frac{d}{dt}\,R^4 = \beta_1 b_0\,\frac{(t^2+T^2)^{1/2}}{(R/R_0)^3}.$$

Таким образом, наличие сносящего потока ($T \neq 0$) оказывает существенное влияние при значениях времени, меньших или порядка T. При $\Delta u_0 = 10$ м/с, $\beta_1 = 2/3$ и начальном перегреве термика, равном 2 К, в приближении Буссинеска $b_0 \approx 0{,}07$, $T \approx 4$ мин. При таких значениях времени наличие сносящего потока приводит к более интенсивному вовлечению окружающей среды и, следовательно, к уменьшению подвижности термика.

Рассмотрим еще один пример. Представляет интерес режим всплывания термика, при котором два слагаемых в правой части равенства (7) взаимно компенсируются, т. е. выполняются соотношения

$$w = Q_1/R^3, \qquad b = 0. \tag{14}$$

Предполагается, что соотношения (14) выполняются уже в начальный момент времени. Физический смысл такого режима следующий: увеличение плавучести термика за счет тепловыделения компенсируется его подъемом в менее плотные слои среды. Такие режимы с нейтральной плавучестью характерны для конвекции с объемным тепловыделением [7]. Подставляя выражения (8), (14) в уравнение (4), находим

$$R = R_0\Big\{1 + \frac{4\beta}{R_0^4}\,\big[Q_1^2 + (R_0^3\Delta u_0)^2\big]^{1/2} t\Big\}^{1/4}.$$

В данном случае наличие горизонтального ветра также приводит к более быстрому увеличению объема термика и замедлению его всплывания.

Заметим, что полученные результаты справедливы также в случае покоящейся среды, когда термик “запускается” под углом к вертикали ($U = 0$, $\Delta u_0 \neq 0$). Найденные решения, в частности, описывают нелинейное взаимодействие двух составляющих движения термика, поскольку интенсивность вовлечения окружающей среды (изменение объема термика) зависит от каждой составляющей движения.

2. Термик в горизонтальном потоке с однородным вертикальным сдвигом ($U' = \mathrm{const}$). В данном случае вместо уравнения (5) рассматривается уравнение (6), интегрируя которое с учетом (9) при $Q = \mathrm{const}$ получаем

$$\Delta u = \Delta u_0\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^3 - \frac{U'}{N_1 R^3}\,[N_1 Q_1 t + A(1-\cos N_1 t) + B\sin N_1 t]. \tag{15}$$

Подставляя (9), (15) в уравнение (4) и интегрируя, находим

$$R = R_0\Big\{1 + \frac{4\beta}{R_0^4}\int\limits_0^t \Big[(Q_1 + A\sin N_1 t' + B\cos N_1 t')^2 + \\ + \Big(D - \frac{U'}{N_1}\,(N_1 Q_1 t + A(1-\cos N_1 t') + B\sin N_1 t')\Big)^2\Big]^{1/2} dt'\Big\}^{1/4}. \tag{16}$$

При $U' = 0$ решение (16) переходит в равенство (11).

Рассмотрим некоторые частные случаи. Влияние начального "отклонения" горизонтальной скорости Δu_0 исследовалось выше, далее рассматриваются случаи $\Delta u_0 = 0$, $D = 0$.

В случае $Q = 0$, $N = 0$, $w_0 = 0$, $b_0 \neq 0$ (термик в отсутствие объемного тепловыделения и начального вертикального механического импульса, движущийся в нейтрально стратифицированной среде) имеем

$$w = \beta_1 b_0 (R_0/R)^3 t,$$

решение для радиуса термика принимает вид

$$R = R_0 \Big\{ 1 + \frac{16\beta\beta_1 b_0}{3R_0 U'^2} \Big[\Big(1 + \frac{U'^2}{4}\, t^2 \Big)^{3/2} - 1 \Big] \Big\}^{1/4}.$$

При $U' \to 0$

$$R = R_0 \Big(1 + \frac{2\beta\beta_1 b_0}{R_0}\, t^2 \Big)^{1/4}.$$

При наличии сдвига скорости и больших значениях времени $R \sim t^{3/4}$, $w \sim t^{-5/4}$, при отсутствии — $R \sim t^{1/2}$, $w \sim t^{-1/2}$. Таким образом, наличие сдвига скорости существенно ускоряет увеличение размеров термика и замедляет его движение в вертикальном направлении. Вертикальное перемещение становится конечным, в то время как в случае отсутствия сдвига при нейтральной стратификации в данной модели оно не ограничено.

Рассмотрим более сложный случай устойчивой стратификации $Q = 0$, $N > 0$, $w_0 = 0$, $b_0 \neq 0$. Выражение для вертикальной скорости имеет вид

$$w = \frac{\beta_1 b_0}{N_1} \Big(\frac{R_0}{R} \Big)^3 \sin N_1 t.$$

Ограничиваясь периодом до момента остановки вертикального движения термика $0 \leqslant t \leqslant \pi/N_1$, для радиуса термика получаем решение в виде

$$R = R_0 \Big\{ 1 + \frac{4\beta\beta_1 b_0}{N_1 R_0} \int\limits_0^t \Big[\sin^2 N_1 t' + \Big(\frac{U'}{N_1} \Big)^2 (1 - \cos N_1 t')^2 \Big]^{1/2} dt' \Big\}^{1/4}. \qquad (17)$$

При малых значениях безразмерного параметра U'/N_1 (при больших значениях числа Ричардсона для фонового потока) вклад в подынтегральное выражение слагаемого, зависящего от сдвига скорости, незначителен, что может служить критерием для учета сдвига фонового течения. Интеграл в (17) можно выразить в явном виде, однако в общем случае выражение является громоздким. Сравним простые случаи $U'/N_1 = 0$, $U'/N_1 = 1$. В первом случае интеграл в (17) равен

$$\frac{1}{N_1}\,(1 - \cos N_1 t) = \frac{2}{N_1}\, \sin^2 \frac{N_1 t}{2}, \qquad (18)$$

во втором —

$$\frac{4}{N_1} \Big(1 - \cos \frac{N_1 t}{2} \Big) = \frac{8}{N_1}\, \sin^2 \frac{N_1 t}{4}. \qquad (19)$$

Нетрудно проверить, что слагаемое, содержащее интеграл, может быть основным в (17). Максимальное значение отношения (19) к (18) $1/\cos^2(N_1 t/4)$ равно двум (в конце рассматриваемого интервала времени). Следовательно, наличие сдвига скорости может приводить к увеличению линейных размеров термика приблизительно на 20 %. Таким образом, результаты, полученные в [12] без учета фонового ветра, имеют тот же порядок величины, что и при умеренных значениях U'/N_1.

Рассмотрим случай термика с постоянным объемным тепловыделением $Q \neq 0$. Пусть в начальный момент отклонение плавучести отсутствует: $A = B = 0$. В дальнейшем режим с нейтральной плавучестью сохраняется, поэтому выполняются равенства (14). Решение для радиуса термика имеет вид

$$R = R_0\Big[1 + \frac{2\beta Q_1}{R_0^4}\Big(t(1+U'^2t^2)^{1/2} + \frac{1}{|U'|}\ln\big|U't + (1+U'^2t^2)^{1/2}\big|\Big)\Big]^{1/4}.$$

Таким образом, при значениях времени, бóльших или порядка $|U'|^{-1}$, наличие сдвига скорости фонового течения приводит к более быстрому увеличению размеров термика и, следовательно, к замедлению его вертикального движения, которое в этом случае становится конечным.

Заключение. В работе показано, что при наличии горизонтального течения термик сильнее взаимодействует с окружающей средой. Интенсификация вовлечения окружающей среды приводит к уменьшению подвижности термика. Рассмотренная интегральная модель позволяет в явном виде анализировать различные режимы движения турбулентных термиков в сносящих потоках. Получены зависимости динамики термика от стратификации, сдвига скорости фонового течения, тепловыделения и начальных данных. Установлена непосредственная зависимость динамики вертикального движения термика от числа Ричардсона для фонового течения. Показано, что наиболее существенное влияние сдвиг горизонтального течения оказывает при слабой стратификации. Также показано, что вследствие этого сдвига даже при наличии в термике стационарного источника плавучести и безразличной стратификации среды движение термика в вертикальном направлении оказывается ограниченным.

Автор выражает благодарность Ю. С. Русакову за полезные замечания, способствовавшие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Richards J. M.** The effect of wind shear on puff // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1970. V. 96, N 410. P. 702–714.
2. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
3. **Андреев В.** Динамика атмосферных термиков / В. Андреев, С. Панчев. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
4. **Скорер Р.** Аэродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980.
5. **Гостинцев Ю. А., Лазарев В. В., Солодовник А. Ф., Шацких Ю. В.** Турбулентный термик в стратифицированной атмосфере / АН СССР. Ин-т хим. физики. Препр. Черноголовка, 1985.
6. **Emanuel K. A.** Atmospheric convection. N. Y.: Oxford Univ. Press, 1994.
7. **Ингель Л. Х.** Самовоздействие тепловыделяющей примеси в жидкой среде // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168, № 1. С. 104–108.
8. **Русаков Ю. С.** Физические основы метода вихреакустического зондирования атмосферы и его экспериментальная апробация // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2000. Т. 36, № 2. С. 229–239.
9. **Белоцерковский О. М.** Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере. Вычислительный эксперимент / О. М. Белоцерковский, В. А. Андрущенко, Ю. Д. Шевелев. М.: Янус-К, 2000.
10. **Романов В. И.** Прикладные аспекты аварийных выбросов в атмосферу. М.: Физматкнига, 2006.

11. **Вульфсон А. Н., Бородин О. О.** Система конвективных термиков как обобщенный ансамбль броуновских частиц // Успехи физ. наук. 2016. Т. 186, № 2. С. 113–124.
12. **Ингель Л. Х.** К теории конвективных струй и термиков в атмосфере // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52, № 6. С. 676–680.
13. **Хромов С. П.** Метеорология и климатология / С. П. Хромов, М. А. Петросянц. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2006.
14. **Справочник** по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 21/XII 2016 г.,
в окончательном варианте — 17/IV 2017 г.