

О ДИНАМИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ФАЗ

М. К. Лихт, В. А. Штейнберг

(Харьков)

В теории движения двухфазных сред обычно рассматриваются два предельных случая: задача Стефана [1], в которой пренебрегают движением сред, и задача Рэлея о росте пузыря [2], в которой не учитывается фазовый переход.

Тем не менее существуют задачи о расслоении течений, о поведении паровых пузырей при сильных перегревах или скачках давления, о прохождении ударных волн в двухфазной среде и др., в которых предъявляются повышенные требования к точности учета условий взаимодействия фаз на границе их раздела, и поэтому при их решении нельзя пренебрегать ни движением, ни превращениями фаз.

Ниже сделана попытка получить такие условия, переходящие в соответствующих предельных случаях в задачи Рэлея и Стефана.

1. Для правильного феноменологического учета условий взаимодействия на границе раздела фаз можно использовать результаты теории сильных разрывов в газодинамике с дополнительным учетом поверхностного натяжения [3,4]. При этом воспользуемся законами сохранения массы, импульса и энергии.

Из закона сохранения массы

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (1.1)$$

и уравнения непрерывности для сплошных сред при помощи выражения [5]

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{W} \right) d\Omega + \int_{\sigma} [\varphi U] d\sigma \quad (U = W_n - N) \quad (1.2)$$

следует первое условие совместности

$$[\rho U] = 0 \quad (1.3)$$

Здесь ρ — плотность, $\mathbf{W}$ — скорость частиц среды, U — нормальная скорость среды относительно фронта, N — скорость фронта раздела фаз в нормальном направлении, Ω — выделенный объем движущейся жидкости, σ — часть поверхности раздела фаз, ограниченная поверхностью Σ объема Ω , квадратные скобки означают разность значений (скачок) величины φ с обеих сторон поверхности раздела, а индексы 1 и 2 относятся к жидкости и пару соответственно.

Второе условие совместности следует из закона сохранения импульса

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{W} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Sigma} \chi d\sigma + \oint_{\Gamma} \alpha (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}) d\Gamma \quad (\chi = -p\mathbf{n}) \quad (1.4)$$

где $\mathbf{f}$ — плотность объемной силы, χ — поверхностная плотность силы (в рассматриваемом случае вязкостью пренебрегаем), p — давление, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности раздела, α — (постоянный) коэффициент поверхностного натяжения, $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательной к контуру Γ границы поверхности σ .

С учетом (1.2) и уравнения непрерывности уравнение (1.4) принимает вид

$$\int_{\Omega} \rho \frac{dW}{dt} d\Omega + \int_{\sigma} [\rho U W] d\sigma = \int_{\Omega} f d\Omega - \oint_{\Sigma} p n d\sigma + \oint_{\Gamma} \alpha (n \times \tau) d\Gamma \quad (1.5)$$

После преобразований поверхностного и контурного интегралов с учетом уравнения движения получаем второе условие на границе раздела

$$[\rho U W + p n] = -2\alpha H n \quad (1.6)$$

где H — средняя кривизна поверхности.

Третье условие на границе раздела следует из закона сохранения энергии

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \rho \left(\frac{W^2}{2} + E \right) d\Omega + \int_{\sigma} \alpha d\sigma \right\} + \int_{\Omega} W f d\Omega + \oint_{\Sigma} (\chi W - q n) d\sigma + \oint_{\Gamma} \{ W \alpha (n \times \tau) \} d\Gamma \quad (1.7)$$

Здесь q — тепловой поток через единичную площадку границы раздела, E — плотность внутренней энергии.

Воспользуемся (1.2) и формулой Гаусса — Остроградского для преобразования (1.7)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{2} + E \right) - W f + \operatorname{div} (p W + q) \right\} d\Omega + \alpha \frac{d}{dt} \int_{\sigma} d\sigma = \\ & = - \int_{\sigma} \left[(p W + q) n + \rho U \left(\frac{W^2}{2} + E \right) \right] d\sigma + \alpha \oint_{\Gamma} \{ W (n \times \tau) \} d\Gamma \end{aligned}$$

Объемный интеграл слева равен нулю в соответствии с уравнением энергии. После ряда преобразований получаем

$$[(p W + q) n + \rho U (\frac{1}{2} W^2 + E)] = -2\alpha H n \quad (1.8)$$

В результате имеем систему совместности на границе раздела фаз

$$[\rho U] = 0, \quad [W \tau] = 0, \quad [\rho U^2 + p] = -2\alpha H \quad (1.9)$$

$$[\rho U (\frac{1}{2} U^2 + i) + q_n] = 0 \quad (1.10)$$

$$(i = E + p/\rho)$$

Здесь i — энтальпия.

Последнее условие (1.10) показывает, что рассмотрение задач с фазовым переходом без учета тепловых потоков, обусловленных теплопроводностью, имеет смысл только для быстрых процессов. Действительно, в последнем случае $[U^2] = -2[i]$, а поскольку $-[i] = L$ (L — теплота испарения), U должно иметь для воды значения, близкие к $2 \cdot 10^3$ м/сек.

Если теплопроводностью не пренебрегать, то одних гидродинамических условий (1.9), (1.10) недостаточно для однозначного решения. В этом нетрудно убедиться на примере задач Стефана [1] и Рэлея [2], где помимо гидродинамических принимаются следующие условия:

$$i_2 - i_1 = L, \quad T_1 = T(p), \quad T_2 = T(p) \quad (1.11)$$

где T и $T(p)$ — температура у границы раздела и на линии равновесия фаз соответственно.

Условия (1.11) предполагают равновесность системы. Применение (1.11) к процессам в сильно перегретой жидкости при ударных тепловых потоках или при прохождении ударных волн через двухфазные среды необос-

нованно. Для таких быстрых процессов недостающие условия были получены [6] при кинетическом рассмотрении задачи о фазовом переходе. Эти условия представляют собой выражения для потоков массы, энергии Q и импульса G через термодинамические параметры фаз на границе

$$\rho U = \left(\frac{k}{2\pi m}\right)^{1/2} \left[T^{1/2} \frac{\rho''^2}{\rho'}\right], \quad Q = \left\{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{k}{m}\right)^3\right\}^{1/2} \left[T^{3/2} \left(2 + \ln \frac{\rho'}{\rho''}\right) \frac{\rho''^2}{\rho'}\right] \quad (1.12)$$

$$G = \frac{k}{2m} \left[T \frac{\rho''^2}{\rho'}\right]$$

Здесь m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, один и два штриха относятся к жидкости и пару соответственно, а выражения в скобках надо брать сначала при параметрах жидкости, затем при параметрах пара на границе раздела, как и раньше.

2. Для сравнения полученных условий совместности с аналогичными условиями [1,7,8] рассмотрим динамику изменения сферического пузыря пара в большом объеме жидкости.

Для пузыря радиуса R система уравнений (1.9), (1.10) примет вид

$$[\rho U] = 0, \quad [W_\tau] = 0, \quad [\rho U^2 + p] = -2\alpha / R \quad (2.1)$$

$$\rho U [1/2 U^2 + i] + [q_n] = 0 \quad (2.2)$$

$$(U = W_R - R)$$

Жидкость на бесконечности считаем покоящейся; начало координат поместим в центр пузыря.

Влиянием силы тяжести пренебрегаем; тогда движение жидкости будет зависеть лишь от радиус-вектора элемента жидкости. Из уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости следует:

$$W_r = \frac{a(t)}{r^2}, \quad p = \rho \left(\frac{a}{r} - \frac{a^2}{2r^4} \right) + p_\infty(t) \quad (2.3)$$

Если пренебречь влиянием фазового перехода на динамику роста пузыря, т. е. считать $W_{1R} = R^*$, а также пренебречь величиной $[\rho U^2]$ по сравнению с $(2\alpha / R)$, то из (2.3) и условий совместности (2.1) получаем один из предельных случаев — уравнение Рэлея [2]

$$RR'' + 3/2 R'^2 = (p_2 - p_\infty - 2\alpha / R) / \rho' \quad (2.4)$$

Плезет и Цвик [7], Форстер и Зубр [8], предположив, что p_2 есть давление насыщенных паров при температуре жидкости на границе раздела, использовали (2.4) для описания динамики роста пузыря пара в перегретой жидкости. Граничным условием для уравнения теплопроводности в жидкости на движущейся поверхности испарения они приняли

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = \left| \frac{L\rho''}{\lambda'} R \right. \quad (2.5)$$

Здесь λ' — коэффициент теплопроводности. (2.5) есть уравнение теплового баланса на границе раздела фаз и частично учитывает влияние фазового перехода на рост пузыря.

Условие (2.5) получается из (2.2), если пренебречь: 1) потоком тепла в паре; 2) величиной $[1/2 U^2]$ по сравнению с $[i]$, и принять — $[i] = L$.

При умеренных перегревах жидкости ($1 \div 10^\circ \text{K}$) и низких давлениях это пренебрежение динамическими членами оправдывается хорошим совпадением расчетных и экспериментальных [9] результатов.

Однако, как было показано выше, принимая за основу уравнение Рэлея, авторы [7,8] пренебрегают ролью фазового перехода в уравнении для потока массы и импульса (2.1), что в ряде случаев не будет достаточно обоснованным.

Для другого предельного случая — задачи Стефана — условия совместности с учетом поверхностного натяжения получаются из соотношений (2.1) в виде

$$W_1 = W_2 \text{ и } p_1 = p_2 - 2\alpha / R \text{ при } \rho' \approx \rho''$$

и из (2.2)

$$\left[\lambda' \frac{\partial T}{\partial r} \right] = L \rho R' \text{ при } -[i] = L$$

и движение границы полностью определяется переносом тепла.

Выясним, к каким изменениям приведет учет фазового перехода в динамике роста парового пузыря. Из первых равенств (2.1) и (2.3) следует:

$$R' = a(t) / R^2 (1 - \rho'' / \rho') \quad (2.6)$$

Исключая отсюда $a(t)$ посредством второго соотношения (2.3) и используя (2.1), получаем

$$RR'' + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\rho''}{\rho'} \right) R'^2 - \frac{(\rho'')'}{\rho' - \rho''} RR' = \frac{1}{\rho' - \rho''} \left(p_2(T) - p_\infty - \frac{2\alpha}{R} \right) \quad (2.7)$$

где $p_2(T)$ — давление насыщенного пара в пузыре при температуре T у границы, p_∞ — давление на бесконечности.

Из (2.7) следует, что существенных отклонений от случая, изученного в [7,8], можно ожидать, во-первых, при $\rho'' \approx \rho'$, например, при росте пузыря вблизи критической точки T^* ; во-вторых, когда $(\rho'')'$ значительно, в частности, при скачке давления на бесконечности или при больших перегревах.

3. Чтобы показать роль дополнительных членов, полученных в уравнении (2.7), проанализируем его решение при

$$\rho'' \approx \rho', \quad (\rho'')' \ll 1, \quad p_2 - p_\infty = \Delta p = \text{const} \quad (3.1)$$

При этих предположениях (2.7) допускает одну квадратуру

$$\xi' = e^{-1/2(2+\vartheta)(\xi-1)} \left(\frac{2\Delta p \{e^{(2+\vartheta)(\xi-1)} - 1\}}{\rho' R_0^3 \vartheta (2 + \vartheta)} - \frac{4\alpha}{\rho' R_0^3 \vartheta} \int_1^\xi \frac{e^{(2+\vartheta)(\xi-1)}}{\xi} d\xi \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

$$\left(\vartheta = 1 - \frac{\rho''}{\rho'}, \quad \xi = \frac{R}{R_0} \right)$$

Здесь R_0 — начальный радиус зародыша; при этом положено $R' = 0$ при $t = 0$. Для начальной стадии роста пузыря полученное решение (3.2) существенно упрощается, если учесть малость $\xi - 1$

$$\xi' = \sqrt{\frac{2(\Delta p R_0 - 2\alpha)}{\rho' R_0^3 \vartheta}} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{2} \vartheta \right) (\xi - 1) \right\} \sqrt{\xi - 1} \quad (3.3)$$

Решение уравнения Рэлея (2.4) при условии (3.1) может быть получено из (3.3) при $\rho'' = 0$. Из сравнения этого решения с (3.3) видно, что фазовый переход приводит к изменению скорости начального роста пузыря в $f = 1 / \sqrt{\vartheta}$ раз.

Таким образом, при малых давлениях, когда $\rho'' \ll \rho'$, фазовый переход настолько тормозится влиянием динамических членов, что рост парового пузыря происходит почти так же как и газового. При $T \approx T^*$ отклонения от решений [7,8] становятся существенными даже при малых перегревах.

4. Для определения влияния дополнительных членов в (2.7) на динамику роста парового пузыря вблизи T^* при тех же предположениях, что и в [7,8], были проведены численные расчеты на ЭЦВМ «Минск-2». Максимальный перегрев жидкости при температурах, близких к T^* , определялся по методике [10,11].

Система уравнений, определяющая динамику роста пузыря и принятая для расчета, имеет вид

$$RR'' + \frac{3 - \rho''/\rho'}{2} R'^2 - RR' \frac{(\rho'')'}{\rho' - \rho''} = \frac{1}{\rho' - \rho''} (p_2(T) - p_\infty - \frac{2\alpha}{R}) \quad (4.1)$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L\rho'\rho''}{(\rho' - \rho'')T} \quad (4.2)$$

$$T = T_0 - \frac{2L\rho''}{c'\rho' \sqrt{\pi a'}} \int_0^t R''(t') (t - t')^{1/2} dt' \quad \left(a' = \frac{\lambda'}{c'\rho'} \right) \quad (4.3)$$

Здесь c' — теплоемкость, a' — коэффициент температуропроводности, T_0 — начальная температура системы. (4.3) дает температуру на стенке пузыря в начальный период его роста (при $R \approx R_0$) [8] и является решением задачи о теплопроводности через движущуюся поверхность испарения.

Если в качестве начальных условий для системы (4.1) — (4.3) принять радиус зародыша, соответствующий заданному перегреву

$$R_0' = 2\alpha/(p_0 - p_\infty) \quad (4.4)$$

(где p_0 — давление насыщенного пара при температуре T_0) и $R_0' = 0$, то система будет находиться в равновесии. Для того чтобы вывести пузырь из равновесия, нужно изменить внешние условия. Начальный радиус пузыря был принят равным $R_0 = R_0' + \Delta$, $\Delta \ll R_0$.

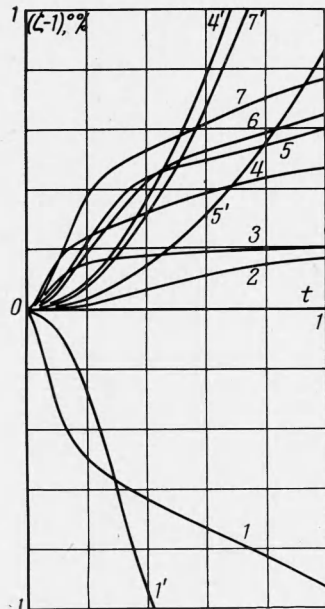
Решения системы (4.1) — (4.3) вместе с начальными условиями получены методом Рунге — Кутты с уточнением посредством дробления шага. Для сравнения и проверки методики расчеты проводились при перегревах $\Delta T = T_0 - T_\infty = 3$ и 5°K для воды — при $T_\infty = 373^\circ \text{K}$ и $p_\infty = 10^5 \text{ н/м}^2$, т. е. для таких же условий, как и в [7,8].

Поскольку в этом случае $\rho'' \ll \rho'$, то система уравнений (4.1) — (4.3) в первом приближении совпадает с системой, принятой для расчета в [7,8]. И действительно, проведенные расчеты системы уравнений (4.1) — (4.3) хорошо совпали с решениями, полученными в [7,8]. Это позволяет надеяться на правильность принятого метода расчета также при других начальных условиях.

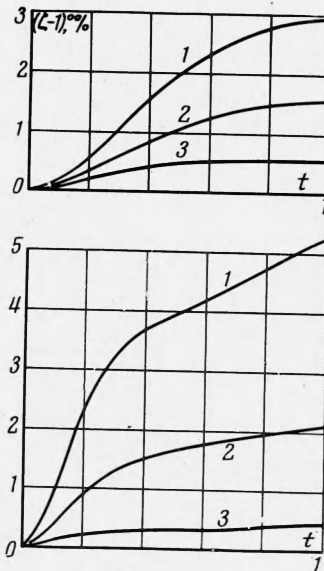
Вблизи же критической точки расчеты динамики роста и схлопывания парового пузыря для воды по системе уравнений (4.1) — (4.3) выявили существенное отличие от решений, полученных из уравнений (2.4), (4.2) и (4.3), принятых в [7,8], что видно из фиг. 1.

Из численного расчета выяснилось, что, во-первых, при $T \approx T^*$ член $RR'\rho''/(\rho' - \rho'')$ в (4.1) — одного порядка с остальными членами уравнения; во-вторых, время роста пузыря $t \sim R/R'$ при $R \approx R_0$ того же порядка, что и характерное время процесса теплопроводности R^2/a (т. е. теплопроводностью пренебрегать нельзя).

Из графиков (фиг. 1) следует, что в начальный момент скорость роста (или схлопывания) больше в f раз, чем по уравнению (2.4). Затем характер роста пузыря по (2.4) и (2.7) различен. Решение (2.7) имеет перегиб и затем растет пропорционально t в степени, показатель которой меньше 1. Этого и следовало ожидать, так как при $T \approx T^*$ и $\rho' \approx \rho''$ асимптотическое поведение пузыря вблизи критической точки должно описываться известным решением Стефана [1]. Начальное замедление в росте (схлопывании) пузыря связано с проявлением поверхностного натяжения.



Фиг. 1



Фиг. 2 а, б

Фиг. 1. Зависимость относительного изменения радиуса $\zeta-1$ от времени t в сек при $T_0 = 641^\circ \text{K}$ и $\Delta T = 0,03^\circ \text{K}$: 1— $R_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, 2— $R_0 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, 3— $R_0 = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, 4— $R_0 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, 5— $R_0 = 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, 6— $R_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, 7— $R_0 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}$. Штрихи относятся к расчетам по уравнению (2.4)

Фиг. 2. Зависимость относительного изменения радиуса $\zeta-1$ от времени t в сек; комбинации значений T_0 и ΔT указаны в скобках в $^\circ \text{K}$: 1 (641, 0,5), 2 (643, 0,2), 3 (647, 0,03). а) $R_0 = 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, б) $R_0 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ м}$

По-видимому, при этом физически процесс роста пузыря аналогичен процессу кристаллизации образца из расплава: рост пузыря происходит вместе с движением изотермы $T = T(p_2)$, где $T(p_2)$ — температура фазового перехода, т. е. поведение пузыря действительно отличается от решения в [7,8], где существенно «расталкивание» (динамические члены), поскольку $\rho'' \ll \rho'$.

В отличие от решения уравнения (2.4) решение (2.7) зависит от R_0 немонотонно: для каждой T_0 существует R_0 , для которого скорость роста пузыря максимальна (фиг. 1).

Изменение роста пузыря пара в зависимости от T_0 приведено на фиг. 2. Как видно из графиков, при приближении к T^* процесс роста и

конденсации пузыря значительно замедляется. Это соответствует общей тенденции замедления процессов вблизи точки фазового перехода второго рода (в частности, вблизи критической точки вещества), что связано с особенностями в этой точке изотермической сжимаемости, теплоемкости и других термодинамических величин.

Поступила 12 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л., Гостехиздат, 1937.
2. Сб. Вопросы физики кипения. М., «Мир», 1964.
3. Лихт М. К., Штейнберг В. А. О движении границы раздела между жидкой и парообразной фазами. III Всес. конференц. по теплообмену и гидравлическому сопротивлению в элементах энергетических машин и аппаратов, Секция 4, Тезисы докл., Л., Изд-во ЦКТИ, 1967.
4. Афанасьев Ю. В., Крохин О. Н. Испарение вещества под действием излучения лазера. ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 4.
5. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
6. Кузнецкий Р. С., Лихт М. К., Штейнберг В. А. Кинетические условия на границе жидкости и пара. Укр. физ. ж., 1968, т. 12, № 6.
7. Plesset M. S., Zwick S. A. The growth of vapor bubbles in superheated liquids. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 4. (Рус. перев.: Плезет М. С., Цвик С. А. Рост паровых пузырей в перегретых жидкостях. В сб.: «Вопросы физики кипения», М., «Мир», 1964, стр. 189.)
8. Forster H. K., Zuber N. Growth of a vapor bubble in a superheated liquid. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 4. (Рус. перев.: Форстер Г., Зубер Н. Рост парового пузыря в перегретой жидкости. В сб.: «Вопросы физики кипения», М., «Мир», 1964, стр. 212.)
9. Dergarabedian P. The rate of growth of vapor bubbles in superheated water. J. Appl. Mechanics, 1953, vol. 20, No. 4. (Рус. перев.: Дергарабедян П. Скорость роста пузырей пары в перегретой воде. В сб.: «Вопросы физики кипения», М., «Мир», 1964, стр. 266.)
10. Скрипов В. П., Павлов П. А., Синицын Е. Н. Вскипание жидкостей при импульсном нагреве. Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, № 5.
11. Лихт М. К., Штейнберг В. А. Температурная граница устойчивости перегретой жидкости. III Всес. конференц. по теплообмену и гидравлическому сопротивлению в элементах энергетических машин и аппаратов, Секция 3, Тезисы докл., Л., Изд-во ЦКТИ, 1967.