УДК 531.391.1:532.5.011+66.063.8

ДВИЖЕНИЕ НЕПРЯМОЛИНЕЙНОЙ НИТИ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. Шаповалов, С. В. Лапшина

Волжский политехнический институт Волгоградского государственного технического университета, 404121 Волжский

Методом малого параметра решена плоская задача динамического взаимодействия ламинарного потока вязкой жидкости и гибкой нерастяжимой нити конечной длины. Рассмотрены два типа реологических двумерных течений: чистый сдвиг и простой сдвиг. Получены выражения для эволюции растягивающего усилия и формы нити. Сопоставлены результаты асимптотического и численного расчетов.

В перерабатывающем оборудовании (валки, резиносмесители) величина деформации наполненной системы конечна, поскольку время перемешивания ограничено [1–4]. Поэтому исходная конфигурация нити оказывает существенное влияние на ее ориентацию в конце технологической операции.

Волокнистый наполнитель существенно изменяет реологические свойства жидкости. Например, вязкая жидкость, наполненная волокнами, проявляет аномальные свойства: резко возрастает вязкость в области низких скоростей и напряжений сдвига. Этот эффект усиливается по мере увеличения длины, концентрации и гибкости волокна [5].

В работе [6] поставлена задача о движении гибкой нити конечной длины в потоке вязкой жидкости. Для нити прямолинейной формы получено аналитическое решение задачи.

Целью настоящей работы является изучение влияния начальной изогнутости нити на скорость эволюции формы и натяжения.

1. Исходные уравнения. Приняты следующие допущения. Силы тяжести и инерции малы. Нить изолирована, т. е. отсутствует ее механический контакт с другими нитями. Нить не вносит изменений в поле скоростей жидкости. Течение ламинарное, изотермическое. Ось нити остается плоской кривой, и выполняется условие $\max(d/l, kd) \ll 1$ (d — диаметр нити, $2l$ — ее длина, k — кривизна). Со стороны жидкости на нить действует сила трения, пропорциональная относительной скорости обтекания.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = t|\dot\gamma g_1 + (1-g_1)\dot\gamma_-|, \qquad \{X, X_0, Y, Y_0, S\} = \{x, x_0, y, y_0, s\}l^{-1},$$
$$N = N_+/(A_\tau l^2|\dot\gamma g_1 + (1-g_1)\dot\gamma_-|), \qquad E = A_\tau/A_n. \tag{1.1}$$

Здесь t — время; $\dot\gamma$ — скорость деформации чистого сдвига; $\dot\gamma_-$ — скорость сдвига; g_1 — параметр, характеризующий тип течения ($g_1 = 1$ соответствует чистому сдвигу, $g_1 = 0$ — простому сдвигу); $x(s)$, $y(s)$ — уравнение оси нити в параметрической форме; s — координата, отсчитываемая вдоль оси нити; $x_0(s)$, $y_0(s)$ — функции, описывающие исходную конфигурацию оси нити; $A_n = 4\pi\mu/\ln(7{,}4/\mathrm{Re})$; $\mathrm{Re} = \langle v\rangle\rho d/\mu$ — число Рейнольдса; μ, ρ — вязкость и плотность жидкости; $\langle v\rangle \approx |\dot\gamma g_1 + (1-g_1)\dot\gamma_-|l$ — характерная скорость; $A_\tau = 2{,}1\pi\mu\sqrt{\langle c\rangle}/\ln(0{,}952/\sqrt{\langle c\rangle})$; $\langle c\rangle$ — объемная доля нитей в жидкости; N_+ — натяжение нити.

Условие равновесия гибкой нити записывается в векторной форме

$$(N\boldsymbol{l})_s = -\boldsymbol{l}((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{r}_\tau)\boldsymbol{l}) - \boldsymbol{n}((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{r}_\tau)\boldsymbol{n})/E,$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор; $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_s$; $|\boldsymbol{l}| = 1$ — единичный вектор, направленный по касательной к "упругой линии" нити; $\boldsymbol{r}_{ss} = -\varphi_s \boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{lk}]$ — единичный вектор главной нормали; $\boldsymbol{k}$ — единичный вектор, параллельный оси z; $\boldsymbol{v}$ — скорость жидкости; $\boldsymbol{r}_\tau = d\boldsymbol{r}/d\tau$ — скорость нити. Разрешая это уравнение относительно $\boldsymbol{r}_\tau$, находим

$$\boldsymbol{r}_\tau = \boldsymbol{v} + N_s\boldsymbol{l} - EN\varphi_s\boldsymbol{n}.$$

Дифференцируя это уравнение по s, с учетом $\boldsymbol{n}_s = \varphi_s\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}_\tau = \varphi_\tau\boldsymbol{n}$ получаем

$$-\varphi_\tau\boldsymbol{n} = -(N_{ss} - EN\varphi_s^2)\boldsymbol{l} - (EN\varphi_{ss} + (1+E)N_s\varphi_s)\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{l}\nabla)\boldsymbol{v}.$$

Запишем уравнения рассматриваемой задачи в скалярной форме

$$EN\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2} + (1+E)\,\frac{\partial N}{\partial S}\,\frac{\partial\varphi}{\partial S} - \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = g[g_1\sin 2\varphi + (1-g_1)\sin^2\varphi],$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial S^2} - E\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial S}\Big)^2 N = -g[g_1\cos 2\varphi + 0{,}5(1-g_1)\sin 2\varphi], \qquad (1.2)$$

$$\tau = 0\colon \quad \varphi = \varphi^*(S), \quad N = 0,$$

$$\tau > 0\colon \quad S = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial S} = \frac{\partial N}{\partial S} = 0, \quad S = 1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial S} = N = 0.$$

Здесь φ — угол между касательной к оси нити и осью X; $\varphi^*(S)$ — угол наклона оси нити в начальный момент; g — параметр, характеризующий направление течения ($g = \operatorname{sign}\dot\gamma$ для чистого сдвига, $g = \operatorname{sign}\dot\gamma_-$ для простого сдвига). Следует отметить, что при простом сдвиге поле скоростей характеризуется компонентами $v_x = g|\dot\gamma_-|y$, $v_y = 0$, при чистом сдвиге — $v_x = g|\dot\gamma|x$, $v_y = -g|\dot\gamma|y$.

Граничные условия в (1.2) записаны для центрально-симметричной исходной конфигурации нити. Середина нити находится в начале координат, и выполняются соотношения $X(S) = -X(-S)$, $Y(S) = -Y(-S)$. Точка $S = 0$ является точкой перегиба оси нити, в которой $\partial\varphi/\partial S = 0$. При этом для симметричных полей скорости жидкости середина нити в процессе ее деформации всегда будет находиться в начале координат (снят конвективный снос нити). Поэтому достаточно рассмотреть движение правой половины нити ($0 \leqslant S \leqslant 1$). Расчетная схема и оси координат представлены на рис. 1.

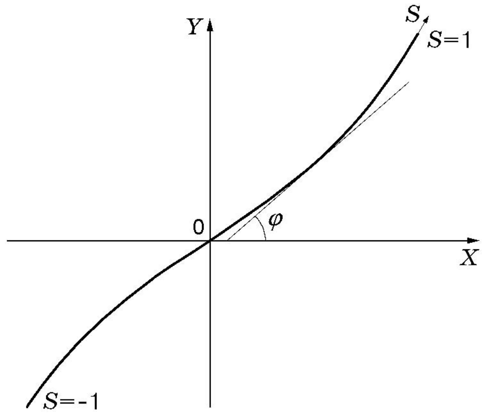

Рис. 1

Согласно (1.1) вязкость жидкости определяет натяжение, но не влияет на эволюцию формы. При прочих равных условиях натяжение нити пропорционально вязкости, скорости деформации и квадрату длины нити, что согласуется с опытными данными. При изготовлении резиноволокнистых композиций наблюдалось усиление диспергирования наполнителя с повышением вязкости среды [1, 2], скорости деформации [3], а также начальной длины волокна [4].

Таким образом, при исследовании задачи можно ограничиться уравнениями (1.2). Функции X и Y находятся путем интегрирования уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial X}{\partial S} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial Y}{\partial S} = \sin\varphi,\\ S = 0, \qquad X = 0, \qquad Y = 0.\end{gathered} \tag{1.3}$$

2. Асимптотическое исследование. Пусть начальная конфигурация нити описывается функцией $\varphi^* = \varphi_+ + \varepsilon S$ (φ_+, ε — постоянные).

Полагая в начальном условии (1.2) $|\varepsilon| \ll 1$, используем для анализа задачи метод малого параметра [7]. Ищем решение в виде прямых разложений по степеням малого параметра

$$\varphi = \varphi_0(\tau) + \varepsilon\varphi_1(S,\tau) + \ldots, \qquad N = N_0(S,\tau) + \varepsilon N_1(S,\tau) + \ldots. \tag{2.1}$$

Первые члены разложения φ_0, N_0 описывают эволюцию прямолинейной нити. Принято $\varphi_0 = \varphi_0(\tau)$, поскольку численный анализ задачи (1.2) показал, что прямолинейная нить в процессе эволюции сохраняет свою форму [6].

Подставляя разложения (2.1) в уравнения и граничные условия (1.2) и приравнивая члены одного порядка малости по ε, получим задачи:

— для порядка ε^0

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi_0}{d\tau} = -g[g_1 \sin 2\varphi_0 + (1-g_1)\sin^2\varphi_0],\\ \frac{\partial^2 N_0}{\partial S^2} = -g[g_1\cos 2\varphi_0 + 0{,}5(1-g_1)\sin 2\varphi_0],\\ \tau = 0:\quad \varphi_0 = \varphi_+, \quad N_0 = 0,\\ \tau > 0:\quad S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial S} = \frac{\partial N_0}{\partial S} = 0, \quad S = 1, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} = N_0 = 0;\end{gathered} \tag{2.2}$$

— для порядка ε^1

$$\begin{gathered}EN_0\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial S^2} + (1+E)\frac{\partial N_0}{\partial S}\frac{\partial\varphi_1}{\partial S} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} = 2g\varphi_1[g_1\cos 2\varphi_0 + 0{,}5(1-g_1)\sin 2\varphi_0],\\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial S^2} - EN_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial S} = 2g\varphi_1[g_1\sin 2\varphi_0 - 0{,}5(1-g_1)\cos 2\varphi_0],\\ \tau = 0:\quad \varphi_1 = S, \quad N_1 = 0,\\ \tau > 0:\quad S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial S} = \frac{\partial N_1}{\partial S} = 0, \quad S = 1, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial S} = N_1 = 0.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Решение задачи (2.2) имеет вид:

— в случае чистого сдвига ($g_1 = 1$)

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}\varphi_+ \exp(-2g\tau)], \qquad N_0 = 0{,}5g(1-S^2)\cos 2\varphi_0; \tag{2.4}$$

— в случае простого сдвига ($g_1 = 0$)

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}\varphi_+/(1+g\tau\operatorname{tg}\varphi_+)], \quad g\operatorname{tg}\varphi_+ > 0, \qquad N_0 = 0{,}25g(1-S^2)\sin 2\varphi_0. \tag{2.5}$$

Решение первого уравнения в (2.3) будем искать в виде произведения функций
$$\varphi_1 = f(\tau)\psi(S), \tag{2.6}$$
которое является решением системы уравнений
$$0{,}5E(1-S^2)\,\frac{d^2\psi}{dS^2} - (1+E)S\,\frac{d\psi}{dS} - (2+C)\psi = 0; \tag{2.7}$$
$$\frac{1}{f}\,\frac{df}{d\tau} = Cg[g_1\cos 2\varphi_0 + 0{,}5(1-g_1)\sin 2\varphi_0], \tag{2.8}$$
где C — постоянная.

Решение уравнения (2.7) имеет вид
$$\psi = C_1S + C_2S\int\limits_0^S S^{-2}(1-S^2)^{-(1+E)/E}\,dS,$$
где C_1, C_2 — постоянные. Последний интеграл при произвольном значении E через элементарные функции не выражается. Для удовлетворения начальному условию (2.3) необходимо положить $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C = -(E+3)$.

В случае чистого сдвига ($g_1 = 1$) уравнение (2.8) с учетом выражения $d\varphi_0/d\tau$ из первого уравнения в (2.2) можно представить в виде
$$df/f = (E+3)\operatorname{ctg} 2\varphi_0\,d\varphi_0.$$
Выполнив интегрирование, получим
$$f = (\sin 2\varphi_0/\sin 2\varphi_+)^{(E+3)/2}. \tag{2.9}$$
Здесь использовано начальное условие $\tau = 0$, $\varphi_0 = \varphi_+$, $f = 1$.

Аналогично находится решение уравнения (2.8) для простого сдвига ($g_1 = 0$):
$$f = (\sin\varphi_0/\sin\varphi_+)^{E+3}. \tag{2.10}$$

Решение второго уравнения в (2.3) с учетом (2.4)–(2.6), (2.9), (2.10) не представляет трудностей: путем двукратного интегрирования получаем выражение для N_1.

Таким образом, для чистого сдвига с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$, имеем решение
$$\begin{gathered}\varphi = \varphi_0 + \varepsilon S(\sin 2\varphi_0/\sin 2\varphi_+)^{(E+3)/2},\\ N = 0{,}5(1-S^2)g\cos 2\varphi_0 + (\varepsilon g/24)(\sin 2\varphi_0/\sin 2\varphi_+)^{(E+3)/2}\times\\ \times[E(6S^2 - S^4 - 5)\cos 2\varphi_0 - 8(1-S^3)\sin 2\varphi_0],\end{gathered} \tag{2.11}$$
где функция $\varphi_0(\tau)$ определена в (2.4).

Для простого сдвига соответствующие выражения имеют вид
$$\begin{gathered}\varphi = \varphi_0 + \varepsilon S(\sin\varphi_0/\sin\varphi_+)^{E+3},\\ N = 0{,}25g(1-S^2)\sin 2\varphi_0 + (\varepsilon g/48)(\sin\varphi_0/\sin\varphi_+)^{E+3}\times\\ \times[E(6S^2 - S^4 - 5)\sin 2\varphi_0 + 8(1-S^3)\cos 2\varphi_0],\end{gathered} \tag{2.12}$$
где функция $\varphi_0(\tau)$ определена в (2.5).

Разложения (2.11), (2.12) не содержат секулярных членов, что подтверждает правомерность выражений (2.1) и используемого метода анализа.

Интегрируя уравнения (1.3) с учетом (2.11), (2.12), получим выражения для функций X и Y

$$X = [\sin(\varphi_0 + \varepsilon\alpha S) - \sin\varphi_0]/(\varepsilon\alpha), \qquad Y = [\cos\varphi_0 - \cos(\varphi_0 + \varepsilon\alpha S)]/(\varepsilon\alpha), \tag{2.13}$$

где $\alpha = g_1(\sin 2\varphi_0/\sin 2\varphi_+)^{(E+3)/2} + (1 - g_1)(\sin\varphi_0/\sin\varphi_+)^{E+3}$; функция $\varphi_0(\tau)$ определена в (2.4), (2.5).

Рассматривается идеально гибкая нить, способная передавать только растягивающие усилия, поэтому полученное решение правомерно только для областей устойчивых движений нити (см. [6]).

В процессе эволюции вторые слагаемые в (2.11), (2.12) достаточно быстро убывают, и нить приобретает прямолинейную форму с параболическим распределением натяжения по длине. При этом параметр E, определяющий силу трения, влияет на скорость убывания слагаемого порядка ε, но не влияет на эволюцию прямолинейной нити. Таким образом, асимптотический анализ подтверждает гипотезу о двух периодах эволюции нити, предложенную в работе [6].

Следует отметить, что параметр E зависит от объемной доли волокнистого наполнителя, следовательно, его изменение в технологическом процессе оказывает влияние на степень ориентации волокон.

В условиях чистого сдвига первоначально прямолинейная нить, сохраняя свою форму, совершает поворот вокруг точки $X = Y = 0$ по направлению течения. График зависимости натяжения от координаты S является параболой с вершиной в точке $S = 0$. При $\tau \to \infty$ и $g = 1$ ось нити совпадает с осью X, при $g = -1$ — с осью Y. В этом случае натяжение максимально и описывается зависимостью $N = 0{,}5(1 - S^2)$. "Эффективная продольная вязкость" системы, наполненной ориентированными в направлении растяжения волокнами, максимальна. При ориентации волокон $\varphi_0 = \pi/4$ их натяжение нулевое, а эффективная вязкость системы близка к вязкости жидкости.

В случае простого сдвига характер распределения натяжения $N(S)$ существенно изменяется. При ориентации волокон $\varphi_0 = g\pi/4$ натяжение нити максимально и описывается функцией $N = 0{,}25(1 - S^2)$. Сдвиговая вязкость наполненной системы максимальна. В состоянии равновесия ($\tau \to \infty$) ось нити совпадает с осью X, натяжение нулевое ($N = 0$). Сдвиговая вязкость наполненной системы близка к вязкости жидкости (в первом приближении зависимость вязкости от объемной доли волокон описывается формулой Эйнштейна).

3. Численный анализ. Система уравнений (1.2), (1.3) решалась численно с помощью неявной конечно-разностной схемы Кранка — Николсона. Функции N и φ на верхнем временном слое находились методом трехточечной прогонки и уточнялись итерациями. Здесь из уравнений (1.3) находились функции X и Y.

Схема сохраняла устойчивость даже при наличии в нити сжимающих усилий. При этом на участке сжатия нить принимала пилообразную форму с периодом, приблизительно равным двум шагам по S.

В качестве теста использовалось точное решение задачи для прямолинейной нити (2.4), (2.5). Анализ выполнен для системы поликапроамидные волокна — резиновая матрица ($d = 30$ мкм, $2l = 10^{-2}$ м, $|\dot\gamma| = |\dot\gamma_-| = 18$ с$^{-1}$, $\mu = 10^5$ Па $\cdot$ с, $\rho = 1200$ кг/м^3, $\langle c\rangle = 0{,}05$, $\langle v\rangle = |\dot\gamma| l$, $\mathrm{Re} = 3{,}24 \cdot 10^{-8}$, $E = 1{,}56$). Параметры начальной конфигурации нити $\varphi_0 = 0{,}6$, $\varepsilon = 0{,}5$. Шаг по координате S составлял 0,025, по времени — 0,001.

Результаты численного решения в безразмерном виде представлены сплошными линиями на рис. 2 (результаты асимптотического решения показаны штриховыми линиями). Рис. 2,*а* соответствует чистому сдвигу, рис. 2,*б* — простому. Кривые *1*–*7* соответствуют значениям $\tau = 0$; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; 3,2. Видно, что в случае деформации чистого

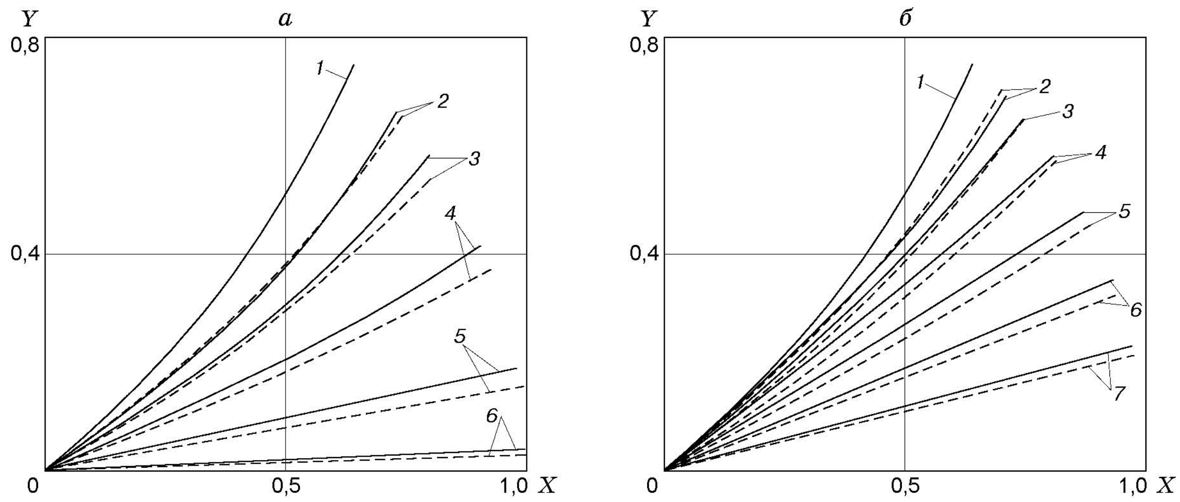

Рис. 2

сдвига поворот нити в направлении течения совершается с большей скоростью. Поэтому наличие в течении деформации растяжения ускоряет процесс ориентации волокнистого наполнителя.

Асимптотическое решение получено в предположении $|\varepsilon| \ll 1$. Из сопоставления этого решения с численным следует, что даже при $\varepsilon = 0{,}5$ асимптотическое решение (2.11)–(2.13) достаточно точно описывает эволюцию нити (различие не более 12 %).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дзюра Е. А., Серебро А. Л.** Исследование прочностных свойств резин, наполненных короткими волокнами // Каучук и резина. 1978. № 7. С. 32–34.
2. **Несиоловская Т. Н., Соловьев Е. М.** Диспергирование полиамидного волокна в процессе приготовления РВК // Каучук и резина. 1990. № 8. С. 17–19.
3. **Несиоловская Т. Н., Соловьев Е. М., Дуросов С. М., Толобов С. В.** Способ получения коротковолокнистых наполнителей с улучшенным комплексом свойств // Каучук и резина. 1988. № 2. С. 22–24.
4. **Несиоловская Т. Н., Соловьев Е. М.** Влияние длины синтетического волокна на деформационно-прочностные свойства РВК // Каучук и резина. 1989. № 7. С. 31, 32.
5. **Малкин А. Я., Эппле Г. В., Грицук А. И.** Влияние волокнистого наполнителя на вязкостные свойства среды // Коллоид. журн. 1972. Т. 34, № 4. С. 550–554.
6. **Шаповалов В. М.** Движение гибкой нити конечной длины в потоке вязкой жидкости // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 144–153.
7. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 17/X 2000 г.,
в окончательном варианте — 3/X 2001 г.