

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П., Ершов Л. В. Механика разрушения. — М.: Машиностроение, 1977.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. — М.: Физматгиз, 1963.
3. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д. К представлению решений для цилиндрической оболочки, ослабленной отверстиями // ДАН СССР. — 1974. — Т. 219, № 4.
4. Угодчиков А. Г., Длугач М. И., Степанов А. Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. — М.: Высш. шк., 1970.
5. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. — Киев: Вища шк., 1975.
6. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // ПММ. — 1974. — Т. 38, вып. 6.

Поступила 16/XII 1986 г.

УДК 539.3

УСРЕДНЕННЫЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ СВЯЗУЮЩЕГО ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

А. Г. Колпаков

(Новосибирск)

Рассматривается задача построения критерия прочности связующего композиционных материалов, армированных высокомолекулярными волокнами, в терминах усредненных (макроскопических) напряжений. Решение проводится на основе анализа «ячеечной задачи» [1] с привлечением гипотез, учитывающих существенное различие жесткостей армирующих волокон и связующего.

При деформировании волокнистых композитов главную часть нагрузки принимают на себя высокомолекулярные волокна [1]. Напряженно-деформированное состояние связующего в этом случае может быть определено на основании использования приближенной модели, в которой мягкое связующее «следует» за армирующими волокнами как за жестким каркасом, деформирующимся независимо от связующего. Близкий к указанному подход широко применяется при изучении однонаправленных композитов [2—4], где он приводит к моделям, показывающим удовлетворительное совпадение с экспериментом [5, 6].

Рассмотрим композит, образованный периодически чередующимися слоями волокон, уложенных параллельно плоскости Ox_1x_2 . В каждом слое волокна уложены параллельно друг другу. Угол, образованный волокнами α -го слоя с осью Ox_1 , обозначим через φ_α , $\alpha = 1, \dots, M$ (M — число армирующих слоев, образующих период структуры композита). Описанная схема армирования типовой для композитов, изготовленных намоткой или по препреговой технологии [7]. Рассмотрим усредненные деформации вида e_{ij} , $e_{i3} = 0$ ($i = 1, 2$), т. е. деформации в плоскости армирующих слоев, что является практически наиболее распространенным видом деформаций материалов описанного типа.

Рассмотрение задачи о деформировании композита при условии, что диаметр ϵ армирующих волокон мал ($\epsilon \ll 1$), может быть сведено к решению задачи теории упругости на ячейке периодичности Π структуры композита [1, 8, 9]. Именно, если $\{e_{ij}\}$ — усредненный тензор деформации композита, следует решить задачу теории упругости с нулевыми массовыми силами и краевым условием

$$(1) \quad \mathbf{w} - e_{ij}x_j\mathbf{e}_i, \quad \sigma_n(\mathbf{w} - e_{ij}x_j\mathbf{e}_i) \text{ периодичны на } \Pi,$$

где \mathbf{w} — перемещения; $\sigma_n(\mathbf{u})$ — нормальные напряжения, отвечающие \mathbf{u} .

Склейка решений задачи теории упругости с краевым условием (1) дает в конечной области Q решение задачи теории упругости для композита в целом с погрешностью, стремящейся к нулю в $W_2^1(Q)$ при $\epsilon \rightarrow 0$ [1]. В случае бесконечной области Q указанная склейка дает точное решение периодической задачи теории упругости, соответствующей средней деформации $\{e_{ij}\}$ [9]. Наше рассмотрение основано на гипотезе, что локальные (микроскопические) напряжения $\{\sigma_{ij}^\epsilon\}$ в композите, по крайней мере вне зон краевого эффекта, совпадают с напряжениями, определяемыми из решения задачи теории упругости с краевым условием (1).

З а м е ч а н и е 1. Сказанное выше относилось к телам, размеры которых по всем трем осям координат не малы. В случае пластинок, когда размер тела в направлении оси Ox_3 также имеет порядок ε , формальное асимптотическое разложение приводит к дополнительному условию (2)

$$\sigma_n(\mathbf{w} - e_{ij}x_j\mathbf{e}_i) = 0$$

на гранях ячейки Π , перпендикулярных оси Ox_3 (условие периодичности $\mathbf{w} - e_{ij}x_j\mathbf{e}_i$ по переменной x_3 при этом снимается).

Изучим задачу теории упругости с краевым условием (1), воспользовавшись упоминавшейся выше моделью жестких волокон в мягком связующем. Рассматриваемые композиты характеризуются соотношением жесткостей компонентов $E_B/E \gg 1$ (E_B, E — модули Юнга волокон и связующего), при выполнении которого имеем $\sigma_B/\sigma \sim E_B/E \gg 1$, где σ_B, σ — характерные напряжения в волокнах и связующем соответственно (при условии отсутствия концентраторов напряжений). В силу чего напряжения в связующем не оказывают влияния на деформирование волокон (точнее, это влияние имеет порядок $\sigma/\sigma_B \ll 1$, и мы пренебрегаем им, допуская погрешность порядка $E/E_B \ll 1$). Отсюда следует гипотеза для волокон.

1. Деформирование армирующих волокон (образующих несвязный каркас) определяется независимо от связующего. Что касается связующего, то в силу сказанного для него волокна являются абсолютно жесткими (точнее, «очень» жесткими, с относительной жесткостью $E_B/E \gg 1$). Между волокнами и связующим существует идеальный контакт по перемещениям. Отсюда вытекает гипотеза для связующего.

2. Деформации связующего определяются из решения задачи о деформировании упругого материала, «следующего» за жестким каркасом при заданных перемещениях \mathbf{w} последнего.

Изложенный подход к построению модели жестких волокон в мягком связующем носит механический характер. Разумеется, этот подход может быть формализован. Введя параметр $E_B/E \gg 1$, приходим к задачам типа «жесткого разложения» [10] или изучавшимся в [1]. Уравнения, получаемые на основании гипотез 1,2 и методами [1, 10], совпадают.

При задании краевого условия (1) перемещения армирующих волокон лежат в плоскостях, параллельных Ox_1x_2 . В соответствии со структурой композита (чередующиеся слои параллельно уложенных волокон) их удобно представить в виде суммы взаимных перемещений волокон в пределах армирующего слоя и смещений армирующих слоев.

Межволоконные деформации связующего. Рассмотрим деформирование компонентов композита в пределах одного армирующего слоя волокон. Начнем с частного случая $e_{ij} = e_{11}\delta_{i1}\delta_{j1}$ ($i, j = 1, 2$), что соответствует усредненной деформации растяжения—сжатия вдоль оси Ox_1 . Найдем, используя гипотезу 1, деформации каркаса, образованного армирующими волокнами. Перемещения волокон показаны на рис. 1, где тонкие и жирные линии — оси волокон до и после деформации. Перемещения AA' и BB' равны $e_{11}|OB|$, где $2|OB|$ — размер ячейки периодичности Π по оси Ox_1 . Из рис. 1 следует, что при указанной деформации волокна сохраняют параллельность. Теперь, используя гипотезу 2, рассмотрим деформацию связующего. Выделим на рис. 1 элемент связующего $OKLM$. В силу гипотезы 2 деформирование связующего, в том числе и элемента $OKLM$, состоит в том, что оно «следует» за жесткими волокнами. Для элемента $OKLM$ это означает, что он переходит в некоторый элемент $Oklm$, претерпев при этом деформацию, которая может быть представлена в

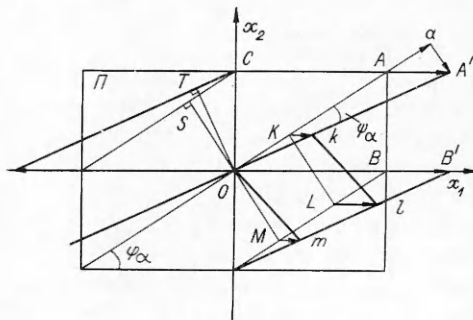


Рис. 1

виде суммы деформации растяжения—сжатия e_{il}^e в направлении оси укладки волокон, деформации сдвига e_{ln}^e, e_{nl}^e и деформации растяжения—сжатия e_{nn}^e в направлении, перпендикулярном оси укладки волокон. Здесь и далее будет использоваться местная система прямоугольных координат, ось l которой совпадает с направлением оси укладки волокон в армирующем слое, а ось n направлена перпендикулярно l . Преобразование тензора e_{ij} ($i, j = l, n$) при переходе к системе координат Ox_1x_2 производится стандартным образом.

Проведем вычисление указанных деформаций элемента связующего.

1. Деформация армирующих волокон в направлении оси их укладки (см. рис. 1)

$$e_{il}^e = \frac{|Aa|}{|OA|} = e_{11} \cos^2 \varphi_\alpha.$$

«Следуя» за жестким каркасом, элемент связующего $OKLM$ претерпевает в направлении оси укладки волокон ту же деформацию.

2. Поскольку при деформировании каркаса волокна остаются параллельными друг другу, что отмечалось выше, то $e_{ln}^e = e_{nl}^e = \psi_\alpha$ (угол ψ_α указан на рис. 1). Имеем $\operatorname{tg} \psi_\alpha = \frac{|A'a|}{|OA| + |Aa|}$. Так как нас интересует линейная (по e_{11}) часть деформации и соответствующий ей малый угол ψ_α , то из последнего равенства стандартным образом получаем $\psi_\alpha \approx \operatorname{tg} \psi_\alpha = \frac{|A'a|}{|OA| + |Aa|} \approx \frac{|A'a|}{|OA|} = e_{11} \sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha$ (использовано то, что $|A'a|$ и $|Aa|$ имеют порядок e_{11}).

3. Наличие ненулевой деформации связующего e_{nn}^e обусловлено тем, что при деформации ячейки периодичности Π соседние армирующие волокна сближаются между собой (см. рис. 1). Вычислим расстояния $|OS|$ и $|OT|$ между соседними волокнами до и после деформации. Рассмотрим $\triangle OSC$ и $\triangle OTC$, имеющие общую гипотенузу OC . Из рис. 1 видно, что $|OS| = |OC| \cos \varphi_\alpha$, а $|OT| = |OC| \cos (\varphi_\alpha - \psi_\alpha)$. Тогда $|OT| - |OS| \approx \psi_\alpha |OC| \sin \varphi_\alpha$. Здесь в разложении $\cos (\varphi_\alpha - \psi_\alpha)$ сохранен член, линейный по ψ_α , а следовательно, и по e_{11} . Тогда $e_{nn}^e = \frac{\psi_\alpha |OC| \sin \varphi_\alpha}{|OS|} = e_{11} \sin^2 \varphi_\alpha$.

В итоге находим, что для усредненной деформации $e_{ij} = e_{11} \delta_{i1} \delta_{j1}$ ($i, j = 1, 2$) линейная по e_{11} деформация элемента связующего, находящегося между соседними армирующими волокнами одного армирующего слоя, есть

$$(3) \quad e_{il}^e = e_{11} \cos^2 \varphi_\alpha, \quad e_{ln}^e = e_{nl}^e = e_{11} \sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha, \quad e_{nn}^e = e_{11} \sin^2 \varphi_\alpha$$

(отметим совпадение формул (3) с формулами преобразования тензоров при повороте осей координат. Это существенно облегчает дальнейшие выкладки).

Пользуясь решением (3) для случая $e_{ij} = e_{11} \delta_{i1} \delta_{j1}$ ($i, j = 1, 2$), легко найти локальные деформации связующего при задании произвольной усредненной деформации e_{ij} , $e_{i3} = 0$ ($i = 1, 2$). Действительно, случай усредненного растяжения—сжатия в направлении оси Ox_2 сводится к рассмотренному выше поворотом координатных осей на 90° , а случай усредненного сдвига в плоскости Ox_1x_2 — к сумме двух осевых растяжений—сжатий e_{12} в системе координат, повернутой на 45° . Приведем окончательное выражение локальных деформаций связующего, лежащего между соседними волокнами армирующего слоя (для его получения удобно воспользоваться замечанием к формуле (3)):

$$(4) \quad \begin{aligned} e_{il}^e &= e_{11} \cos^2 \varphi_\alpha + 2e_{12} \sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha + e_{22} \sin^2 \varphi_\alpha, \\ e_{ln}^e &= e_{nl}^e = (e_{22} - e_{11}) \sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha + e_{12} (\cos^2 \varphi_\alpha - \sin^2 \varphi_\alpha), \\ e_{nn}^e &= e_{11} \sin^2 \varphi_\alpha - 2e_{12} \sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha + e_{22} \cos^2 \varphi_\alpha. \end{aligned}$$

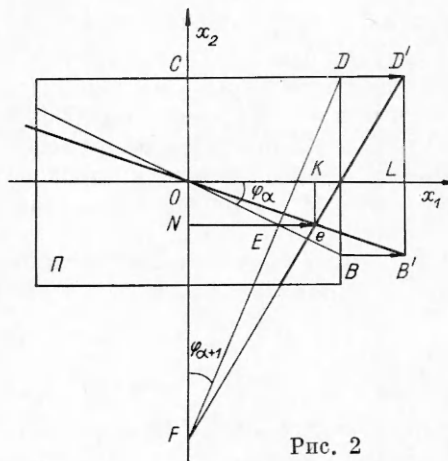


Рис. 2

Проведем вычисление последней деформации. С этой целью рассмотрим деформирование элемента связующего, соединяющего волокна соседних армирующих слоев (рис. 2, 3). Начнем с частного случая $e_{ij} = e_{i1}\delta_{i1}\delta_{j1}$ ($i, j = 1, 2$). На рис. 2 изображены оси волокон α -го и $(\alpha + 1)$ -го слоев до и после деформирования. Выделенный элемент связующего соединяет волокна OB и FD в точке E (в недеформированном состоянии). Точка E общая для волокон OB и FD . Посмотрим, куда переходит точка E на волокнах OB и FD в процессе деформирования ячейки периодичности Π . Очевидно, что в данном случае вектор перемещений точек волокон OB и FD параллелен оси Ox_1 . Найдем его величину в точке E для волокон OB и FD . Для волокна FD из подобия $\triangle FEE$ и $\triangle FDD'$ получаем, что перемещение точки E есть $|Ee_{FD}| = |DD'| \frac{|Fe|}{|FD'|}$. Аналогично из подобия $\triangle OEE$ и $\triangle OBB'$ находим, что перемещение точки E есть $|Ee_{OB}| = |BB'| \frac{|Oe|}{|OB'|}$.

Рассмотрим $\triangle OKe$, $\triangle OLB'$ и $\triangle FNe$, $\triangle FCD'$. Нетрудно заметить, что $|Fe|/|FD'| = |OK|/|OL| = |Oe|/|OB'|$, откуда (так как $|DD'| = |BB'|$) имеем $|Ee_{FD}| = |Ee_{OB}|$, т. е. общая точка E на волокнах OB и FD в процессе деформации ячейки Π остается таковой и переходит в некоторую точку e . Следовательно, взаимное смещение волокон в точке их соединения элементом связующего отсутствует. В силу этого элемент связующего, лежащий между волокнами OB и FD , подвергнется только скручиванию, обусловленному поворотами волокон в процессе деформации. Угол скручивания τ_α равен изменению угла между волокнами OB и FD :

$$(5) \quad \tau_\alpha = \psi_{\alpha+1} - \psi_\alpha = \delta\psi_\alpha = e_{11}\delta(\sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha)$$

(δ — оператор взятия первой разности: $\delta f_\alpha = f_{\alpha+1} - f_\alpha$). При получении

Индексом ϵ здесь и далее помечаются локальные напряжения и деформации.

Межслойная деформация связующего. Рассмотрим теперь элемент связующего, находящегося между соседними слоями армирующих волокон с индексами α и $\alpha + 1$. Деформируясь в составе ячейки периодичности Π , элемент связующего претерпит деформацию, равную сумме деформации ячейки периодичности Π в среднем e_{ij} , $e_{i3} = 0$ ($i = 1, 2$) и деформации, обусловленной относительным смещением волокон соседних армирующих α -го и $(\alpha + 1)$ -го слоев.

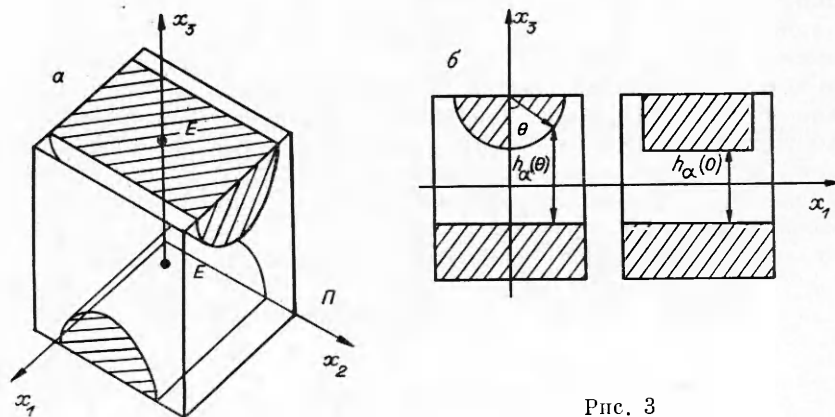


Рис. 3

нии (5) использовано выражение для угла поворота волокон φ_α , полученное выше.

Пользуясь решением (5) для случая $e_{ij} = e_{11}\delta_{i1}\delta_{j1}$ (растяжение — сжатие вдоль оси Ox_1), легко найти выражение для угла скручивания элемента связующего, лежащего между волокнами соседних армирующих слоев, для произвольной деформации e_{ij} , $e_{i3} = 0$ ($i = 1, 2$). Для этого достаточно осуществить

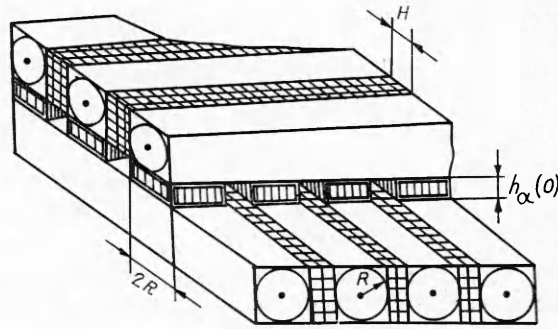


Рис. 4

упоминавшиеся выше повороты осей координат на 90 и 45°. Окончательно имеем

$$(6) \quad \tau_\alpha = (e_{11} - e_{22})\delta(\sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha) + e_{12}\delta(\cos^2 \varphi_\alpha - \sin^2 \varphi_\alpha).$$

З а м е ч а н и е 2. Решение задачи о кручении элемента связующего, изображенного на рис. 3, а, осуществляется только численно. Вместе с тем можно предложить простую расчетную схему композита, позволяющую провести вычисление максимальных межслойных напряжений в связующем. Угол закрутки элемента связующего в расчете на единицу длины не превосходит $\tau_\alpha/h_\alpha(0)$, где $h_\alpha(0)$ — минимальное расстояние между точками волокон α -го и $(\alpha + 1)$ -го армирующих слоев (рис. 3, б). Максимальному углу скручивания на единицу длины соответствуют максимальные напряжения в скручиваемом элементе.

Рассмотрим расчетную схему композита, в которой угол закрутки элемента связующего в расчете на единицу длины равен максимальному. Для этого должно быть выполнено условие: кинематика каркаса из армирующих волокон сохраняется, а расстояния между точками соседних волокон равны $h_\alpha(0)$. Этому условию удовлетворяет расчетная схема композита (рис. 4), где волокна имеют прямоугольное сечение и описаны около соответствующих исходных волокон. Последнее определяет все геометрические размеры на рис. 4. В частности, расстояния между волокнами α -го и $(\alpha + 1)$ -го слоев в расчетной схеме равны $h_\alpha(0)$.

Пользуясь введенной расчетной схемой, можно получить критерий прочности связующего в терминах усредненных напряжений или деформаций композита (для волокон такой критерий может быть получен на основании результатов [1]). Пусть материал связующего описывается условием прочности

$$(7) \quad f(\sigma_{ij}^e) \leq \sigma^*$$

(f — непрерывная функция $\{\sigma_{ij}^e\}$). В качестве примера укажем широко применяемое квадратичное условие прочности

$$(8) \quad \sigma_{ij}^e \sigma_{ij}^e - \frac{1}{3} (\sigma_{ii}^e)^2 \leq \sigma^{*2}.$$

Пользуясь законом Гука для материала связующего и формулами (4), (6), получаем, что при приложении к композиту усредненной деформации e_{ij} , $e_{i3} = 0$ ($i = 1, 2$) в связующем возникают следующие локальные напряжения:

межволоконные напряжения в пределах α -го слоя армирующих волокон

$$(9) \quad \sigma_{il}^e = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{il}^e + \nu e_{nn}^e), \quad \sigma_{nn}^e = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{nn}^e + \nu e_{il}^e),$$

$$\sigma_{in}^e = \sigma_{nl}^e = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{in}^e, \quad \sigma_{i3} = 0 \text{ при } i = l, n, 3$$

($\{e_{ij}^e\}$ даются в (3));

межслойные напряжения

$$(10) \quad \sigma_{ij}^E = \frac{E\nu}{1+\nu}(e_{11} + e_{22} + e_{33})\delta_{ij} + \frac{E}{2(1+\nu)}e_{ij},$$

$$(i, j) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3),$$

$$\sigma_{13}^E = \sigma_{31}^E = -\left(x_2^E - x_2^E\right) \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\tau_\alpha}{h_\alpha(0)}, \quad \sigma_{23}^E = \sigma_{32}^E = \left(x_1^E - x_1^E\right) \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\tau_\alpha}{h_\alpha(0)},$$

где (x_1^E, x_2^E) — координаты точки E — оси кручения элемента связующего, показанного на рис. 2—4. Формулы (10) получены на основании использования расчетной схемы рис. 4 и дают максимальные значения межслойных напряжений.

Подставив выражения (9), (10) в условие прочности материала связующего, приходим к искомому критерию прочности связующего в терминах усредненных деформаций. При этом подстановка выражений (9), (10) приводит к возникновению фактически двух критериев прочности в α -м слое связующего:

критерий прочности связующего по межволоконным напряжениям

$$(11) \quad f_1(\varphi_\alpha, \{e_{ij}\}) \leq \sigma^*$$

(функция f_1 получается путем подстановки в условие прочности материала связующего (7) выражений (9));

критерий прочности связующего по межслойным напряжениям

$$(12) \quad f_2(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}, x_1, x_2, \{e_{ij}\}) \leq \sigma^*$$

(функция f_2 получается путем подстановки в (7) выражений (10)). В формулах (11), (12) явно выделена зависимость условий прочности как от усредненных деформаций, так и от схемы армирования (т. е. от микроструктуры композита).

З а м е ч а н и е 3. Пользуясь усредненным законом Гука $\{\sigma_{ij}\} = \{\widehat{a}_{ijkl}\}\{e_{kl}\}$ ($\{\widehat{a}_{ijkl}\}$ указаны в [1]), можно выразить усредненные деформации $\{e_{ij}\}$ через усредненные напряжения: $\{e_{ij}\} = \{H_{ijkl}\}\{\sigma_{kl}\}$ ($\{H_{ijkl}\} = \{\widehat{a}_{ijkl}\}^{-1}$). Подстановка последнего выражения в (11), (12) доставляет критерий прочности связующего в терминах усредненных напряжений. С учетом того, что $\{\widehat{a}_{ijkl}\}$ зависят от $\varphi_1, \dots, \varphi_M$ [1], получаем соответствующие (11), (12) усредненные критерии прочности в α -м слое связующего в терминах усредненных напряжений:

$$(13) \quad F_{1\alpha}(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) \leq \sigma^*,$$

$$F_{2\alpha}(\varphi_1, \dots, \varphi_M, x_1, x_2, \{\sigma_{ij}\}) \leq \sigma^*.$$

Выше были получены усредненные критерии прочности произвольного слоя связующего. Естественно, удобно иметь аналогичный критерий прочности для композита в целом. С целью получения такого критерия введем функционалы

$$(14) \quad M(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) = \max_{\alpha=1, \dots, M} F_{1\alpha}(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}),$$

$$N(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) = \max_{\substack{\alpha=1, \dots, M \\ (x_1, x_2)}} F_{2\alpha}(\varphi_1, \dots, \varphi_M, x_1, x_2, \{\sigma_{ij}\}).$$

Если $M(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) \leq \sigma^*$, то во всех слоях связующего выполнено первое условие в (13) (прочности связующего по межволоконным напряжениям). Если же $M(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) > \sigma^*$, то для некоторого индекса α^* выполнено неравенство $F_{1\alpha^*}(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) > \sigma^*$, т. е. нарушено условие прочности α^* -го слоя связующего (в слое с номером α^* происходит разрушение). Совершенно аналогичные рассуждения могут быть проведены в отношении функционала $N(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\})$. Отметим, что в случае выполнения неравенства $N(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) > \sigma^*$ вывод о разрушении некоторого слоя связующего относится к расчетной схеме рис. 4.

Для композитов общего вида с учетом замечания 2 условие $N(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) \leq \sigma^*$ будет достаточным для сохранения целостности связующего по межслойным напряжениям. Таким образом, получаем усредненный критерий прочности связующего для композита в целом:

$$\begin{aligned} & \text{по межволоконным напряжениям } M(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) \leq \sigma^*, \\ & \text{по межслойным напряжениям } \bar{N}(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\}) \leq \sigma^*. \end{aligned}$$

Аналогичные (14) функционалы $m(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{e_{ij}\})$, $n(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{e_{ij}\})$ могут быть получены заменой в (14) функций $F_{1\alpha}(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{\sigma_{ij}\})$, $F_{2\alpha}(\varphi_1, \dots, \varphi_M, x_1, x_2, \{\sigma_{ij}\})$ на функции $f_1(\varphi_\alpha, \{e_{ij}\})$, $f_2(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}, x_1, x_2, \{e_{ij}\})$ (11), (12). В результате имеем усредненный критерий прочности связующего для композита в целом в терминах усредненных деформаций:

$$\begin{aligned} & \text{по межволоконным напряжениям } m(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{e_{ij}\}) \leq \sigma^*, \\ & \text{по межслойным напряжениям } n(\varphi_1, \dots, \varphi_M, \{e_{ij}\}) \leq \sigma^*. \end{aligned}$$

В качестве примера получим усредненный критерий прочности связующего при задании условия прочности материала связующего в виде (8). Подставим (9) в (8). После группировки членов найдем критерий прочности связующего по межволоконным напряжениям в виде

$$\frac{2}{3} \frac{E^2(1-\nu+\nu^2)}{(1-\nu^2)^2} (e_{il}^e + e_{nm}^e)^2 - 2 \frac{E^2}{(1+\nu)^2} e_{il}^e e_{nn}^e + \frac{E^2}{2(1+\nu)^2} e_{in}^e \leq \sigma^*$$

($\{e_{ij}^e\}$ ($i, j = l, n$) даны в (4)). Проведя подстановку (4), имеем критерий прочности в α -м слое связующего по межволоконным напряжениям

$$\begin{aligned} (15) \quad & \frac{2}{3} \frac{E^2(1-\nu+\nu^2)}{(1-\nu^2)^2} (e_{11} + e_{22})^2 - 2 \frac{E^2}{(1+\nu)^2} [(e_{11}^2 + e_{22}^2) \sin^2 \varphi_\alpha \cos^2 \varphi_\alpha + \\ & + e_{11} e_{22} (\sin^4 \varphi_\alpha + \cos^4 \varphi_\alpha) + 2e_{11} e_{12} \sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha (\sin^2 \varphi_\alpha - \cos^2 \varphi_\alpha) + \\ & + 2e_{22} e_{12} \sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha (\cos^2 \varphi_\alpha - \sin^2 \varphi_\alpha) - 4e_{12}^2 \sin^2 \varphi_\alpha \cos^2 \varphi_\alpha] + \\ & + \frac{E^2}{2(1+\nu)^2} ((e_{22} - e_{11}) \sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha + e_{12} (\cos^2 \varphi_\alpha - \sin^2 \varphi_\alpha))^2 \leq \sigma^*. \end{aligned}$$

Взяв при фиксированном $\{e_{ij}\}$ максимум левой части (15) по $\alpha = 1, \dots, M$, получим усредненный критерий прочности связующего по межволоконным напряжениям для композита в целом.

Аналогичным образом находится усредненный критерий прочности по межслойным напряжениям для композита в целом. Подстановка (10) в (8) приводит к критерию прочности в α -м слое связующего по межслойным напряжениям

$$\begin{aligned} (16) \quad & \frac{E^2}{3(1+\nu)(1-2\nu)} (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + \frac{E^2}{4(1+\nu)^2} (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + \\ & + \frac{E^2}{2(1+\nu)^2} [(e_{22} - e_{11}) \delta (\sin \varphi_\alpha \cos \varphi_\alpha) + \\ & + e_{12} \delta (\cos^2 \varphi_\alpha - \sin^2 \varphi_\alpha)]^2 \frac{(x_1 - x_1^E)^2 + (x_2 - x_2^E)^2}{h_\alpha^2(0)} \leq \sigma^*. \end{aligned}$$

Взяв при фиксированном $\{e_{ij}\}$ максимум по $\alpha = 1, \dots, M$ и (x_1, x_2) левой части (16), получим требуемое. Воспользовавшись усредненным законом Гука [1], можно записать усредненные критерии в терминах усредненных напряжений.

Рассмотрим подробнее критерий прочности связующего по межслойным напряжениям (16). Последнее слагаемое в левой части (16) содержит множитель $(x_1 - x_1^E)^2 + (x_2 - x_2^E)^2$. В рамках расчетной схемы рис. 4 наибольшее значение этой величины есть $2R^2$ (R — радиус армирующих волокон). Расчетная схема рис. 4 дает максимальные значения напряжений, возникающих в реальном композите. В этой связи выполнение (16) при замене $(x_1 - x_1^E)^2 + (x_2 - x_2^E)^2$ на $2R^2$ гарантирует неразрушение связующего.

Далее, обратим внимание на то, что в левой части (16) присутствует комбинация $[(x_1 - x_1^B)^2 + (x_2 - x_2^B)^2]/h_\alpha^2(0)$, имеющая порядок $R^2/h_\alpha^2(0)$ (R — радиус армирующих волокон, $h_\alpha(0)$ — расстояние между волокнами в расчетной схеме рис. 4). В силу чего для схем армирования, характеризующихся соотношением

$$(17) \quad h_\alpha(0)/R \leq 1$$

(тем более для $h_\alpha(0)/R \ll 1$), нарушение критерия прочности по межслойным напряжениям может происходить при низких уровнях внешних нагрузок. Для композитов, работающих при заданном усредненном напряженно-деформированном состоянии, обнаруженный эффект может быть нейтрализован путем выбора подходящих схем армирования — следует выбирать схему армирования, минимизирующую модуль выражения в квадратных скобках в (16). Обнаруженный эффект имеет связь с наполненностью композита. При возрастании объемного содержания армирующих волокон условие (17) необходимо выполняется и связующее теряет прочность.

З а м е ч а н и е 4. Предыдущие оценки проведены на основе использования расчетной схемы рис. 4. Рассмотрим композит, армированный волокнами кругового сечения (рис. 3, б). В этом случае расстояние между волокнами $h_\alpha = h_\alpha(\theta)$ (h_α, θ показаны на рис. 3, б). Угол закрутки элемента связующего в расчете на единицу длины $\tau_\alpha/h_\alpha(\theta) = \tau_\alpha/(h_\alpha(0) + R(1 - \cos \theta))$ (см. рис. 3, а). Его максимальное значение, как легко проверить, равно $\tau_\alpha \sqrt{2h_\alpha(0)/R + h_\alpha^2(0)/R^2}$. Откуда следует, что и в этом случае имеет место обнаруженный выше эффект. Объемное содержание волокон, при котором эффект начинает сказываться, определяется из условия $h_\alpha(0)/R \sim 1$. Это соответствует объемному содержанию волокон около 60%. Максимально возможное содержание волокон кругового сечения в композитах описанного вида равно $\sim 78\%$.

З а м е ч а н и е 5. Рассматривавшаяся задача характеризуется наличием двух параметров: $\varepsilon \ll 1$ и $E_B/E \gg 1$. Вопрос об области применимости двухмасштабной модели изучался в [1]. Из [1] следует, что параметры ε, E_B, E должны быть связаны соотношением $\varepsilon^2 E_B/E \ll 1$ [1, с. 258] или $\varepsilon \ll \sqrt{E/E_B}$. Для композитов с мягкими матрицами $E_B/E \sim 10^2 - 10^4$ [2]. Тогда $\varepsilon \ll 10^{-1} - 10^{-2}$. Выполнение указанных соотношений типично для используемых в практике композиционных материалов [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. Чамис К. Микромеханические теории прочности // Композиционные материалы. Т. 5: Разрушение и усталость. — М.: Мир, 1978.
3. Outwater J. O. The fundamental mechanics of reinforced plastics. — Washington, 1956. — (Paper/ASME; N 56-A-201).
4. Hedgepeth J. M., Van Dyke P. Local stress concentrations in imperfect filamentary composite materials // J. Composite Materials. — 1967. — V. 1, N 3.
5. Zweben C. On the strength of notched composites // J. Mech. Phys. of Solids. — 1971. — V. 19, N 3.
6. Демешкин А. Г., Колпаков А. Г. Экспериментальная проверка применимости сдвиговой модели для расчета конструкций из однонаправленного композита // Динамика сплошной среды. — Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1982. — Вып. 55.
7. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1979.
8. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
9. Григолюк Э. И., Филыгинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. — М.: Наука, 1970.
10. Лионе Ж.-Л. Замечания по некоторым вычислительным аспектам метода гомогенизации в композиционных материалах // Вычислительные методы в математике, геофизике и оптимальном управлении. — Новосибирск: Наука, 1978.

Поступила 1/XII 1986 г.