Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 1

УДК 517.944 + 519.46

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА В ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ СИЛ

С. В. Мелешко

**Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,
630090 Новосибирск**

Дается групповая классификация системы уравнений, описывающей течения идеального газа в постоянном поле сил. Такими движениями газа называются решения, инвариантные относительно оператора $X_4 + X_{10}$ [1] . Используемый алгебраический подход опирается на анализ, развиваемый в последнее время [1].

1. Фактор-система. Рассматриваются решения уравнений газовой динамики, инвариантные относительно оператора $X = X_4+X_{10} = \partial_t+t\partial_x+\partial_u$ из оптимальной системы [1]. Инвариантами этого оператора являются

$$x_1 = x - t^2/2, \quad y,\ z,\ u-t,\ v,\ w,\ \rho,\ p.$$

Здесь t — время; (x,y,z) — пространственные координаты; (u,v,w) — скорость; ρ — плотность; p — давление газа. Инвариантное решение имеет представление

$$u = t + U(x_1,y,z), \quad v = V(x_1,y,z), \quad w = W(x_1,y,z), \quad \rho = \rho(x_1,y,z), \quad p = p(x_1,y,z),$$

а фактор-система

$$d_1\mathbf{v} + \rho^{-1}\nabla_1 p = (-1,0,0), \quad d_1\rho + \rho\,\mathrm{div}_1\mathbf{v} = 0, \quad d_1 p + A(p,\rho)\,\mathrm{div}_1\mathbf{v} = 0, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v} = (U,V,W)$; $d_1 = U\partial_{x_1} + V\partial_y + W\partial_z$; $\nabla_1 = (\partial_{x_1},\partial_y,\partial_z)$; $\mathrm{div}_1\mathbf{v} = U_{x_1} + V_y + W_z$.

Название данной работы обусловлено тем обстоятельством, что фактор-система (1.1) совпадает с системой (описывающей установившиеся течения газа в постоянном поле массовых сил), которая получается при аксиоматическом построении из предположения о характере движения газа и о поле внешних сил. Здесь эти уравнения возникают как одна из инвариантных подмоделей обычных уравнений газовой динамики. Нестационарные течения газа в постоянном поле массовых сил изучались в [2, 3]. В [2] исследовались одномерные нестационарные изоэнтропические течения. В [3] методом дифференциальных связей построены решения типа простых волн в двумерном случае.

2. Группа эквивалентностей. Для целей проведения групповой классификации системы (1.1) находится группа эквивалентностей, преобразующая произвольный элемент A. Операторы преобразований эквивалентности ищутся в виде

$$X^e = \xi^{x_1}\partial_{x_1} + \xi^y\partial_y + \xi^z\partial_z + \zeta^U\partial_U + \zeta^V\partial_V + \zeta^W\partial_W + \zeta^\rho\partial_\rho + \zeta^p\partial_p + \zeta^A\partial_A. \tag{2.1}$$

В отличие от [4], здесь при нахождении операторов (2.1) допускается зависимость от произвольного элемента A во всех координатах инфинитезимального оператора X^e. Поскольку $A = A(p,\rho)$, то оператор (2.1) должен удовлетворять условиям инвариантности системы (1.1), дополненной уравнениями

$$A_{x_1} = A_y = A_z = A_U = A_V = A_W = 0. \tag{2.2}$$

При этом так как функции $\mathbf{v}(x_1, y, z)$, $\rho(x_1, y, z)$, $p(x_1, y, z)$ и $A(\rho, p)$ действуют в различных пространствах, то и формулы продолжения будут для них различные. Координаты продолженного оператора

$$\overline{X^e} = X^e + \zeta^{U_{x_1}}\partial_{U_{x_1}} + \zeta^{U_y}\partial_{U_y} + \zeta^{U_z}\partial_{U_z} + \ldots \tag{2.3}$$

находятся по формулам

$$\zeta^{h_\lambda} = D_\lambda^e\zeta^h - h_{x_1}D_\lambda^e\xi^{x_1} - h_y D_\lambda^e\xi^y - h_z D_\lambda^e\xi^z.$$

Здесь h принимает значения U, V, W, ρ, p; $\lambda = x_1$, y, z; оператор $D_\lambda^e = \partial_\lambda + U_\lambda\partial_U + V_\lambda\partial_V + W_\lambda\partial_W + \rho_\lambda\partial_\rho + p_\lambda\partial_p + (A_\rho\rho_\lambda + A_p p_\lambda)\partial_A$. Координаты продолженного оператора (2.3), связанные с произвольным элементом, в силу (2.2) определяются по формулам

$$\zeta^{A_\lambda} = \widetilde{D}_\lambda^e\zeta^A - A_\rho\widetilde{D}_\lambda^e\zeta^\rho - A_p\widetilde{D}_\lambda^e\zeta^p \quad (\lambda = x_1, y, z, U, V, W, \rho, p),$$

где $\widetilde{D}_\lambda^e = \partial_\lambda \quad (\lambda = x_1, y, z, U, V, W)$; $\widetilde{D}_\rho^e = \partial_\rho + A_\rho\partial_A$; $\widetilde{D}_p^e = \partial_p + A_p\partial_A$. Как и в классическом случае [4], можно показать, что построенная по оператору (2.1) группа преобразований эквивалентности, допускаемая уравнениями (1.1), (2.2), преобразует систему (1.1), сохраняя ее дифференциальную структуру и изменяя только произвольный элемент A. Условие зависимости всех координат инфинитезимального оператора (2.1) от A может в общем случае расширить классическую [4] группу эквивалентностей.

Для системы (1.1) группа эквивалентностей совпадает с классической и порождается операторами

$$2(x_1\partial_{x_1} + y\partial_y + z\partial_z) + U\partial_U + V\partial_V + W\partial_W - 2\rho\partial_\rho,$$
$$z\partial_y - y\partial_z + W\partial_V - V\partial_W, \quad \rho\partial_\rho + p\partial_p + A\partial_A, \quad \partial_p,\ \partial_{x_1},\ \partial_y,\ \partial_z.$$

3. Допускаемая группа. Допускаемый системой (1.1) оператор представляется в виде

$$X = \xi^{x_1}\partial_{x_1} + \xi^y\partial_y + \xi^z\partial_z + \zeta^U\partial_U + \zeta^V\partial_V + \zeta^W\partial_W + \zeta^\rho\partial_\rho + \zeta^p\partial_p.$$

Проведенные вычисления показывают, что интегрирование определяющих уравнений сводится к нахождению решений уравнений

$$(k_3 - k_1)\rho\frac{\partial A}{\partial\rho} + (k_3 p + k_4)\frac{\partial A}{\partial p} = k_3 A. \tag{3.1}$$

Здесь постоянные k_1, k_2, k_3, k_4 связаны с координатами инфинитезимального оператора $\zeta^U = k_1x_1 + k_2$, $\zeta^p = k_3p + k_4$. Ядро основных алгебр Ли составляют операторы

$$X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_7 = z\partial_y - y\partial_z + W\partial_V - V\partial_W.$$

Оператор X_1 является центром ядра. Здесь сохранена нумерация операторов из [1]. Расширение ядра основных алгебр Ли происходит за счет специализации функции $A(p, \rho)$. Итоги групповой классификации приведены в табл. 1, где

$$Y_\lambda = \rho\lambda'(p)\partial_\rho + \lambda(p)\partial_p,\ Y_2 = \rho\partial_\rho + p\partial_p, \quad Y_3 = \partial_p,$$
$$Y_4 = 2(x_1\partial_{x_1} + y\partial_y + z\partial_z) + U\partial_U + V\partial_V + W\partial_W - 2\rho\partial_\rho$$

с произвольной функцией $\lambda(p)$.

Таблица 1

m	A	p	Расширяющие операторы
1	$f(p,\rho)$	$\varphi(\rho,Э)$	—
2	$pf(p\rho^{-\gamma})$	$\rho^{\gamma}\varphi(Э\rho)$	$2\gamma Y_2+(\gamma-1)Y_4$
3	$pf(p/\rho)$	$\rho\varphi(Э\rho)$	Y_2
4	$f(p)$	$\varphi(Э\rho)$	Y_4
5	$pf(\rho)$	$Э\varphi(\rho)$	$2Y_2+Y_4$
6	γp	$Э\rho^{\gamma}$	Y_2,Y_4
7	$f(\rho e^{-p})$	$\ln\ \rho+\varphi(Э\rho)$	Y_4-2Y_3
8	$f(\rho)$	$\varphi(\rho)+Э$	Y_3
9	1	$\ln\rho+Э$	Y_3,Y_4
10	0	$Э$	Y_4,Y_λ

Таблица 2

N	$r=1$	Nor
1	$X_7+\alpha X_1$	2,1
2	$X_2+\alpha X_1$	3,1
3	X_1	L_4
	$r=2$	
1	$X_7,\ X_1$	2,1
2	$X_2,X_3+\beta X_1$	3,1
3	X_2,X_3	L_4
4	X_2,X_1	3,1
	$r=3$	
1	X_1,X_2,X_3	L_4
2	$X_2,X_3,X_7+\alpha X_1$	L_4

Заметим, что фактор–алгебра нормализатора оператора $X = X_4 + X_{10}$ в L_{11} [1] по X $(\mathrm{Nor}_{L_{11}}(X)/X)$ состоит из операторов $(1,2,3,7)$ (здесь и ниже указаны только номера операторов).

Оптимальная система подалгебр состоит из подалгебр, указанных в табл. 2. Здесь и ниже используются обозначения (r,N) для подгруппы размерности r с номером N в табл. 2.

Перейдем к анализу инвариантных решений системы (1.1).

4. Инвариантные решения. Решения, инвариантные относительно одномерных подалгебр, строятся на подалгебрах $r=1$ оптимальной системы из табл. 2.

Инвариантное решение подалгебры (1,1) в цилиндрической системе координат (x_1,r,θ) имеет представление $(x'=x_1-\alpha\theta)$

$$U=U(x',r),\quad V=V(x',r),\quad W=W(x',r),\quad \rho=\rho(x',r),\quad p=p(x',r).$$

Фактор-система записывается в векторном виде

$$B\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x'}+C\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}=\mathbf{f}, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots,u_5)'=(U-\alpha W/r,V,\alpha U/r+W,\rho,p)'$; $\mathbf{f}=-(1,-W^2/r,\alpha+u_2u_3,\rho V/r,AV/r)'$; E_5 — единичная матрица; $B=u_1E_5+B^0$; $C=u_2E_5+C^0$. В матрицах B^0 и C^0 ненулевыми являются только $B^0_{15}=(1+\alpha^2/r^2)/\rho$, $B^0_{41}=\rho$, $B^0_{51}=A$, $C^0_{25}=1/\rho$, $C^0_{42}=\rho$, $C^0_{52}=A$. Характеристическое уравнение $\det(B^{-1}C-\lambda E_5)$ системы (4.1) имеет вид

$$(\lambda u_1-u_2)^2(\lambda^2(\rho u_1^2-A(1+\alpha^2/r^2))-2\lambda\rho u_1u_2+\rho u_2^2-A)=0.$$

В случае подалгебры (1,2) табл. 2 независимыми переменными будут $(x_1-\alpha y,z)$, а фактор-система $(x'=x_1-\alpha y)$

$$B\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x'}+C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}=-\beta^2\mathbf{f}. \tag{4.2}$$

Здесь $\beta=(1+\alpha^2)^{-1/2}$; $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots,u_5)'=(\beta(U-\alpha V),\ \beta(\alpha U+V),\ \beta W,\rho,p)'$;

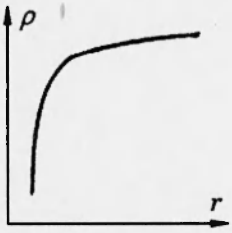

Рис. 1

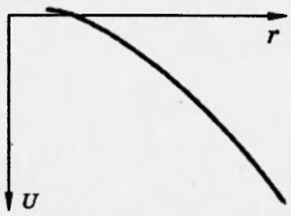

Рис. 2

$\mathbf{f} = (1, \alpha, 0, 0, 0)'$; $B = u_1 E_5 + B^0$ и $C = u_3 E_5 + C^0$ с ненулевыми элементами в матрицах B^0, C^0 ($B^0_{15} = 1/\rho$, $B^0_{41} = \rho$, $B^0_{51} = A$, $C^0_{35} = \beta^2/\rho$, $C^0_{43} = \rho$, $C^0_{53} = A$). Характеристическим уравнением системы (4.2) будет

$$(\lambda u_1 - u_3)^2(\lambda^2(\rho u_1^2 - A) - 2\lambda \rho u_1 u_3 + \rho u_3^2 - \beta^2 A) = 0.$$

Наконец, для (1,3) фактор-система имеет вид

$$B\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + C\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\beta^2 \mathbf{f},$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_5)' = (U, V, W, \rho, p)'$; $\mathbf{f} = (-1, 0, 0, 0, 0)'$; $B = u_2 E_5 + B^0$ и $C = u_3 E_5 + C^0$ с ненулевыми элементами в матрицах B^0, C^0 ($B^0_{25} = 1/\rho$, $B^0_{42} = \rho$, $B^0_{52} = A$, $C^0_{35} = 1/\rho$, $C^0_{43} = \rho$, $C^0_{53} = A$). Характеристики здесь легко определяются, если учесть, что для $\mathbf{f} = 0$ и $U = 0$ эта система совпадает с плоскими установившимися течениями, параллельными плоскости $x = 0$.

Решения, инвариантные относительно двумерных подалгебр, строятся на подалгебрах θ_2 оптимальной системы из табл. 2.

Для подалгебры (2,1) фактор-система является частным случаем (4.1) при условиях $\alpha = 0$, $\partial \mathbf{u}/\partial x' = 0$, а решение изоэнтропично и находится из системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$VU' = -1, \quad (V^2 - A/\rho)\rho' = -\rho(V^2 - W^2)/r. \tag{4.3}$$

Здесь штрих обозначает производную по r; $V = c_2/(\rho r)$, $W = c_1/r$ с произвольными постоянными c_1, c_2 ($c_2 \neq 0$). Качественное поведение решений системы (4.3) для политропного газа ($\gamma = 1{,}4$) представлено на рис. 1 и 2.

Инвариантное решение (2,2) и (2,3) является частным решением системы (4.2) с $\alpha = 0$ и независимым инвариантом $x' = x_1 - \beta z$. Если $\beta = 0$ (подалгебра (2,3)), то для одного из решений имеем $U = 0$, $p(x')$, $V(x')$, $W(x')$ произвольны, а $\rho(x') = -p'(x')$. Другое решение этой фактор-системы (при любом β) изоэнтропично и определяется из системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\overline{W}' = -\frac{\beta\rho}{c(1+\beta^2)}, \quad (\rho A - c^2)\rho' = -\frac{\rho^3}{(1+\beta^2)}, \tag{4.4}$$

где $\overline{W} = \sin\theta \cdot U + \cos\theta \cdot W$; $\overline{U} = \cos\theta \cdot U - \sin\theta \cdot W$; $\operatorname{tg}\theta = \beta$; $\overline{U}\rho = c$; $V = 0$. В частности,

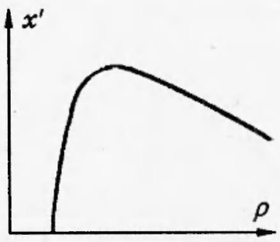

Рис. 3

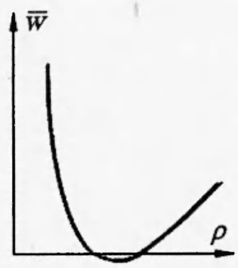

Рис. 4

для политропного газа ($A = \gamma p = \gamma c_1 \rho^\gamma$) общим решением уравнений (4.4) является

$$\overline{W} = \beta\Big(\frac{c}{\rho} + \frac{c_1}{c}\rho^\gamma\Big), \qquad \frac{c}{2\rho^2} + \frac{\gamma c_1}{(\gamma-1)}\rho^{\gamma-1} = -\frac{x'}{(1+\beta^2)},$$

откуда неявно определяется инвариантное решение. На рис. 3 и 4 приведено качественное поведение кривых $x'(\rho)$ и $W(\rho)$.

Для произвольной функции $A(p,\rho)$ инвариантное решение (2,4) имеется, когда $\rho = \mathrm{const}$ и $p = \mathrm{const}$. Другие решения получаются только для специального вида функции $A(p,\rho)$ такой, что

$$AA_p + \rho A_\rho + A = 0.$$

5. Заключительные замечания. Л. В. Овсянников предлагает считать «источником» простых решений (устное сообщение) частично инвариантные решения ранга нуль. В газовой динамике для них $p = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$. В таких решениях уменьшение размерности задачи может быть осуществлено переходом к интегрированию вдоль линий тока. В данной подмодели

$$\frac{dU}{ds} = -1, \quad \frac{dV}{ds} = 0, \quad \frac{dW}{ds} = 0, \quad \frac{dx_1}{ds} = U, \quad \frac{dy}{ds} = V, \quad \frac{dz}{ds} = W. \tag{5.1}$$

Пусть, например, при $s = 0$ задаются начальные условия

$$x_1 = 0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad U = U_0(y_0, z_0), \quad V = V_0(y_0, z_0), \quad W = W_0(y_0, z_0). \tag{5.2}$$

Тогда после интегрирования (5.1) с (5.2) определяются следующие функции:

$$U = -s + U_0(y_0, z_0), \quad V = V(y_0, z_0), \quad W = W(y_0, z_0),$$

$$x = -s^2/2 + sU_0, \quad y = y_0 + sV, \quad z = z_0 + sW.$$

В системе (1.1) осталось разрешить только уравнение $\mathrm{div}_1 \mathbf{v} = 0$, которое в переменных (s, y_0, z_0) является квадратичным уравнением относительно s. Расщепление его по s дает три уравнения на три неизвестные функции ($U_0(y_0, z_0)$, $V(y_0, z_0)$, $W(y_0, z_0)$):

$$\frac{\partial V}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial z_0} - \frac{\partial V}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial y_0} = 0; \tag{5.3}$$

$$(VW' - W)\Big[V\frac{\partial U_0}{\partial y_0}\frac{\partial U_0}{\partial z_0} - U_0\frac{\partial U_0}{\partial y_0}\frac{\partial V}{\partial z_0} + W\Big(\frac{\partial U_0}{\partial z_0}\Big)^2 - U_0 W'\frac{\partial U_0}{\partial z_0}\frac{\partial V}{\partial z_0} + \frac{\partial U_0}{\partial z_0}\Big] =$$

$$= U_0\Big(\frac{\partial V}{\partial y_0} + W'\frac{\partial V}{\partial z_0}\Big) = 1 + V\frac{\partial U_0}{\partial y_0} + W\frac{\partial U_0}{\partial z_0}. \tag{5.4}$$

В (5.4) использовано $W' = dW/dV$, где $W = W(V)$ — общее решение (5.3). Тем самым решение системы (1.1) сводится к интегрированию нелинейной системы (5.4), состоящей из двух уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. Примером решения системы (5.4) может быть случай, когда $W = cV$, $c = \text{const}$ (без ограничения общности можно считать $c = 0$). Тогда

$$W = 0, \quad V = V(z_0), \quad U_0 = -y_0/V + \varphi(z_0).$$

Работа выполнена в рамках программы ПОДМОДЕЛИ [5]. Автор выражает благодарность всем участникам этой программы за критические замечания, высказанные в процессе подготовки статьи к публикации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17326).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. **Станюкович К. П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
3. **Мелешко С. В.** Об одном классе решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений со многими независимыми переменными // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1981. Т. 12, № 4. С. 87–100.
4. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Новосибирск, 1992. (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики).

Поступила в редакцию 10/I 1994 г.,
в окончательном варианте — 12/I 1995 г.