

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В КРИСТАЛЛАХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

*В. С. Будаев*

(Москва)

На примере плоской задачи об источнике в неограниченной среде и задачи Лэмба для полуплоскости обсуждаются результаты по распространению упругих волн в анизотропных средах.

Рассматриваются среды, уравнения движения которых в условиях плоской деформации характеризуются четырьмя постоянными.

1. Для ряда анизотропных сред уравнения движения в условиях плоской деформации записываются в виде [1, 2]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\rho a_1 f \\ c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\rho a_2 f \end{aligned}$$

Здесь  $u, w$  — компоненты смещений по осям  $x$  и  $z$ ,  $\rho$  — плотность,  $t$  — время,  $a_1, a_2$  — постоянные,  $f$  — некоторая функция  $x, z, t$ . Постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_4$  выражаются через упругие постоянные среды.

В случае кубических кристаллов имеем

$$c_1 = c_4 = a_{11}, \quad c_2 = a_{12} + a_{44}, \quad c_3 = a_{44}$$

В случае гексагональных кристаллов, некоторых видов ромбоэдрических кристаллов и трансверсально-изотропных сред коэффициенты уравнений выражаются через упругие постоянные в виде

$$c_1 = a_{11}, \quad c_2 = a_{13} + a_{44}, \quad c_3 = a_{44}, \quad c_4 = a_{33}$$

В случае трансверсально-изотропных сред ось  $z$  направляется перпендикулярно плоскостям изотропии.

Предполагается, что коэффициенты уравнений удовлетворяют условиям строгой гиперболичности и условиям положительной определенности упругой энергии. В обозначениях  $\alpha, \beta, \gamma$ , где

$$\alpha = c_3 / c_1, \quad \beta = c_3 / c_4, \quad \gamma = 1 + \alpha\beta - c_2^2 / c_1 c_4$$

условия строгой гиперболичности записываются в виде

$$(1.2) \quad -2\sqrt{\alpha\beta} < \gamma < 1 + \alpha\beta$$

В случае кубических кристаллов условия положительной определенности упругой энергии имеют вид [3]

$$(1.3) \quad a_{11} > 0, \quad a_{44} > |a_{12}|, \quad a_{11} + 2a_{12} > 0$$

В случае гексагональных кристаллов и трансверсально-изотропных сред имеем [3]

$$(1.4) \quad a_{11} > 0, \quad a_{11} > |a_{12}|, \quad (a_{11} + a_{12}) a_{33} > 2a_{13}^2$$

Всю совокупность анизотропных сред разбиваем на группы следующим образом:

1) среды, упругие постоянные которых удовлетворяют условиям [1, 2]

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \gamma^2 &\geq 4\alpha\beta, \quad \gamma > \alpha(\beta + 1), \quad \gamma > \beta(1 + \alpha) \\ [2\beta(1 + \alpha) - \gamma(1 + \beta)] &\geq -|\beta - 1| \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta} \\ [2\alpha(1 + \beta) - \gamma(1 + \gamma)] &\geq -|\alpha - 1| \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta} \\ 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1 \end{aligned}$$

2) среды, для которых

$$(1.6) \quad \alpha\beta > 1, \quad \gamma^2 \geq 4\alpha\beta$$

3) остальные среды, в частности среды, для которых

$$\gamma^2 < 4\alpha\beta$$

Среды первой группы имеют широкое распространение. К ним относятся многие минералы, например каменная соль, сильвин, полевой шпат, берилл, песчаник, а также лед и ряд кристаллов чистых металлов, характеризующихся гексагональной плотноупакованной структурой. В первой группе сред находятся все изотропные среды, которые получим, положив  $\alpha = \beta$ ,  $\gamma = 2\alpha$  дополнительно к (1.5).

Распространенными являются также среды третьей группы. К ним относятся кристаллы чистых металлов, имеющие кубическую решетку (золото, серебро, медь, железо, калий, литий, натрий, свинец, висмут, вольфрам и другие), а также кристаллы некоторых металлов с гексагональной плотноупакованной структурой (цинк, бериллий).

Примеров сред второй группы не имеется. Ниже будет показано, что сред второй группы не существует.

2. Определение фундаментального решения системы (1.1) сводится к решению (1.1), в которой  $f = \delta(x) \delta(z) \delta(t)$ . Здесь  $\delta(x)$ ,  $\delta(z)$ ,  $\delta(t)$  — дельта-функции Дирака. Фундаментальное решение определяет поле смещений, возбуждаемое в среде сосредоточенным импульсным источником возмущений. Решение задачи для сред первой группы приводится в [1]. Для точек на оси  $x$  решение записано в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{\rho\alpha_1}{4\pi t c_0} \sum_{n=1}^2 \left\{ \frac{T_n^\circ(\varepsilon)}{\omega_n(\varepsilon) K(\varepsilon)} H(t - t_n) \right\} \\ w &= \frac{\rho a_2}{4\pi t c_0} \sum_{n=1}^2 \{ [\omega_n(\varepsilon) T_n^\circ(\varepsilon) / K(\varepsilon)] H(t - t_n) \} \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \omega_n(\varepsilon) &= \frac{c_2 q_n(\varepsilon)}{c_4 q_n^2(\varepsilon) - c_3 + \rho\varepsilon^2} = -\frac{c_3 q_n^2(\varepsilon) - c_1 + \rho\varepsilon^2}{c_2 q_n(\varepsilon)} \\ c_0 &= c_1 c_3 / c_2, \quad T_n^\circ(\varepsilon) = (-1)^{n+1} T_n(\varepsilon), \quad \varepsilon = x/t \end{aligned}$$

Значения остальных величин приводятся в [1]. Скорости волн в направлении оси  $x$  равны

$$c_a = \sqrt{c_1 / \rho}, \quad c_b = \sqrt{c_3 / \rho}, \quad c_a > c_b$$

Через  $c_a$  обозначена скорость квазипродольной волны и через  $c_b$  — скорость квазипоперечной волны. Величины  $q_n = q_n(\varepsilon)$  связаны с корнями характеристического уравнения системы  $\mu_n = \mu_n(\theta)$  соотношением

$$\mu_n(\theta) = i\theta q_n(\varepsilon), \quad \theta = 1/\varepsilon, \quad n = 1, 2$$

Функции  $\mu_n(\theta)$  определяют поверхности (кривые) рефракции. Функции  $q_n$  определяются выражениями

$$(2.3) \quad \begin{aligned} q_1 &= (-M_1 + \sqrt{M_1^2 - M_2})^{1/2}, \quad q_2 = (-M_1 - \sqrt{M_1^2 - M_2})^{1/2} \\ M_1 &= (2c_3c_4)^{-1} [c_2^2 + c_3(\rho\epsilon^2 - c_3) + c_4(\rho\epsilon^2 - c_1)] \\ M_2 &= (\rho\epsilon^2 - c_3)(\rho\epsilon^2 - c_1) / c_3c_4 \end{aligned}$$

Расположение точек ветвления радикалов (2.3), вид функций  $\mu_n(\theta)$  на вещественной оси  $\theta$ , геометрия волновых фронтов для сред первой группы обсуждаются в [1, 2] и для сред третьей группы — в [4], указаны принципиальные отличия сред первой и третьей групп.

Рассмотрим решение вблизи фронтов волн, пересекающих ось  $x$  в точках  $x_a = c_a t$ ,  $x_b = c_b t$  соответственно.

Из (2.3) и (2.2) находим

$$\lim_{\epsilon \rightarrow c_a} q_1(\epsilon) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow c_a} \omega_1(\epsilon) = \lim_{q_1 \rightarrow 0} [c_2 / (c_1 - c_3)] q_1(\epsilon)$$

Пусть  $\rho\epsilon^2 = c_1 - \delta$ ,  $\delta > 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Из (2.2) получаем для  $q_1$  уравнение

$$(2.4) \quad (c_3 q_1^2 - \delta) [c_4 q_1^2 + (c_1 - c_3) - \delta] + c_2^2 q_1^2 = 0$$

При  $\delta \rightarrow 0$  имеем

$$\rho\epsilon^2 \rightarrow c_1, \quad \epsilon \rightarrow c_a, \quad q_1^2 \rightarrow 0$$

Пренебрегая в (2.4) величиной  $q_1^4$  по сравнению с  $q_1^2$ , найдем с точностью до  $\delta$

$$q_1^2 = A\delta, \quad A \equiv \frac{c_1 - c_3}{c_3(c_1 - c_3) + c_2^2}$$

Для рассматриваемого случая сред первой группы  $c_1 > c_3$ , т. е.

$$(c_1 - c_3) > 0, \quad c_3(c_1 - c_3) + c_2^2 > 0$$

Для значений  $\epsilon$ , близких к  $c_a$ , получаем

$$\begin{aligned} q_1^2 &\approx A\delta \equiv A_1\sigma, \quad \sigma = \delta / \rho, \quad A_1 \equiv A\rho \\ \delta &= c_1 - \rho\epsilon^2, \quad \sigma t^2 = (c_a t - \epsilon t)(c_a t + \epsilon t) \end{aligned}$$

При  $\epsilon \rightarrow c_a$  или  $x \rightarrow x_a$

$$q_1(\epsilon) \rightarrow B(x_a - x)^{1/2}$$

где  $x_a = c_a t$ ,  $x$  — текущая координата,  $x = \epsilon t$ .

Учитывая, что  $T_1(\epsilon)$ ,  $K(\epsilon)$  при  $\epsilon = c_a$  конечны и отличны от нуля, получаем для  $u$ ,  $w$

$$u(x, 0, t) \rightarrow C(x_a - x)^{-1/2}, \quad w(x, 0, t) \rightarrow D(x_a - x)^{1/2}, \quad x \rightarrow x_a$$

где  $C$ ,  $D$  не зависят от  $\Delta x$ ,  $\Delta x = x_a - x$ .

Аналогично при приближении к фронту квазипоперечной волны получим, что  $w(x, 0, t)$  растёт как  $(x_b - x)^{-1/2}$ . Величина  $u(x, 0, t)$  в точке  $x = x_b$  конечна и отлична от нуля.

Вблизи фронтов волн на оси  $x$  решение в случае анизотропных сред ведёт себя так же, как и в случае изотропных сред. Можно показать, что аналогично ведёт себя решение при приближении к фронтам волн вдоль любого луча, проходящего через точку  $x = 0$ ,  $z = 0$ . Данный результат распространяется и на среды третьей группы. При этом вблизи границ лакуп решение ведёт себя так же, как вблизи фронтов волн.

Для всех сред первой группы, включая изотропные среды, качественный ход кривых смещений для точек на осях координат одинаковый. Примеры расчетов приведены в [1]. Для сред, у которых  $c_1$  и  $c_4$  близки по значению, получаем, что чем ближе значение коэффициента  $\Delta_A = (c_1 - c_3) / c_2$

к единице, тем меньше решение на осях координат для данной анизотропной среды первой группы отличается от решения для изотропной среды с теми же значениями коэффициентов  $c_1$  и  $c_3$ , т. е. со скоростями распространения продольной и поперечной волн, равными  $c_a$  и  $c_b$ .

В случае сред третьей группы наблюдается большое разнообразие форм кривых смещений для точек на осях координат и на лучах, проходящих через точку приложений силы, в зависимости от принадлежности функций  $\mu_n(\theta)$  и  $\theta_n(\mu)$  ко второму или третьему типу (по классификации [4]) и величин  $\alpha$ ,  $\beta$  по сравнению с единицей.

3. Рассмотрим задачу Лэмба для полуплоскости. Для сред первой группы решение задачи Лэмба (воздействие сосредоточенной импульсной нагрузки на полуплоскость) приведено в [2] и для сред третьей группы — в [4]. Там приводятся кривые смещений в точках границы для некоторых материалов.

Рассмотрим уравнение Рэлея для каждой из трех групп сред, решения вблизи фронтов волн и вблизи рэлеевской фазы смещений.

Уравнение Рэлея для анизотропной среды записывается в виде

$$(3.1) \quad R(\xi) \equiv \{[c_1 c_4 - (c_2 - c_3)^2] \xi^2 - b^2\} \sqrt{1/c_3 - \xi^2} - \sqrt{c_1 c_4} \times \\ \times \sqrt{1/c_1 - \xi^2} = 0, \quad \xi^2 = 1/\rho e^2$$

Стоящая слева функция от  $\xi$  называется функцией Рэлея.

Согласно [5] условие вещественности корней уравнения (3.1) записывается в виде  $c_1 c_4 > (c_2 - c_3)^2$ . В обозначениях  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  данное неравенство имеет вид

$$(3.2) \quad \gamma > 2\alpha\beta - 2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{1 + \alpha\beta - \gamma}$$

Учитывая условия гиперболичности (1.2) и условие  $\gamma^2 \geq 4\alpha\beta$ , для сред первой группы получаем, что неравенство (3.2) следует рассматривать только на интервале  $2\sqrt{\alpha\beta} < \gamma < 1 + \alpha\beta$ .

Выполнение неравенства (3.2) эквивалентно тому, что стоящая слева функция от  $\gamma$  при заданных  $\alpha$ ,  $\beta$  будет больше функции, стоящей справа при каждом значении  $\gamma$  из рассматриваемого интервала.

Рассмотрим плоскость  $f\gamma$ . Функции  $f_1 = \gamma$  соответствует прямая, проходящая через начало координат под углом  $\lambda = \pi/4$  к оси  $\gamma$ . Функция

$$f_2 = 2\alpha\beta - 2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{1 + \alpha\beta - \gamma}$$

принимает на концах интервала значения

$$f_2 = 4\alpha\beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \equiv f_{21} \text{ при } \gamma = 2\sqrt{\alpha\beta} \\ f_2 = 2\alpha\beta \equiv f_{22} \text{ при } \gamma = 1 + \alpha\beta$$

В рассматриваемом случае сред первой группы  $\alpha\beta < 1$ ,  $2\alpha\beta < 2\sqrt{\alpha\beta}$  и, следовательно

$$f_{21} \equiv 2\alpha\beta + 2\alpha\beta - 2\sqrt{\alpha\beta} < 2\alpha\beta \equiv f_{22}$$

Учитывая, что  $f_2' = (\sqrt{\alpha\beta}/\sqrt{1 + \alpha\beta - \gamma}) > 0$ , получаем, что функция  $f_2$  на интервале  $2\sqrt{\alpha\beta} < \gamma < 1 + \alpha\beta$  монотонно возрастающая и лежит ниже прямой  $f_1 = \gamma$ . Следовательно, неравенство (3.2) для сред первой группы всегда выполняется, т. е. корни уравнения Рэлея всегда вещественные.

В случае сред второй группы

$$f_2 = 2\sqrt{\alpha\beta} \text{ при } \gamma = 2\sqrt{\alpha\beta} \\ f_2 = 2\alpha\beta \text{ при } \gamma = 1 + \alpha\beta$$

Функция  $f_2$  на интервале  $2\sqrt{\alpha\beta} < \gamma < 1 + \alpha\beta$  также является монотонно возрастающей функцией, причем значения  $f_1$  и  $f_2$  равны при  $\gamma = 2\sqrt{\alpha\beta}$ .

Поскольку  $\alpha\beta > 1$ , имеем

$$1 + \alpha\beta < \alpha\beta + \alpha\beta \equiv 2\alpha\beta$$

и, следовательно,  $f_2$  в точке  $\gamma = 1 + \alpha\beta$  больше, чем  $f_1$ . Таким образом, или кривая  $f_2$  лежит целиком выше прямой  $f_1 = \gamma$ , или они имеют точку пересечения, т. е. в некоторой точке  $\gamma = \gamma_*$

$$(3.3) \quad f_1(\gamma_*) = f_2(\gamma_*), \quad 2\sqrt{\alpha\beta} < \gamma_* < 1 + \alpha\beta$$

Из уравнения (3.3) получаем  $\gamma_* = 2\sqrt{\alpha\beta}$ , т. е., кроме точки  $\gamma = 2\sqrt{\alpha\beta}$ , лежащей на конце интервала, кривые  $f_1$  и  $f_2$  нигде не пересекаются. Отсюда следует, что неравенство (3.2) для сред второй группы не выполняется ни в одной точке интервала  $2\sqrt{\alpha\beta} < \gamma < 1 + \alpha\beta$ , т. е. уравнение Рэлея в случае сред второй группы не имеет вещественных корней. Полагая  $\xi = iv$ , получаем, что на интервале  $0 < v < \infty$  функция  $R(\xi)$  меняет знак и, следовательно, корни уравнения Рэлея лежат на мнимой оси плоскости  $\xi$ .

Из условий положительной определенности упругой энергии (1.3), (1.4) получаем неравенство

$$c_1c_4 > (c_2 - c_3)^2$$

т. е. для реальных сред условие вещественности корней уравнения Рэлея всегда выполняется и, следовательно, сред второй группы не существует. Решения уравнений (1.4) при условиях (1.6), (1.2) могут представлять интерес только как определенные гиперболические решения. Если построить кривые смещений в точках свободной границы для задачи Лэмба, то получим, что смещения всюду конечны, максимальное значение функции  $w(x, 0, t)$  принимает в точке приложения силы  $x = 0$ . В случае реальных сред смещения в точках поверхности  $z = 0$  максимальны (обращаются в бесконечность) при  $x = c_R t$ , где  $c_R$  — скорость волны Рэлея.

Для сред третьей группы, следуя приведенным рассуждениям, можно показать, что условия вещественности корней уравнения Рэлея всегда выполняются.

Рассмотрим среды первой группы. Вблизи переднего фронта волны возмущений, распространяющейся в полуплоскости  $z \geq 0$ , в точках свободной границы  $z = 0$  решение задачи Лэмба конечно и обращается в нуль на фронте  $x_a = c_a t$ . При подходе к фронту волны возмущений вдоль лучей, проходящих под углом к оси  $x$ , радиальная компонента смещений быстро растет и обращается в бесконечность на фронте. Осуществляется непрерывный переход кривых радиальных смещений для  $\varphi \neq 0$  в кривую  $u(x, 0, t)$  при уменьшении угла  $\varphi$  (угол, который составляет луч, исходящий из точки  $x = 0, z = 0$ , с осью  $x$ ) до нуля.

Структура решения вблизи фронта волны возмущений во внутренних точках полуплоскости (в частности, обращение радиальной компоненты смещений в бесконечность) определяется производной  $\partial\theta_1 / \partial t$ , где  $\theta_1$  — корень уравнения  $t - \theta_1 x - \mu_1(\theta_1) z = 0$ . Данная производная входит в решение как множитель [2, 4].

В случае изотропных сред имеем явное выражение

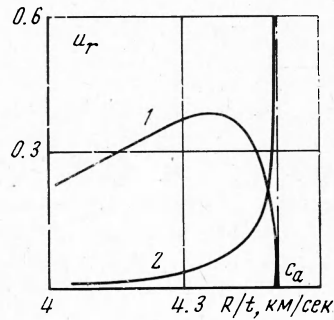
$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \frac{1}{R} \left( \cos \varphi - i \frac{\sin \varphi}{\sqrt{i^2 - a^2 R^2}} \right) \equiv H_1 - iH_2$$

$$R^2 = x^2 + z^2, \quad x = R \cos \varphi, \quad z = R \sin \varphi, \quad a = \sqrt{\rho/c_1}$$

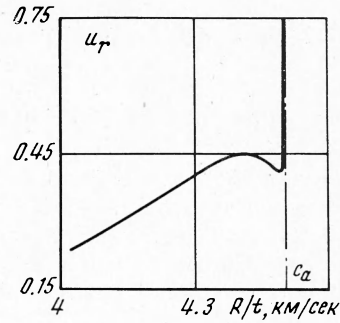


Возрастание радиальной компоненты до бесконечности при приближении к фронту волны ( $t = aR$ ) обусловлено компонентой  $H_2$ . С увеличением  $\varphi$  вклад компоненты  $H_2$  увеличивается, а при стремлении  $\varphi$  к нулю — быстро убывает, обращаясь в нуль при  $\varphi = 0$ .

На фиг. 1 приводится качественный ход составляющих радиальной компоненты смещений вблизи фронта волны для  $\varphi = 2^\circ$ , обусловленных слагаемыми  $H_1$  (кривая 1) и  $H_2$  (кривая 2) (суммарная зависимость для угла  $\varphi = 2^\circ$  приведена на фиг. 2) для изотропной среды со скоростями распространения волн, равными  $c_a = 4500$  м/сек,  $c_b = 2500$  м/сек.

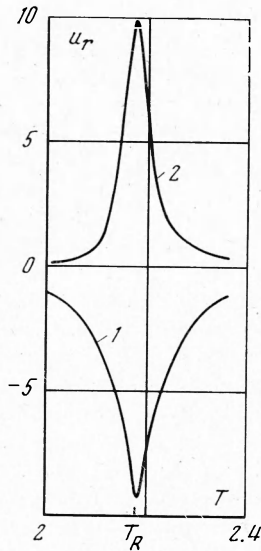


Фиг. 1



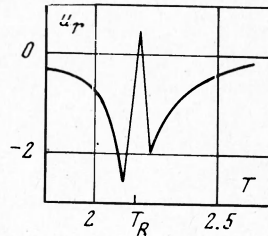
Фиг. 2

Для больших углов  $\varphi$  радиальная компонента смещений вблизи фронта волны ( $t = aR$ ) имеет вид кривой 2 на фиг. 1, поскольку преобладает вклад, вносимый величиной  $H_2$ . При  $\varphi = 0$ , т. е. в точках поверхности  $z = 0$ , радиальная компонента (равная  $u(x, 0, t)$ ) ведет себя вблизи точки  $x_a = c_a t$ , так же, как кривая 1 на фиг. 1, поскольку вклад величины  $H_2$  равен нулю.



Фиг. 3

Изложенные результаты распространяются на поведение решения вблизи переднего фронта волны возмущений на все среды первой группы. Так же как в случае изотропных сред, радиальная и тангенциальная компоненты при подходе к фронту волны возмущений изменяются пропорционально  $(R_a - R)^{-1/2}$  или  $(R_a -$



Фиг. 4

—  $R)^{1/2}$  соответственно, где  $R_a$  — положение фронта волны и  $R$  — текущая координата (при  $\varphi = \text{const}$ ).

В случае сред третьей группы решение на фронте в точках поверхности равняется нулю. Ход кривой смещений в точках поверхности или внутрен-

них точках полуплоскости может сильно отличаться от сред первой группы. Некоторые результаты для точек поверхности приведены в [4].

Рассмотрим особенности вида кривых радиальных смещений для сред первой и третьей групп во внутренних точках среды на примере зависимости  $u_r = u_r(T)$ , где  $u_r$  — радиальная компонента смещений и  $T$  — безразмерное время,  $T = t/aR$ . Зависимость  $u_r(T)$  представляет собой сейсмограммы радиальных смещений для точек, которые лежат на лучах, проходящих под углом  $\varphi$  к оси  $x$ . В окрестности  $T = T_R$ , где  $T_R$  соответствует времени прихода в данную точку рэлеевской фазы смещений, вклад в величину смещений вносят как квазипродольная, так и квазипоперечная волны.

Вклад каждой из волн может существенно изменяться при переходе от одной среды к другой.

На фиг. 3 приводятся кривые смещений для каждой из волн (кривая 1 — квазипродольная волна, кривая 2 — квазипоперечная волна), указывающие вклад каждой из них в суммарное смещение. Кривые построены для изотропной среды ( $c_a = 6260$  м/сек,  $c_b = 3080$  м/сек) в окрестности  $T = T_R$  для точек, которые лежат на луче, проходящем под углом  $\varphi = 2^\circ$ . Форма кривых типична для сред первой группы, причем сохраняется соотношение между ними, так что суммарная картина для сред первой группы в окрестности  $T = T_R$  для  $\varphi = 2^\circ$  имеет вид, представленный на фиг. 4 (количественные данные на фигурах не приводятся, поскольку они не представляют интереса).

На фиг. 5, а приводятся кривые, указывающие вклад каждой из волн в величину радиальных смещений в окрестности  $T = T_R$ , в точках на луче для  $\varphi = 2^\circ$  в случае цинка (третья группа сред,  $\alpha < 1$ ,  $\beta < 1$ ; кривая 1 — квазипродольная волна, кривая 2 — квазипоперечная волна).

На фиг. 5, б приводятся аналогичные кривые для модельной анизотропной среды (третья группа,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0.25$ ,  $\gamma = 1.74$ ).

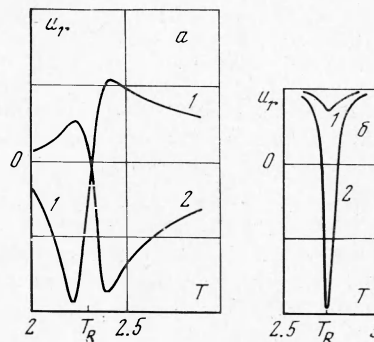
Как видно из приведенных на фиг. 5 кривых, характер смещений во внутренних точках среды в случае сред третьей группы может сильно отличаться от первой группы сред.

Автор благодарит С. А. Христиановича и Е. И. Шемякина за внимание к работе.

Поступила 8 IV 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Будаев В. С. Распространение колебаний от источника типа сосредоточенного импульса в анизотропной среде. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 2.
2. Будаев В. С. Об одной краевой задаче динамики упругих анизотропных сред. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 14. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1973.
3. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
4. Будаев В. С. Об одной краевой задаче динамической теории упругих анизотропных сред. ПМТФ, 1974, № 3.
5. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ, 1949, № 114, вып. 17.



Фиг. 5