

УДК 539.374

КАЧЕСТВЕННЫЕ РАЗЛИЧИЯ В РЕШЕНИЯХ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ С УСЛОВИЕМ ТЕКУЧЕСТИ КУЛОНА — МОРА

С. Е. Александров, Е. А. Лямина

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва
E-mails: sergeyaleksandrov@yahoo.com, lyamina@mail.northnet.ru

Рассмотрены две модели теории пластичности: с условием текучести Кулона — Мора и классическая модель теории пластичности с условием текучести, не зависящим от среднего напряжения. Исследована задача о деформировании пластического слоя между вращающимися плитами.

Ключевые слова: полуаналитическое решение, максимальное трение, сингулярность, условие Кулона — Мора, пластичность.

Теории пластичности, основанные на условии текучести Кулона — Мора, применяются для описания движения гранулированных и сыпучих материалов, а также для описания деформирования некоторых металлических сплавов [1–4]. Обзор таких моделей приведен в [4]. Большинство этих моделей при обращении угла внутреннего трения в нуль сводятся к классической теории пластичности с условием текучести, не зависящим от среднего напряжения. Однако решения конкретных задач могут не сходиться к соответствующим решениям, полученным в рамках классической теории пластичности, и решения, полученные по разным моделям, могут качественно различаться. В частности, это имеет место при использовании закона максимального трения. Сравнение решений для двух видов процессов — течения материала через плоский бесконечный сходящийся канал и сжатия слоя между параллельными шероховатыми плитами — было выполнено в [5] для двух теорий пластичности, основанных на условии текучести Кулона — Мора, — теории Спенсера [2] и теории Хилла. Уравнения модели Хилла, являющейся некоторым обобщением модели [1], приведены в [4]. В [5] показано, что решения по этим моделям качественно отличаются друг от друга. Однако недостатком этой работы является то, что рассмотренные решения не удовлетворяли точно всем краевым условиям. В [6] была предложена задача, включающая закон максимального трения и допускающая полуаналитическое решение, точно удовлетворяющее всем краевым условиям, для модели Спенсера. В этой работе в условиях плоской деформации рассматривалось сжатие материала между вращающимися шероховатыми плитами, на поверхности которых действовал закон максимального трения. Решение этой же задачи по модели Хилла было получено в [7], где показано, что найденное решение качественно отличается от решения [6]. В настоящей работе в отличие от [6] и [7] предполагается, что плиты вращаются так, что угол их раствора увеличивается. Это изменение в постановке задачи оказывает значительное влияние на качественное поведение решения в случае модели Хилла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00419) и фонда “Ведущие научные школы России” (грант № НШ-1849.2003.1).

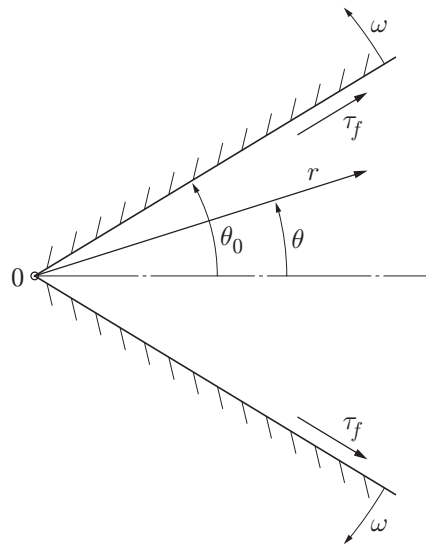


Рис. 1. Геометрическая схема процесса

Геометрическая схема процесса показана на рис. 1. Предполагается, что сток в точке 0 отсутствует. Введем полярную систему координат r, θ . Ввиду симметрии достаточно получить решение в области $\theta \geq 0$. Краевые условия на оси симметрии при $\theta = 0$ имеют вид

$$\sigma_{r\theta} = 0; \quad (1)$$

$$v = 0. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_{r\theta}$ — касательное напряжение в полярной системе координат. Плиты вращаются с угловой скоростью $\omega > 0$, как показано на рис. 1. Поэтому условие непроникания на поверхности плит принимает вид

$$v = \omega r \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0. \quad (3)$$

Угол раствора плит θ_0 зависит от времени. Поскольку все рассмотренные модели не зависят от скорости деформирования, сам этот угол может быть использован как независимая переменная вместо физического времени. На поверхности плит задан также закон максимального трения, который будет сформулирован ниже для каждой модели материала. Однако в любом случае режим трения — прилипание или проскальзывание — заранее неизвестен. В режиме прилипания краевое условие (2) при $\theta = \theta_0$ принимает вид

$$u = 0. \quad (4)$$

Направление удельных сил трения (см. рис. 1) определяется из общих соображений. Поэтому

$$\sigma_{r\theta} > 0. \quad (5)$$

Аналитическая форма закона максимального трения индивидуальна для каждой модели материала. В классической теории пластичности, когда условие текучести не зависит от среднего напряжения, этот закон имеет вид

$$\tau_f = \tau_s. \quad (6)$$

Здесь τ_f — удельные силы трения; τ_s — предел текучести при чистом сдвиге. В случае идеально пластического материала, когда $\tau_s = \text{const}$, использование закона максимального трения может приводить к сингулярным полям скоростей и напряжений [8, 9].

Ограничиваясь случаем плоской деформации, закон трения (6) можно переформулировать так: касательная к поверхности трения (фактически — к линии при плоском течении) совпадает с характеристическим направлением системы статических и кинематических уравнений теории пластичности. Так как в случае классической пластичности характеристики наклонены под углами $\pm\pi/4$ к первому (максимальному) главному напряжению, для рассматриваемой задачи закон трения (6) можно записать в виде

$$\psi = \pi/4 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0. \quad (7)$$

Здесь ψ — угол наклона первого главного напряжения к оси r . Согласно закону (7) поверхность трения совпадает с характеристикой или огибающей семейства характеристик. Отмеченные сингулярные решения возникают, когда поверхность трения является огибающей семейства характеристик. Заметим, что в теории идеально пластического тела характеристики для статических и кинематических уравнений совпадают.

Закон трения в виде (7) может быть обобщен на более сложные модели материалов. В частности, для модели Спенсера [2] такое обобщение было предложено в [10, 11]. В этой модели, так же как и в теории идеально пластического тела, характеристики статических и кинематических уравнений совпадают. Известно [2], что они наклонены к первому главному напряжению под углами $\pm(\pi/4 + \varphi/2)$, где φ — угол внутреннего трения. Таким образом, для модели Спенсера условие (7) должно быть заменено на

$$\psi = \pi/4 + \varphi/2 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0. \quad (8)$$

Известно [12], что если поверхность трения совпадает с огибающей семейства характеристик, то возникают сингулярные поля скорости. Причем асимптотическое поведение поля скорости такое же, как в случае классической пластичности.

В случае модели Хилла характеристические направления статических и кинематических уравнений не совпадают. Это свойство является причиной того, что решения рассматриваемой задачи при $\omega > 0$ и $\omega < 0$ (см. рис. 1) качественно отличаются друг от друга. Наклон характеристик статических уравнений к направлению первого главного напряжения определяется углами $\pm(\pi/4 + \varphi/2)$, а характеристик кинематических уравнений — углами $\pm\pi/4$. На рис. 2 показаны направления главных напряжений σ_1 и σ_2 , получающиеся в таком виде вследствие условия (5), и характеристические направления в произвольной точке деформируемой области при $\omega > 0$. При приближении к оси симметрии, где $\theta = 0$, направление напряжения σ_1 становится ортогональным к оси r . Поэтому

$$\psi = \pi/2 \quad \text{при} \quad \theta = 0. \quad (9)$$

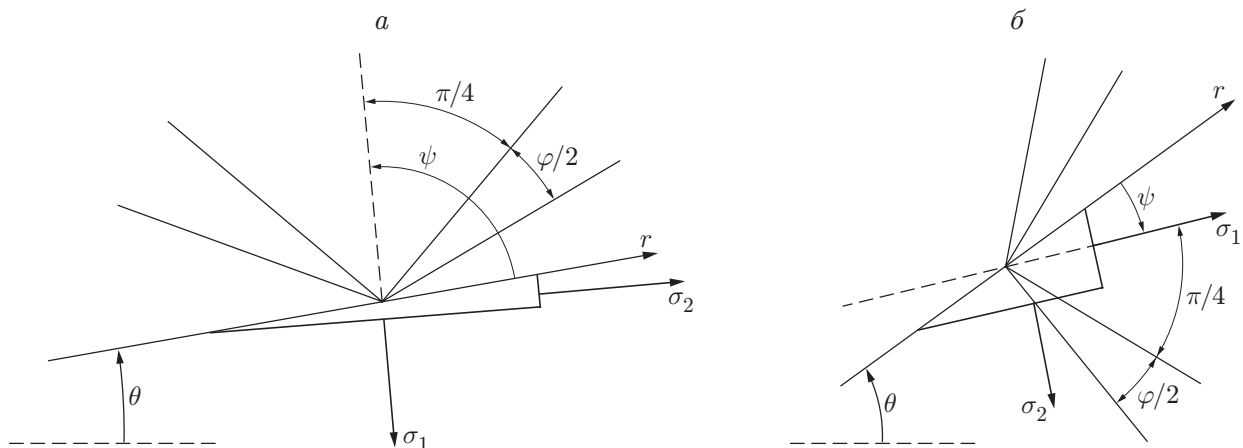


Рис. 2. Направление главных напряжений и характеристические направления в произвольной точке при $\omega > 0$ (а) и $\omega < 0$ (б)

Это условие эквивалентно условию (1). При приближении к поверхности трения, где $\theta = \theta_0$, угол ψ уменьшается и, как видно из рис. 2, только характеристическое направление системы статических уравнений может совпадать с поверхностью трения. Таким образом, закон максимального трения имеет вид (8).

В случае сжатия материала между плитами ($\omega < 0$) при выполнении уравнений модели Хилла, рассмотренном в [7], направления главных напряжений, получающиеся в таком виде вследствие условия $\sigma_{r\theta} < 0$, и характеристические направления показаны на рис. 2, б. При приближении к оси симметрии угол ψ в отличие от (9) стремится к нулю. Кроме того, угол ψ уменьшается при приближении к поверхности трения, так что $\psi \leq 0$ в деформируемой области. Тогда, как видно из рис. 2, б, только характеристическое направление системы кинематических уравнений может совпадать с поверхностью трения. Вследствие этого в [7] закон максимального трения был принят в виде $\psi = -\pi/4$ при $\theta = \theta_0$. При $\omega > 0$ этот закон принял бы форму (7). Как будет следовать из решения, полученного ниже, это необходимое различие в формулировке закона максимального трения приводит к качественно различным решениям. Заметим, что в классической теории пластичности и в модели Спенсера такого различия не возникает, так как характеристические направления для статических и кинематических уравнений совпадают. В этих случаях изменения знака ω приводят только к изменению знака предельного значения ψ на поверхности трения.

Система уравнений модели Хилла при плоском течении в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = 0; \quad (10)$$

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \sin \varphi + [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2]^{1/2} = 2k \cos \varphi; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0; \quad (12)$$

$$\sin 2\psi \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \cos 2\psi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = 0, \quad (13)$$

где σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ — нормальные напряжения; v , u — окружная и радиальная скорости в полярной системе координат; $k = \text{const}$ — коэффициент сцепления. В приведенной системе (10) — уравнения равновесия, (11) — условие текучести Кулона — Мора, (12) — уравнение несжимаемости, (13) — условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформации. При $\varphi = 0$ система уравнений (10)–(13) сводится к уравнениям плоской задачи теории идеальной пластичности, причем $k \equiv \tau_s$. При $k = 0$ система уравнений (10)–(13) сводится к уравнениям модели [1]. Общее решение статических уравнений (10) и (11), в котором предполагается, что ψ не зависит от r , имеет вид [7]

$$\frac{\sigma_{rr}}{k} = \text{ctg } \varphi - \frac{r^m \Phi(\psi, \theta_0)}{\sin \varphi} (1 - \cos 2\psi \sin \varphi),$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{k} = \text{ctg } \varphi - \frac{r^m \Phi(\psi, \theta_0)}{\sin \varphi} (1 + \cos 2\psi \sin \varphi), \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{k} = r^m \Phi(\psi, \theta_0) \sin 2\psi, \quad \Phi(\psi, \theta_0) \geq 0;$$

$$\Phi = \Phi_0 (m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi)^{m/2}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \cos 2\psi \sin \varphi}{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)}. \quad (16)$$

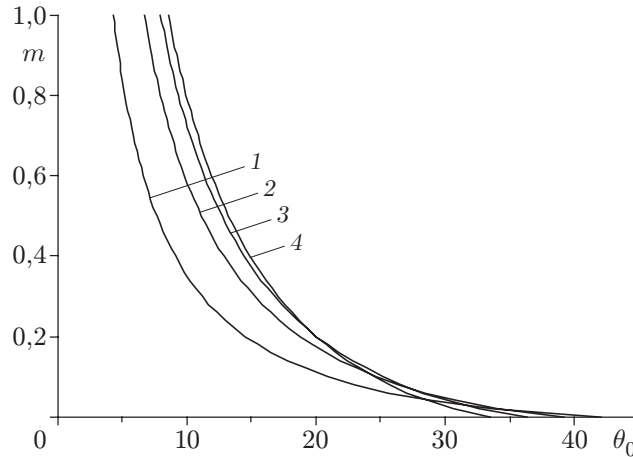


Рис. 3. Зависимость значения m от угла раствора плит θ_0 :
 1 — $\varphi = 0,1$; 2 — $\varphi = 0,2$; 3 — $\varphi = 0,3$; 4 — $\varphi = 0,4$; 5 — $\varphi = 0,5$

Однако частное решение для ψ , из которого должна быть найдена постоянная m , отличается от [7] из-за краевых условий (8) и (9). Интегрируя (16) с учетом (9), получим

$$\theta = 2 \sin \varphi \int_{\pi/2}^{\psi} \frac{\sin \varphi + \cos 2z}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z} dz. \quad (17)$$

Подставляя (8) в (17), приходим к уравнению для m в форме

$$\theta_0 = 2 \sin \varphi \int_{\pi/2}^{\pi/4 + \varphi/2} \frac{\sin \varphi + \cos 2z}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z} dz. \quad (18)$$

Зависимость m от θ_0 для различных значений угла внутреннего трения, полученная из решения уравнения (18), показана на рис. 3. Отметим, что если $m < 0$ и модуль этой величины достаточно мал, то в (18) появляется неинтегрируемая особенность. Таким образом, величины угла θ_0 при $m = 0$ (рис. 3) являются предельными, при которых имеет место полученное решение. При больших значениях угла θ_0 необходимо вводить жесткую зону, примыкающую к поверхности трения, как это было сделано в [6]. Однако в настоящей работе предполагается, что угол θ_0 меньше предельного. Из (17) следует, что $d\theta/d\psi = 0$ при $\psi = \pi/4 + \varphi/2$. Вычисляя вторую производную $d^2\theta/d\psi^2$, можно убедиться, что ее знак в этой точке противоположен знаку m . Тогда, как видно из рис. 3, $d^2\theta/d\psi^2 < 0$ при $\psi = \pi/4 + \varphi/2$ и функция $\theta(\psi)$ достигает максимума в этой точке. Следовательно, продолжение решения уравнения (17) в область $\psi < \pi/4 + \varphi/2$ не имеет физического смысла и (8) является единственно возможным законом максимального трения. Зная m из решения (18) и распределение $\psi(\theta)$ из уравнения (17), напряженное состояние в деформируемой области можно найти из (14) и (15) с точностью до константы Φ_0 , которая остается неопределенной, как и в других задачах такого класса.

Представим поле скорости в виде

$$u = \frac{\omega r}{2} \frac{dg}{d\theta}, \quad v = -\omega r g. \quad (19)$$

Здесь g — произвольная функция, не зависящая от r . Поле скоростей (19) удовлетворяет уравнению несжимаемости (12) при любом выборе функции g . С учетом (8) и (9) краевые

условия (2) и (3) преобразуются к виду

$$g = 0 \quad \text{при} \quad \psi = \pi/2; \quad (20)$$

$$g = -1 \quad \text{при} \quad \psi = \pi/4 + \varphi/2. \quad (21)$$

Подставляя (19) в (13), найдем

$$\cos 2\psi \frac{d^2 g}{d\theta^2} - 2 \sin 2\psi \frac{dg}{d\theta} = 0. \quad (22)$$

Введем новую функцию

$$G = \frac{dg}{d\theta} = \frac{dg}{d\psi} \frac{d\psi}{d\theta}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22), используя (16) и интегрируя полученное уравнение, найдем

$$\ln \frac{G}{G_0} = 4 \sin \varphi \int_{\pi/4+\varphi/2}^{\psi} \frac{\operatorname{tg} 2z (\sin \varphi + \cos 2z)}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z} dz, \quad (24)$$

где G_0 — произвольная функция θ_0 . Из (19), (23) и (24) следует, что величина G_0 пропорциональна скорости скольжения материала по поверхности плит. Подставляя (24) в (23), используя (16) и интегрируя, найдем

$$g = 2G_0 \sin \varphi \int_{\pi/2}^{\psi} \left[\frac{\sin \varphi + \cos 2x}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2x} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(4 \sin \varphi \int_{\pi/4+\varphi/2}^x \frac{\operatorname{tg} 2z (\sin \varphi + \cos 2z)}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z} dz \right) \right] dx. \quad (25)$$

Решение (25) удовлетворяет краевому условию (20). Величина G_0 определяется из (25) и краевого условия (21) в виде

$$-1 = 2G_0 \sin \varphi \int_{\pi/2}^{\pi/4+\varphi/2} \left[\frac{\sin \varphi + \cos 2x}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2x} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(4 \sin \varphi \int_{\pi/4+\varphi/2}^x \frac{\operatorname{tg} 2z (\sin \varphi + \cos 2z)}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z} dz \right) \right] dx.$$

Численное интегрирование в этом уравнении, при использовании решения уравнения (18), дает зависимость G_0 от θ_0 , показанную на рис. 4 для различных значений угла φ . Зависимости функций G и g от θ , полностью характеризующие распределение скоростей по толщине слоя вследствие (19), показаны на рис. 5 и 6 соответственно при $\varphi = 0,5$ (это значение угла внутреннего трения является типичным для ряда гранулированных материалов) для нескольких стадий процесса (нескольких значений угла θ_0). Так как $G_0 \neq 0$, то условие прилипания (4) не выполняется. В этом проявляется одно из качественных отличий полученного решения от решения [7], в котором закон максимального трения в напряжениях приводит к выполнению условия (4) в скоростях. Между тем в решении,

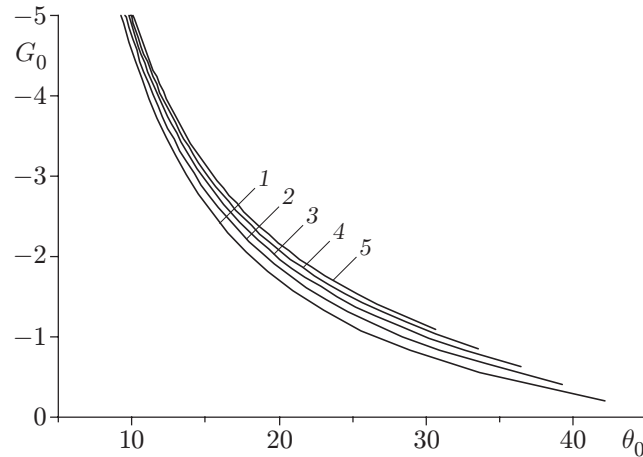


Рис. 4. Зависимость величины G_0 от угла раствора плит θ_0 :
1 — $\varphi = 0,1$; 2 — $\varphi = 0,2$; 3 — $\varphi = 0,3$; 4 — $\varphi = 0,4$; 5 — $\varphi = 0,5$

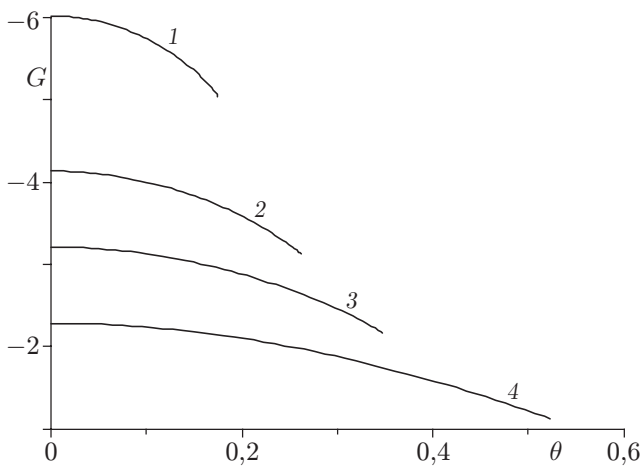


Рис. 5

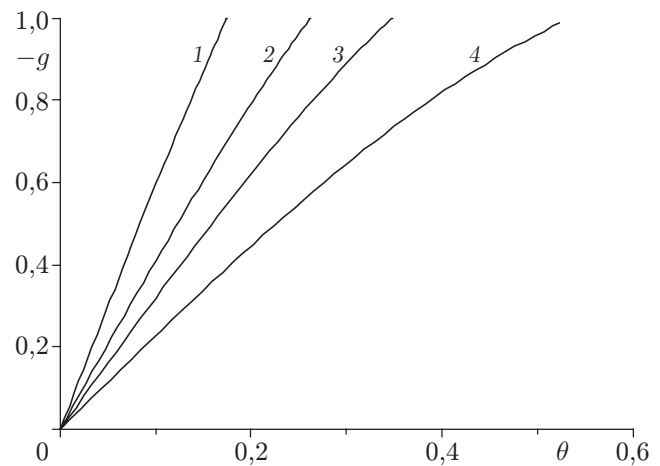


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость функции G , характеризующей распределение радиальной скорости, от угла θ при $\varphi = 0,5$ для разных стадий процесса:

1 — $\theta_0 = 10^\circ$; 2 — $\theta_0 = 15^\circ$; 3 — $\theta_0 = 20^\circ$; 4 — $\theta_0 = 30^\circ$

Рис. 6. Зависимость функции g , характеризующей распределение окружной скорости, от угла θ при $\varphi = 0,5$ для разных стадий процесса:

1 — $\theta_0 = 10^\circ$; 2 — $\theta_0 = 15^\circ$; 3 — $\theta_0 = 20^\circ$; 4 — $\theta_0 = 30^\circ$

основанном на модели Спенсера [6], при использовании закона максимального трения получается проскальзывание. При этом поле скоростей является сингулярным: сдвиговая скорость деформации в полярных координатах стремится к бесконечности при приближении к поверхности трения. Для некоторых параметров процесса поле скоростей является сингулярным и в решении [7]. Покажем, что в полученном решении сдвиговая скорость деформации конечна при приближении к поверхности трения. Разлагая подынтегральное выражение в (24) в ряд в окрестности точки $\psi = \pi/4 + \varphi/2$ и интегрируя, получим

$$G = G_0 \exp \left[\frac{4}{m} \left(\psi - \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right]. \quad (26)$$

Здесь члены более высокого порядка отброшены. Сдвиговая скорость деформации $\xi_{r\theta}$ может стремиться к бесконечности, если только $d^2g/d\theta^2 = dG/d\theta \rightarrow \infty$ при $\psi \rightarrow \pi/4 + \varphi/2$. Разлагая правую часть уравнения (16) в ряд в окрестности точки $\psi = \pi/4 + \varphi/2$, из (26) и (16) найдем

$$\frac{dG}{d\theta} = -2G_0 \operatorname{ctg} \varphi \exp \left[\frac{4}{m} \left(\psi - \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right] \quad (27)$$

при $\psi \rightarrow \pi/4 + \varphi/2$. Таким образом, из (27) следует, что сдвиговая скорость деформации ограничена вблизи поверхности трения. Однако напряженное состояние является сингулярным, так как производные от некоторых компонент тензора напряжений по θ стремятся к бесконечности при приближении к поверхности трения. Рассмотрим, например, компоненту σ_{rr} . Дифференцируя (14) по θ и подставляя везде, кроме множителя $d\psi/d\theta$, значение $\pi/4 + \varphi/2$ вместо ψ , получим

$$\frac{1}{k} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} = -4\Phi_0 r^m m^{m/2} \cos^{m-1} \varphi \frac{d\psi}{d\theta}. \quad (28)$$

Разлагая правую часть уравнения (16) в ряд при $\psi \rightarrow \pi/4 + \varphi/2$, приведем это уравнение вблизи поверхности трения к виду

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{m \cos \varphi}{4 \sin \varphi (\psi - \pi/4 - \varphi/2)}. \quad (29)$$

Интегрирование этого уравнения с учетом краевого условия $\psi = \pi/4 + \varphi/2$ при $\theta = \theta_0$ дает

$$\psi - \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = \left(\frac{m}{2 \operatorname{tg} \varphi} \right)^{1/2} (\theta_0 - \theta)^{1/2}. \quad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (28), найдем

$$\frac{1}{k} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} = \frac{\Phi_0 r^m m^{(m/2+1/2)} (2 \operatorname{tg} \varphi)^{1/2} \cos^m \varphi}{\sin \varphi (\theta_0 - \theta)^{1/2}} + o[(\theta_0 - \theta)^{-1/2}]. \quad (31)$$

Повторяя такие же рассуждения, можно получить, что значения производных $\partial \sigma_{\theta\theta}/\partial \theta$ и $\partial \sigma_{r\theta}/\partial \theta$ стремятся к конечному пределу на поверхности трения. Интересно отметить, что при применении модели Спенсера поведение напряжения σ_{rr} вблизи поверхности максимального трения, установленное в [6], совпадает с (31).

Получим решение в рамках теории идеально пластического тела. В уравнении (11) необходимо положить $\varphi = 0$. Решение для напряжений было получено в [13] и, в принятых обозначениях, имеет форму

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= k(\sigma + \cos 2\psi), & \sigma_{\theta\theta} &= k(\sigma - \cos 2\psi), & \sigma_{r\theta} &= k \sin 2\psi, \\ \sigma &= -A \ln r - (A/2) \ln ((A - 2 \cos 2\psi)/B). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь A и B — произвольные постоянные; ψ — функция угла θ , определяемая из уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{A - 2 \cos 2\psi}{2 \cos 2\psi} \quad (33)$$

в виде

$$\theta = 2 \int_{\pi/2}^{\psi} \frac{\cos 2x}{A - \cos 2x} dx. \quad (34)$$

Нижний предел интегрирования здесь выбран так, чтобы удовлетворить условию (9) на оси симметрии. На поверхности трения должно выполняться условие (7). Тогда из (34) найдем

$$\theta_0 = 2 \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{A - \cos 2x} dx. \quad (35)$$

Это уравнение определяет величину A для заданного значения θ_0 . Уравнение (35) может быть решено численно, что, однако, не требуется для целей настоящего исследования.

Уравнения (12) и (13) не зависят от φ . Поэтому представление поля скоростей в виде (19), краевые условия (20) и (21), уравнение (22) и подстановка (23) имеют силу. Однако так как зависимость $\psi(\theta)$ теперь дается уравнением (34), то вместо решения (24) получим

$$G/G_0 = (A - 2 \cos 2\psi)/A. \quad (36)$$

Здесь G_0 имеет тот же физический смысл, что и в решении (24). Подставляя (36) в (23), учитывая (33) и интегрируя при краевых условиях (20) и (21), найдем, что $G_0 = -A$ и

$$g = -\sin 2\psi. \quad (37)$$

Разлагая правую часть уравнения (33) в ряд в окрестности точки $\psi = \pi/4$ и интегрируя с учетом условия $\psi = \pi/4$ при $\theta = \theta_0$, получим

$$\psi - \pi/4 = \sqrt{A/2} (\theta_0 - \theta)^{1/2} + o[(\theta_0 - \theta)^{1/2}]. \quad (38)$$

Это выражение вполне аналогично соотношению (30). Вычислим производную $\partial u/\partial \theta$. Используя (19), (37) и (38), вблизи поверхности трения эту производную можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \omega r \sqrt{\frac{A}{2}} (\theta_0 - \theta)^{-1/2} + o[(\theta_0 - \theta)^{-1/2}]. \quad (39)$$

Так как $\partial u/\partial \theta$ входит в выражение для сдвиговой скорости деформации $\xi_{r\theta}$, то из (39) следует, что $\xi_{r\theta} \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \theta_0$. В этом проявляется принципиальное отличие от решения при $\varphi \neq 0$. В последнем случае (27) показывает, что $\xi_{r\theta}$ стремится к конечному пределу при $\theta \rightarrow \theta_0$. Однако напряжения в обоих решениях ведут себя одинаково. Вычисляя производную $\partial \sigma_{rr}/\partial \theta$ с помощью (32), (33) и (38), найдем

$$\frac{1}{k} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{2A}}{(\theta_0 - \theta)^{1/2}} + o[(\theta_0 - \theta)^{-1/2}],$$

что соответствует (31). Из тех же уравнений можно вычислить производные $\partial \sigma_{\theta\theta}/\partial \theta$ и $\partial \sigma_{r\theta}/\partial \theta$ и показать, что они стремятся к конечному пределу при $\theta \rightarrow \theta_0$.

В заключение отметим, что полученное в [6] решение, основанное на модели Спенсера, имеет точно такие же качественные особенности, как и решение, найденное при $\varphi = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ишлинский А. Ю.** О плоском движении песка // Укр. мат. журн. 1954. Т. 6, № 4. С. 430–441.
2. **Spencer A. J. M.** A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions // J. Mech. Phys. Solids. 1964. V. 12. P. 337–351.

3. **Spitzig W. A., Sober R. J., Richmond O.** The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory // Metallurgical Trans. 1976. V. 7A, N 11. P. 1703–1710.
4. **Ostrowska-Maciejewska J., Harris D.** Three-dimensional constitutive equations for rigid/perfectly plastic granular materials // Math. Proc. Cambr. Philos. Soc. 1990. V. 108. P. 153–169.
5. **Alexandrov S.** Comparison of double-shearing and coaxial models of pressure-dependent plastic flow at frictional boundaries // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2003. V. 70, N 2. P. 212–219.
6. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Сжатие пластического материала, чувствительного к среднему напряжению, вращающимися плитами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 50–60.
7. **Александров С. Е.** Сингулярные решения в одной модели пластичности с условием текучести, зависящим от среднего напряжения // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского / Под ред. Д. М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 77–86.
8. **Александров С. Е.** Поле скорости вблизи поверхности их разрыва при произвольном течении идеального жесткопластического материала // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 5. С. 116–122.
9. **Alexandrov S., Richmond O.** Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36, N 1. P. 1–11.
10. **Pemberton C. S.** Flow of imponderable granular materials in wedge-shaped channels // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13. P. 351–360.
11. **Marshall E. A.** The compression of a slab of ideal soil between rough plates // Acta Mech. 1967. V. 3. P. 82–92.
12. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Сингулярные решения при плоском пластическом течении материалов, чувствительных к среднему напряжению // Докл. РАН. 2002. Т. 383, № 4. С. 492–495.
13. **Соколовский В. В.** Плоское и осесимметричное равновесие пластической массы между жесткими стенками // Прикл. математика и механика. 1950. Т. 14. С. 75–92.

Поступила в редакцию 12/1 2005 г.
