

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. М. Жданов

(Свердловск)

Определению электропроводности частично ионизованного газа на основе кинетической теории посвящено значительное число работ [1-5]. При этом, как правило, используется модель трехкомпонентной плазмы (электроны, ионы, нейтралы). Общие выражения для электропроводности многокомпонентных систем достаточно сложны [1], и вычисление входящих в них определителей представляет трудоемкую задачу.

Ниже рассматривается случай N -компонентной газовой смеси, у которой частично ионизована одна из компонент ($N + 2$ -компонентная плазма). Ряд упрощений при решении исходной системы уравнений позволяет представить выражения для электропроводности такой смеси в виде, аналогичном случаю трехкомпонентной плазмы, но с некоторыми эффективными значениями параметров. Полученные результаты соответствуют «второму приближению» Каулинга [1, 6].

В качестве исходной системы уравнений используем уравнения переноса для диффузионных скоростей $w_\gamma = u_\gamma - u$ и приведенных относительных потоков тепла $r_\gamma = h_\gamma / p_\gamma$ [4]. Опуская в них члены с градиентами давления и температуры, пренебрегая «вязким» переносом импульса и различием температур компонент, имеем¹

$$\sum_{\beta} \lambda_{\alpha\beta} \left[w_{\alpha} - w_{\beta} + \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \zeta_{\alpha\beta} \left(r_{\alpha} - \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} r_{\beta} \right) \right] = n_{\alpha} e_{\alpha} E' + n_{\alpha} e_{\alpha} (w_{\alpha} \times H) - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} (j \times H) \quad (1)$$

$$\sum_{\beta} \lambda_{\alpha\beta} \left[b_{\alpha\beta} r_{\alpha} + b'_{\alpha\beta} r_{\beta} + \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \zeta_{\alpha\beta} (w_{\alpha} - w_{\beta}) \right] = \frac{2}{5} n_{\alpha} e_{\alpha} (r_{\alpha} \times H) \quad (2)$$

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} w_{\alpha} = 0 \quad (3)$$

Здесь m_{α} , e_{α} , $[n_{\alpha}]$, $\rho_{\alpha} = n_{\alpha} m_{\alpha}$ — соответственно масса, заряд, плотность и массовая плотность частиц α -сорта, ρ — массовая плотность смеси, u — средняя массовая скорость газа, E и H — напряженности электрического и магнитного полей. При этом

$$\lambda_{\alpha\beta} \sim n_{\alpha} n_{\beta} \mu_{\alpha\beta}^{-1} Q_{\alpha\beta} \quad (4)$$

Здесь $\mu_{\alpha\beta}$ — приведенная масса, $Q_{\alpha\beta}$ — среднее эффективное сечение столкновений для частиц α - и β -сортов. Величину $\lambda_{\alpha\beta}$ удобно выразить через эффективную частоту столкновений $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$:

$$\lambda_{\alpha\beta} = n_{\alpha} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}^{-1} = n_{\beta} \mu_{\alpha\beta} \tau_{\beta\alpha}^{-1} = \lambda_{\beta\alpha} \quad (5)$$

Выражения для $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ и коэффициентов $b_{\alpha\beta}$, $b'_{\alpha\beta}$, $\zeta_{\alpha\beta}$ для различных законов взаимодействия приведены в работе [4].

Уравнения (2) разрешаются относительно r_{γ} . Подставляя полученные выражения в (1), приходим к системе линейных векторных уравнений для диффузионных скоростей w_{γ} . Эти уравнения линейно зависимы, поэтому фактическое число уравнений, необходимых для определения плотности тока

$$j = \sum_{\gamma} n_{\gamma} e_{\gamma} w_{\gamma} \quad (6)$$

¹ Для трехкомпонентной плазмы аналогичная система использовалась в [3].

на единицу меньшие числа компонент. Ниже при решении системы (1) — (3) используются уравнения для электронной компоненты ($\alpha = e$) и N независимых уравнений (1) для нейтральных компонент ($\alpha = 1, \dots, N$). В уравнениях для электронов благодаря условиям $m_e / m_\beta \ll 1$ и $b_{e\beta} \sim (m_e / m_\beta) \ll 1$ для $\beta \neq e$ можно пренебречь членами, содержащими потоки тепла ионов и нейтралов. Опуская по той же причине последний член в правой части (1) и учитывая, что $\mu_{e\beta} \approx m_e$, имеем

$$\sum_{\beta \neq e} \tau_{e\beta}^{-1} [w_e - w_\beta + \zeta_{e\beta} r_e] = -\frac{e}{m_e} E' - \omega_e (w_e \times k) \quad (7)$$

$$r_e + \omega_e \tau_e^* (r_e \times k) = -\frac{5}{2} \tau_e^* \sum_{\beta \neq e} \tau_{e\beta}^{-1} \zeta_{e\beta} (w_e - w_\beta) \quad (8)$$

Здесь

$$\omega_e = \frac{e}{m_e} H, \quad e = |e_e|, \quad k = \frac{H}{H} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\tau_e^*} = 0.4 \tau_{ee}^{-1} + 2.5 \sum_{\beta \neq e} \frac{1 - 0.48 B_{e\beta}^*}{\tau_{e\beta}} \quad (10)$$

При записи (10) использованы выражения для $b_{e\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, приведенные в работе [4]. Коэффициент $B_{e\beta}^*$ слабо зависит от характера рассеяния электронов и мало отличается от единицы. Для случая однократной ионизации $e_i = -e_e = e$ и $r_i = n_e$. Тогда

$$j = n_e e (w_i - w_e) \quad (11)$$

Учитывая, что, в силу условия (3),

$$w_e = \sum_{\gamma \neq e} \frac{\rho_\gamma}{\rho} (w_e - w_\gamma) \quad (12)$$

и вводя величины

$$S_\beta = n_e e (w_i - w_\beta) \quad (\beta = 1, \dots, N), \quad X_e = n_e e r_e \quad (13)$$

представим уравнения (7), (8) в виде

$$\begin{aligned} j + \omega_e \tau_0 (j \times k) &= \sigma_0 E' + \tau_0 \sum_{\beta=1}^N \frac{i}{\tau_{e\beta}} S_\beta + \omega_e \tau_0 \sum_{\beta=1}^N \frac{\rho_\beta}{\rho} (S_\beta \times k) + v_0 \tau_0 X_e \\ x_e + \omega_e \tau_e^* (x_e \times k) &= \frac{5}{2} v_0 \tau_e^* j - \frac{5}{2} \tau_e^* \sum_{\beta=1}^N \frac{\zeta_{e\beta}}{\tau_{e\beta}} S_\beta \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau_0, \quad \frac{1}{\tau_0} = \sum_{\beta \neq e} \frac{1}{\tau_{e\beta}}, \quad v_0 = \sum_{\beta \neq e} \frac{\zeta_{e\beta}}{\tau_{e\beta}} \quad (15)$$

Для определения S_β имеем N независимых уравнений (1) для $\alpha = 1, 2, \dots, N$. При этом, как и в уравнениях для электронов, пренебрегаем в них членами, содержащими потоки тепла ионов и нейтралов. Последнее может быть обосновано следующим образом. Выражения для r_i и r_β ($\beta = 1, 2, \dots, N$), следующие из решения уравнений (2), содержат лишь члены, пропорциональные S_β , поскольку r_e и j входят в них с коэффициентами $\sim m_e / m_\beta$. При этом коэффициенты пропорциональности $\zeta_{i\beta}$ и $\zeta_{\alpha\beta}$ зависят лишь от ион-атомных и атом-атомных взаимодействий, причем для реальных потенциалов взаимодействия $\zeta_{i\beta} \sim \zeta_{\alpha\beta} \ll 0.2$. Подставляя r_i и r_β в (1), замечаем, что добавки к коэффициентам при S_β оказываются квадратичными относительно величин $\zeta_{i\beta}$ и $\zeta_{\alpha\beta}$, т. е. учет потоков тепла ионов и нейтралов вносит лишь малосущественные поправки. (Оценки, выполненные для трехкомпонентной плазмы [3, 4], показывают, что пренебрежение r_i и r_α приводит к погрешности в окончательном результате, не превышающей 2%.)

Тогда с учетом того, что $e_\alpha = 0$ для $\alpha = 1, 2, \dots, N$, уравнения (1) для нейтральных компонент можно представить в виде

$$\sum_{\beta=1}^N a_{\alpha\beta} S_\beta = \lambda_{e\alpha} (\mathbf{j} - \zeta_{e\alpha} \mathbf{X}_e) + n_e e \frac{\rho_\alpha}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \quad (17)$$

$$a_{\alpha\alpha} = \sum_{\gamma \neq \alpha} \lambda_{\alpha\gamma} \quad (\gamma = e, i, 1, \dots, N), \quad a_{\alpha\beta} = -\lambda_{\alpha\beta} \quad (\beta \neq \alpha) \quad (18)$$

Разрешая эти уравнения, имеем

$$S_\alpha = c_\alpha \mathbf{j} - d_\alpha \mathbf{X}_e + f_\alpha (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \quad (19)$$

$$c_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|} \lambda_{e\beta}, \quad d_\alpha = \sum_{\beta=1}^N \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|} \zeta_{e\beta} \lambda_{e\beta}, \quad f_\alpha = n_e m_e \omega_e \sum_{\beta=1}^N \frac{\rho_\beta}{\rho} \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|} \quad (20)$$

Здесь $|a|$ — определитель системы, $|a|_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $\beta\alpha$ определителя.

Заметим, что недиагональные элементы определителей зависят от величин, характеризующих лишь атом-атомные взаимодействия. Диагональные члены содержат наряду с другими величинами $\lambda_{e\alpha}$ и $\lambda_{i\alpha}$. В этом случае $\lambda_{e\alpha} / \lambda_{i\alpha} \sim m_e^{1/2} / \mu_{i\alpha}^{1/2}$, если $Q_{e\alpha} \sim Q_{i\alpha}$, поэтому $\lambda_{e\alpha} \ll \lambda_{i\alpha}$. Полагая, что сечения $Q_{\alpha\beta}$ для атом-атомных взаимодействий имеют тот же порядок величины, что и $Q_{i\alpha}$, и оценивая при этих условиях коэффициенты в (19), имеем

$$c_\alpha \lesssim (m_e / m_k)^{1/2}, \quad d_\alpha < c_\alpha, \quad f_\alpha \lesssim (m_e / m_k)^{1/2} \omega_e \tau_0$$

Здесь индекс k отнесен к наиболее легкой из нейтральных компонент смеси. Подставляя (19) в уравнения (14), (15) и решая их совместно, приходим к уравнению для \mathbf{j} , которое после пренебрежения членами $\sim (m_e / m_k)^{1/2}$ принимает вид

$$A\mathbf{j} + B\omega_e \tau_0 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - C\omega_e^2 \tau_0^2 \mathbf{k} (\mathbf{j}\mathbf{k}) = \sigma_0 \mathbf{E}' \quad (21)$$

Здесь

$$A = 1 - \frac{\Delta_0}{1 + \gamma^2 \omega_e^2 \tau_0^2} + \delta_0 \omega_e^2 \tau_0^2$$

$$B = 1 + \gamma \frac{\Delta_0}{1 + \gamma^2 \omega_e^2 \tau_0^2}, \quad C = \delta_0 + \gamma^2 \frac{\Delta_0}{1 + \gamma^2 \omega_e^2 \tau_0^2} \quad (22)$$

$$\Delta_0 = \frac{5}{2} v_0^2 \tau_e^* \tau_0, \quad \gamma = \tau_e^* \tau_0^{-1}, \quad \delta_0 = n_e m_e \tau_0^{-1} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\rho_\alpha \rho_\beta |a|_{\beta\alpha}}{\rho^2 |a|} \quad (23)$$

Уравнение (21) представляет собой обобщенный закон Ома для рассматриваемой многокомпонентной смеси. Разрешая его относительно \mathbf{j} , имеем

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}' + \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}' + \sigma_h (\mathbf{k} \times \mathbf{E}') \quad (24)$$

где $\mathbf{E}_{\parallel}' = \mathbf{k} (\mathbf{E}' \mathbf{k})$ и $\mathbf{E}_{\perp}' = \mathbf{k} \times (\mathbf{E}' \times \mathbf{k})$ — компоненты \mathbf{E}' , соответственно параллельные и перпендикулярные магнитному полю, а σ_{\parallel} , σ_{\perp} и σ_h — коэффициенты продольной, поперечной и «холловской» электропроводности, определяемые выражениями

$$\sigma_{\parallel} = \frac{\sigma_0}{1 - \Delta_0}, \quad \sigma_{\perp} = \sigma_0 \frac{A}{A^2 + B^2 \omega_e^2 \tau_0^2}, \quad \sigma_h = \sigma_0 \frac{B \omega_e \tau_0}{A^2 + B^2 \omega_e^2 \tau_0^2} \quad (25)$$

Структура выражений для коэффициентов электропроводности (25) остается фактически той же, что и в случае трехкомпонентной плазмы [3, 4]. Наличие нескольких сортов нейтралов в смеси приводит лишь к дополнительному вкладу в коэффициенты τ_0^{-1} , $(\tau_e^*)^{-1}$ и v_0 , учитывающие взаимодействие электронов с нейтралами каждого сорта. Существенным

является также обобщение выражения для коэффициента δ_0 . Заметим, что именно член $\delta_0 \omega_e^2 \tau_0^2$ описывает влияние относительной диффузии тяжелых компонент (ионов и нейтралов) на электропроводность поперек магнитного поля. Если $\delta_0 \omega_e^2 \tau_0^2 \ll 1$, то рассматриваемая многокомпонентная плазма с хорошим приближением описывается моделью квазидвукомпонентной среды [7]. Выражения для электропроводности такой плазмы (25) следуют тогда непосредственно из решения уравнений для электронной компоненты (7) и (8), если положить в них $w_\beta = 0$, т. е. считать скорости тяжелых компонент w_β приближенно равными средней массовой скорости газа w . Приведем выражения δ_0 для случаев, когда в смеси присутствуют один и два сорта нейтралов:

для трехкомпонентной плазмы

$$\delta_0 = n_e m_e \tau_0^{-1} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^2 \frac{1}{\lambda_{i1}} = \left(\frac{m_e}{\mu_{i1}} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^2 \frac{n_1 Q_{e1} + n_i Q_{ei}}{n_1 Q_{i1}} \quad (26)$$

для плазмы с двумя сортами нейтралов

$$\delta_0 = \frac{n_e m_e \tau_0^{-1}}{\rho^2} \frac{\rho_1^2 \lambda_{i2} + \rho_2^2 \lambda_{i1} + (\rho_1 + \rho_2)^2 \lambda_{12}}{\lambda_{i1} \lambda_{i2} + \lambda_{12} (\lambda_{i1} + \lambda_{i2})} \quad (27)$$

Если относительная концентрация заряженных частиц в смеси невелика ($n_i \ll n_1 + n_2$), последнее выражение может быть упрощено

$$\delta_0 = \frac{m_e^{1/2} (n_1 Q_{e1} + n_2 Q_{e2} + n_i Q_{ei})}{\mu_{i1}^{1/2} n_1 Q_{i1} + \mu_{i2}^{1/2} n_2 Q_{i2}} \quad (28)$$

Типичным примером, в котором могут найти применение полученные выше выражения, служат расчеты электропроводности смесей с легко ионизуемой добавкой, используемых в ряде магнитогидродинамических устройств. При оценке влияния эффекта «скольжения» ионов на электропроводность таких смесей вместо выражения типа (26) более точным является использование выражений (27) или (28).

Оценим теперь роль поправок «второго приближения» теории. Как видно, влияние их на поперечную и «холловскую» электропроводность заметно уменьшается с увеличением параметра $\omega_e^2 \tau_0^2$. Так, если существенным является учет «скольжения» ионов, т. е. $\delta_0 \omega_e^2 \tau_0^2 \sim 1$, то $\omega_e^2 \tau_0^2 \gg 1$, поскольку $\delta_0 \ll 1$. При этих условиях вклад поправок «второго приближения» оказывается ничтожно малым. Для случая, когда $\omega_e \tau_0 \leq 1$, а также при вычислении продольной электропроводности $\sigma_{||}$ учет поправок Δ_0 является необходимым. Рассмотрим более подробно вычисление $\sigma_{||}$.

В пределе слабоионизованного газа, когда существенны лишь взаимодействия электронов с нейтралами, выражение для эффективной частоты столкновений τ_0^{-1} (16) можно представить в виде

$$\tau_0^{-1} = \frac{4}{3} \bar{n}_e \sum_{\beta} n_{\beta} Q_{e\beta}, \quad \bar{n}_e = \left(\frac{8kT}{\pi m_e} \right)^{1/2} \quad (29)$$

$$Q_{e\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) q_{e\beta}(v, \chi) (1 - \cos \chi) d\Omega dx \quad (30)$$

где $q_{e\beta}(v, \chi)$ — дифференциальное эффективное сечение упругого рассеяния электронов на нейтралах β -сорта, χ — угол рассеяния, $d\Omega = \sin \chi d\chi d\epsilon$ (ϵ — азимутальный угол), $x^2 = (m_e / 2kT) v^2$, v — скорость электронов.

Для поправки «второго приближения» имеем

$$\Delta_0^{en} = \left(\sum_{\beta} \zeta_{e\beta} n_{\beta} Q_{e\beta} \right)^2 / \left(\sum_{\gamma} n_{\gamma} Q_{e\gamma} \sum_{\beta} (1 - 0.48 B_{e\beta}^*) n_{\beta} Q_{e\beta} \right) \quad (31)$$

Если $q(v, \chi) = \text{const}$, что соответствует модели взаимодействия твердых упругих шариков, то $\zeta_{e\beta} = 0.2$, $B_{e\beta}^* = 1$ и $\Delta_0^{en} = 0.077$. Выражение для электропроводности $\sigma_{||}$ принимает в этом случае вид

$$\sigma_{||}^{en} = 0.510 \frac{e^2 n_e}{(m_e k T)^{1/2}} \left(\sum_{\beta} n_{\beta} Q_{e\beta} \right)^{-1} \quad (32)$$

Этот результат лишь на 4% отличается от точного лорентцевского значения σ_{\parallel} для этой модели взаимодействия (0.510 вместо 0.532 [6]). Если взаимодействие электронов с нейтралами разных сортов носит различный характер, Δ_0^{en} зависит, вообще говоря, от относительной концентрации нейтральных компонент в смеси. Следует отметить, однако, что сама эта поправка, как правило, невелика. Более существенным оказывается вклад Δ_0 в другом предельном случае, когда газ полностью ионизован. Для этого случая $\zeta_{ei} = -0.6$, $B_{ei}^* = 1$ и $\Delta_0^{ei} = 0.482$. Используя выражения

$$\tau_{ei}^{-1} = \frac{4}{3} n_i \left(\frac{2\pi kT}{m_c} \right)^{1/2} \left(\frac{e^2}{kT} \right)^2 \ln \Lambda, \quad \tau_{ee}^{-1} \approx \sqrt{2} \tau_{ei}^{-1} \quad (33)$$

имеем

$$\sigma_{\parallel}^{ei} = 0.582 \frac{(kT)^{3/2}}{e^2 m_e^{1/2}} \frac{1}{\ln \Lambda} \quad (34)$$

что практически совпадает с известным результатом Спитцера (0.582 вместо 0.591 [8]).

Рассмотрим теперь случай произвольной степени ионизации смеси. Для расчета электропроводности в этой области предлагаются обычно различные интерполяции, основанные на предположении об аддитивности удельных сопротивлений, обязанных электрон-нейтральным и электрон-ионным столкновениям [9]. Если отвлечься от отмеченных выше малых различий в численных коэффициентах для предельных случаев, то наиболее часто используемое выражение для σ_{\parallel} можно представить в виде

$$\frac{1}{\sigma_{\parallel}} = \frac{1}{\sigma_{\parallel}^{en}} + \frac{1}{\sigma_{\parallel}^{ei}} \quad (35)$$

где σ_{\parallel}^{en} и σ_{\parallel}^{ei} определены выражениями (32) и (34). На самом деле, как следует из (16), аддитивность имеет место лишь для эффективных частот столкновений $\tau_{e\beta}^{-1}$ или для удельных сопротивлений, рассчитанных лишь в «первом приближении» теории. В силу этого более точное выражение для σ_{\parallel} принимает вид

$$\frac{1}{\sigma_{\parallel}} = \frac{1}{\sigma_{\parallel}^{en}} \frac{1 - \Delta_0}{1 - \Delta_0^{en}} + \frac{1}{\sigma_{\parallel}^{ei}} \frac{1 - \Delta_0}{1 - \Delta_0^{ei}} \quad (36)$$

Сравнение (35) и (36) позволяет оценить погрешность, допускаемую при расчетах электропроводности по приближенной формуле (35). Оба выражения дают совпадающие значения σ_{\parallel} для предельных случаев, но могут заметно отличаться при сравнимых по величине эффективных частотах электрон-нейтральных и электрон-ионных столкновений. В этой области, как правило, $\Delta_0 \ll 1$, и коэффициент при втором слагаемом в (36) порядка двух; поэтому расчеты по приближенной формуле (35) могут завышать значение σ_{\parallel} в 1.3—1.5 раза по сравнению с более точным значением (36).

Поступила 3 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Cowling T. G. The electrical conductivity of an ionized gas in a magnetic field with applications to the solar atmosphere and the ionosphere. Proc. Roy. Soc. A, 1945, vol. 183, p. 453 (русск. перев.: Сб. «Современные проблемы астрофизики и физики Солнца», Изд. иностр. лит., 1951).
2. Schirmer H., Friedrich T. Elektrische Leitfähigkeit der Plasmen. Z. Physik, 1958, B. 151, N. 174, S. 375 (русск. перев.: Сб. «Движущаяся плазма». Изд. иностр. лит., 1961).
3. Rirkip A. C. Electrical conductivity of the partially ionized gases. Phil. Fluids, 1961, vol. 4, p. 154 (русск. перев.: Сб. «Плазма в магнитном поле и прямое преобразование тепловой энергии в электрическую», Атомиздат, 1962).
4. Жданов В. М. Явления переноса в частично ионизованном газе. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
5. Настоящий А. Ф., Пузиков Л. Д. Уравнения тепло- и электропроводности в частично ионизованном газе. ПМТФ, 1962, № 5.
6. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
7. Kihara T. Thermodynamical foundations of plasma theory. J. Phys. Soc. Japan, 1959, vol. 14 (2), p. 128 (русск. перев.: Сб. «Движущаяся плазма», Изд. иностр. лит., 1961).
8. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. Изд. иностр. лит., 1957.
9. Lin S. C., Resler E. L., Kantorowitz A. R. Electrical conductivity of high ionized argon, produced by shock waves. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, p. 95 (русск. перев.: Сб. «Плазма в магнитном поле и прямое преобразование тепловой энергии в электрическую», Атомиздат, 1962).