Следует заметить, что проведенное выше рассмотрение условий разрушения предполагает наличие поверхностной трещины данного размера c_f на краю пятна контакта при любом размере площадки соприкосновения. Это предположение справедливо, если $a \gg c_f$. Если же разрушение происходит на пятне контакта, размеры которого порядка расстояния между поверхностными трещинами, то может оказаться, что при $a = a_\text{р}$ трещина размера c_f не попадает в область повышенных растягивающих напряжений и индентор выдерживает нагрузки $Q > Q_\text{р}$. В этом смысле полученные значения $P_\text{р}^m$ при малых размерах пятна контакта надо понимать как оценку снизу.

Автор выражает благодарность Р. Г. Архипову, который детально ознакомился с работой и предложил ряд изменений, способствовавших более наглядному изложению результатов, Б. В. Виноградову, Г. Н. Ермолаеву, А. В. Рахманиной и Е. Н. Яковлеву за интерес к работе и полезные дискуссии.

Поступила 23 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А. И.** Теория упругости. М., «Наука», 1970.
2. **Беляев Н. М.** Местные напряжения при сжатии упругих тел.— В кн.: Труды по теории упругости и пластичности. М., Гостехтеоризда г, 1957.
3. **Frank F. C., Lawn B. R.** On the theory of Hertzian fracture.— «Proceedings of the Royal Society; ser. A», 1967, vol. 299, N 1458.
4. **Архипов Р. Г., Каганова И. М.** К теории оптимального распределения напряжений в наковальнях Бриджмена.— «Докл. АН СССР», 1978, т. 239, № 4.
5. **Разрушение.** Т. 2. Под ред. Г. Либовица. М., «Мир», 1975.
6. **Vereshchagin L. F., Yakovlev E. N., Vinogradov B. V., Stepanov G. N., Bibaev K. Kh., Alaeva T. I., Sakun V. P.** Megabar pressure between anvils.— «High Temperatures-High Pressures», 1974, vol. 6, N 5.
7. **Яковлев Е. Н., Верещагин Л. Ф., Виноградов Б. В., Тимофеев Ю. А.** Порядок следования переходов диэлектрик — металл в мегабарном диапазоне статических давлений.— «Письма в ЖТФ», 1976, т. 2, вып. 12.
8. **Roesler F. C.** Indentation hardness of glass as an energy scaling law.— «Proceedings of the Physics Society; B», 1956, vol. 69, N 433.
9. **Дейч Э. Г.** Об одной осесимметрической контактной задаче для неплоского штампа кругового в плане.— ПММ, 1962, т. 26, № 5.
10. **Irwin G. R.** Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.— «J. Appl. Mech.», 1957, vol. 24.
11. **Ruoff A. L., Chan K. S.** Analysis of contact pressures using indentors which are bodies of revolution.— «J. Appl. Phys.», 1976, vol. 47, N 11.
12. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.

УДК 539.389.1

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В. В. Дудукаленко, С. И. Мешкоз, Л. А. Сараев

(*Куйбышев*)

Макроскопические механические характеристики композиционного материала, представляющего смесь включений и матрицы, определяются механическими свойствами фаз и его геометрической структурой. Структуру композита определим таким равномерным распределением сферических включений в матрице, что характеристическая функция $\varkappa$, равная единице в точках включений и нулю в точках матрицы, статистически однородна и изотропна. Относительно механических свойств фаз ограничимся условием, что пластические свойства включений выше пластических свойств матрицы. Поэтому в определенном интервале деформаций матрицу можно считать идеально упругой, а включения идеально упругопластическими. Обе фазы соединены между собой так, что скольжение включений в матрице исключено.

1. Материалы матрицы и включений считаются изотропными и закон Гука в фазах записывается в форме

$$\sigma_{ij} = 2\mu_\alpha\left(e_{ij} - e^p_{ij}\right) + \delta_{ij}\lambda_\alpha e_{kk},$$

где μ_α, λ_α — параметры Ламэ; σ_{ij}, e_{ij}, e^p_{ij} — компоненты тензоров напряжений, полных и пластических деформаций; $\alpha = 1$ соответствует матрице, $\alpha = 2$ — включениям. Пластические деформации удовлетворяют условию несжимаемости $e^p_{kk} = 0$. Пластические свойства включений определяются условием пластичности Мизеса — $s_{ij}s_{ij} = k^2$, s_{ij} и k — девиаторные компоненты тензора напряжений и предел пластичности включений соответственно.

Исследование на экстремум [1] функционала

(1.1)
$$L = \frac{1}{V}\left\{\int\limits_V \left[D\left(\varepsilon^p_{ij}\right) + \frac{1}{2}W\left(e_{ij} - e^p_{ij}, \varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\right)\right] dV - \int\limits_S \left(p_i v_i + q_i u_i\right) dS\right\}$$

определяет свойства неоднородной среды. Здесь $D\left(\varepsilon^p_{ij}\right) = k(x)\sqrt{\varepsilon^p_{ij}\varepsilon^p_{ij}}$ — диссипативная функция для выбранного условия пластичности [2]; $\frac{1}{2}W\left(e_{ij} - e^p_{ij};\ \varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\right) = 2\mu(x)\left(e_{ij} - e^p_{ij}\right)\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\right) + \lambda(x) e_{kk}\varepsilon_{kk}$ — скорость изменения упругой энергии; ε_{ij}, ε^p_{ij} — компоненты тензоров полных и пластических скоростей деформаций; u_i, v_i — перемещения и их скорости; p_i, q_i — нагрузки и их скорости на поверхности. Полный объем V является односвязной областью. Случайные поля напряжений, деформаций и их скоростей предполагаются эргодическими так, что их математические ожидания, совпадающие со средними по объему значениями, не зависят от координат. Осреднение по V и объему включений $V_в$ обозначается

$$\langle(\ldots)\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V (\ldots)\, dV, \qquad \langle(\ldots)\rangle_в = \frac{1}{V_в}\int\limits_{V_в} (\ldots)\, dV.$$

Величины $\langle e_{ij}\rangle$, $\langle \varepsilon_{ij}\rangle$, $\langle \sigma_{ij}\rangle$ и остаточные деформации $\overset{*}{e}_{ij}$ считаются заданными, $k(x)$, $\mu(x)$, $\lambda(x)$ образуют однородные эргодические случайные поля. Поля флуктуаций перемещений u'_i и их скоростей v'_i ищутся в классе статистически однородных непрерывных функций.

Относительно осреднения по включениям величин поля предполагается

(1.2)
$$\langle e_{ij}\varepsilon_{kl}\rangle_в = \langle e_{ij}\rangle_в \langle \varepsilon_{kl}\rangle_в.$$

В теории упругости при малых концентрациях включений такое предположение полностью оправдывается, так как соответствует однородному деформированному состоянию каждого сферического включения [3]. При более высоких концентрациях включений это предположение должно выполняться за счет уравновешенного взаимного влияния сфер, статистически однородно распределенных в объеме V.

Условие на границе S объема V имеет вид

$$p_i = \langle\sigma_{ij}\rangle n_j,\quad g_i = \langle\dot{\sigma}_{ij}\rangle n_j, \tag{1.3}$$

где n_j — вектор единичной нормали к S; $\dot{\sigma}_{ij}$ — скорость поля напряжений.

Разделяя объем V на $V - V_{\text{в}}$ и $V_{\text{в}}$, при помощи формул (1.1)—(1.3) получаем

$$\begin{aligned} L = k\sqrt{\langle\varepsilon_{ij}^p\rangle\langle\varepsilon_{ij}^p\rangle} + 2\mu_1\langle e_{ij}\varepsilon_{ij}\rangle + \lambda_1\langle e_{kk}\varepsilon_{kk}\rangle + 2\Delta\mu c\langle e_{ij}\rangle_{\text{в}}\langle\varepsilon_{ij}\rangle_{\text{в}} + \\ + \Delta\lambda c\langle e_{kk}\rangle_{\text{в}}\langle\varepsilon_{kk}\rangle_{\text{в}} + 2\mu_2 c^{-1}\langle e_{ij}^p\rangle\langle\varepsilon_{ij}^p\rangle - 2\mu_2\left(\langle e_{ij}\rangle_{\text{в}}\langle\varepsilon_{ij}^p\rangle + \right. \\ \left. + \langle e_{ij}^p\rangle\langle\varepsilon_{ij}\rangle_{\text{в}}\right) - \langle\sigma_{ij}\rangle\langle\varepsilon_{ij}\rangle - \langle\dot{\sigma}_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где использовано очевидное соотношение $\langle e_{ij}^p\rangle = c\langle e_{ij}^p\rangle_{\text{в}}$; $c = V_{\text{в}}V^{-1}$ — объемная концентрация включений $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1$, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

Обращение в нуль первой вариации (1.4) на независимых вариациях флуктуаций $\delta u_i'$, $\delta v_i'$ приводит к двум системам уравнений

$$2\mu_1 e_{ij,j}' + \lambda_1 e_{kk,i}' = a_{ij}\varkappa_{,j}',\qquad 2\mu_1\varepsilon_{ij,j}' + \lambda_1\varepsilon_{kk,i}' = b_{ij}\varkappa_{,j}',$$

правая часть которых зависит от деформированного состояния включений и математического ожидания пластической деформации.

Здесь

$$a_{ij} = 2\mu_2 c^{-1}\langle e_{ij}^p\rangle - 2\Delta\mu\langle e_{ij}\rangle_{\text{в}} - \delta_{ij}\Delta\lambda\langle e_{kk}\rangle_{\text{в}};$$
$$b_{ij} = 2\mu_2 c^{-1}\langle\varepsilon_{ij}^p\rangle - 2\Delta\mu\langle\varepsilon_{ij}\rangle_{\text{в}} - \delta_{ij}\Delta\lambda\langle\varepsilon_{kk}\rangle_{\text{в}}.$$

Решение записывается при помощи тензора Грина $U_k^i(x, \xi)$ [4]

$$e_{ij}'(x) = a_{kl}\int_V G_{i(k,l)j}(x, \xi)\varkappa'(\xi)\,dV,$$

$$\varepsilon_{ij}'(x) = b_{kl}\int_V G_{i(k,l)j}(x, \xi)\varkappa'(\xi)\,dV,$$

где $2G_{ik,lj}(x, \xi) = \dfrac{\partial U_k^i(x, \xi)}{\partial\xi_l\partial x_j} + \dfrac{\partial U_k^j(x, \xi)}{\partial\xi_l\partial x_i}$, круглыми скобками обозначено симметрирование по индексам.

2. Для определения эффективных характеристик композита необходимо выразить функционал (1.4) через величины поля, усредненные по объему V. Поэтому нужно найти выражения средних по $V_{\text{в}}$ через средние по V. Это можно сделать при помощи очевидных равенств

$$\langle e_{ij}\rangle_{\text{в}} = \langle e_{ij}\rangle + c^{-1}\langle\varkappa' e_{ij}'\rangle,\qquad \langle\varepsilon_{ij}\rangle_{\text{в}} = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + c^{-1}\langle\varkappa'\varepsilon_{ij}'\rangle. \tag{2.1}$$

Для статически однородных и изотропных функций $\varkappa$ и $\varkappa'$ бинарная корреляционная функция

$$\langle\varkappa'(x)\varkappa'(\xi)\rangle = f(r),$$

где $f(r)$ — некоторая функция расстояния $r^2 = (x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)/R^2$, R — радиус включений.

Тогда

$$\langle \varkappa' e'_{ij}\rangle = \frac{c(1-c)}{30\mu_1(1-\nu_1)}[2(4-5\nu_1)a_{ij}-\delta_{ij}a_{kk}], \tag{2.2}$$

$$\langle \varkappa' \varepsilon'_{ij}\rangle = \frac{c(1-c)}{30\mu_1(1-\nu_1)}[2(4-5\nu_1)b_{ij}-\delta_{ij}b_{kk}],$$

$$2\mu_1\langle e'_{ij}\varepsilon'_{ij}\rangle + \lambda_1\langle e'_{kk}\varepsilon'_{kk}\rangle = \frac{c(1-c)}{30\mu_1(1-\nu_1)}[2(4-5\nu_1)a_{ij}b_{ij}-a_{kk}b_{kk}]$$

(ν_1 — коэффициент Пуассона в матрице).

Подставляя первую из формул (2.2) в равенства (2.1), с учетом выражения для a_{ij} получаем значение средней по включениям деформации через полную деформацию

$$\langle e_{ij}\rangle_{\text{в}} = A\langle e_{ij}\rangle + \delta_{ij}B\langle e_{kk}\rangle + C\langle e^p_{ij}\rangle, \tag{2.3}$$

(аналогичное выражение справедливо для $\langle \varepsilon_{ij}\rangle_{\text{в}}$), где

$$A = \frac{15\mu_1(1-\nu_1)}{15\mu_1(1-\nu_1)+2(1-c)\Delta\mu(4-5\nu_1)};$$

$$B = A\frac{(1-c)[2\Delta\mu-5\Delta\lambda(1-2\nu_1)]}{5[6\mu_1(1-\nu_1)+(1-c)(1-2\nu_1)(2\Delta\mu+3\Delta\lambda)]};$$

$$C = A\frac{2\mu_2(1-c)(4-5\nu_1)}{15\mu_1 c(1-\nu_1)}.$$

С помощью выражений (2.2), (2.3) функционал (1.4) выражается через величины полей, усредненные только по полному объему V. Поэтому в дальнейшем угловые скобки опускаются.

Условие стационарности такого функционала по ε_{ij} дает эффективный закон Гука неоднородной среды. Девиаторная часть этого закона

$$s_{ij} = 2\mu^*\left(e^d_{ij} - \overset{*}{e}_{ij}\right). \tag{2.4}$$

Здесь

$$\mu^* = \mu_1\left[1 + \frac{15(1-\nu_1)c(m-1)}{15(1-\nu_1)+2(1-c)(m-1)(4-5\nu_1)}\right]$$

— эффективный модуль сдвига композита, $m=\mu_2/\mu_1$, e^d_{ij} — девиатор тензора деформаций. Объемная часть закона Гука запишется в виде

$$\sigma_{kk} = 3K^* e_{kk},$$

где

$$K^* = \frac{K_1(3K_2+4\mu_1)+4\mu_1(K_2-K_1)c}{(3K_2+4\mu_1)+3c(K_1-K_2)}$$

— эффективный модуль упругости всестороннего растяжения (сжатия), K_1, K_2 — объемные модули фаз. Формулы для μ^* и K^* совпадают с выражениями [5, 6].

В работе [7] были экспериментально исследованы модули упругости композита, изготовленного из полистирола Р-47, наполненного стеклянными микросферами. Формулы для μ^* и K^* показали очень хорошее совпадение с экспериментальными данными.

Условие стационарности функционала по ε_{ij}^p с учетом формулы (2.4) дает условие пластичности композитного материала

$$k^{*2} = (s_{ij} - Ne_{ij}^*)(s_{ij} - Ne_{ij}^*),$$

где

$$k^* = k\left[\frac{1}{m} + \frac{2}{15}\frac{4-5\nu_1}{1-\nu_1}(1-c)\left(1-\frac{1}{m}\right) + c\left(1-\frac{1}{m}\right)\right]$$

— эффективный предел пластичности среды;

$$N = 2\mu^*\left[\frac{k^*}{kc}\frac{(7-5\nu_1)+2c(4-5\nu_1)}{15(1-\nu_1)} - 1\right]$$

— коэффициент линейного упрочнения, характеризующий перемещение поверхности текучести при нагружении. Коэффициент линейного упрочнения является дробно-линейной функцией концентрации и изменяется от бесконечности до нуля при изменении концентрации от нуля до единицы. Предел пластичности k^* — линейная функция концентрации, который при $c = 1$ равен k. При $c = 0$

$$k^* = k\left[\frac{1}{m} + \frac{2}{15}\frac{4-5\nu_1}{1-\nu_1}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right],$$

эта величина является точной верхней границей всевозможных $k^* = k^*(c)$, характеризующих начальную поверхность текучести композита.

Поступила 25 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дудукаленко В. В., Иванищева О. И.** Об исследовании сложных сред с микроструктурой.— В кн.: Исследования по механике сплошных сред. Вып. 1. Воронеж, 1974.
2. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
3. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М., ИЛ., 1963.
4. **Новацкий В.** Теория упругости. М., «Мир», 1975.
5. **Kerner E. H.** The elastic and thermo-elastic properties of composite media.— «Proc. Roy. Soc.», 1956, vol. 69 B.
6. **Cristoffersen J.** Elastic and elastic-plastic composites. A new approach.— «Rept. Dan. Center. Appl. Math. and Mech.», 1973, N 61.
7. **Richard T. G.** The mechanical behaviour of a solids microsphere filled composites.— «J. Compos. Mater.», 1975, vol. 9, p. 108—113.