4. **Ни А. Л., Рыжов О. С.** Уравнения трансзвуковых течений релаксирующих смесей.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
5. **Ни А. Л., Рыжов О. С.** О структуре полностью диспергированных ударных волн в релаксирующих смесях.— ПМТФ, 1979, № 2.
6. **Ни А. Л., Рыжов О. С.** Предельные выражения для промежуточных скоростей звука в неравновесных течениях с произвольным числом химических реакций.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
7. **Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И.** Релаксационные процессы в ударных волнах. М., Наука, 1965.
8. **Кларк Дж., Макчесни М.** Динамика реальных газов. М., Мир, 1967.
9. **Clarke J. F., Rodgers J. B.** Shock waves in a gas with several relaxing internal energy modes.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt 4.
10. **Ни А. Л.** Распространение слабых ударных волн в средах с произвольным числом химических реакций.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
11. **Ван Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М., Мир, 1967.

УДК 532.72

О РАСТВОРЕНИИ ЦЕПОЧКИ КАПЕЛЬ (ПУЗЫРЕЙ) В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

А. Д. Полянин, Ю. А. Сергеев

(*Москва*)

Рассмотрена простейшая модельная задача о растворении цепочки капель (пузырей), обтекаемой потоком вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Учитывается диффузионное взаимодействие капель, обусловленное наличием диффузионных следов [1, 2]. Определены радиусы капель и скорость растворения в зависимости от их положения в цепочке и времени; получены характерные времена растворения капель. Показано, что диффузионное взаимодействие в цепочках приводит к существенному торможению процесса растворения. Для капли с порядковым номером k время полного растворения t_k определяется формулой

$$t_k = \alpha \sqrt{k}, \quad \alpha = \text{const},$$

где нумерация ведется от впереди идущей капли.

Считаем, что капли (пузыри) движутся в жидкости одна за другой с постоянной скоростью U и в процессе растворения сохраняют сферическую форму, а в начальный момент времени имеют равные радиусы $a_k(0) = a$ ($k = 1, 2, \ldots, M$); начальное число Рейнольдса $\mathrm{Re} = aU\nu^{-1}$ мало, а число Пекле $\mathrm{Pe} = aUD^{-1}$ велико (ν — кинематический коэффициент вязкости, D — коэффициент диффузии).

Начальное распределение скоростей жидкости и концентрации определяется совместным решением стационарных уравнений Стокса и конвективной диффузии с граничными условиями постоянства скорости жидкости U и концентрации c_0 вдали от цепочки, а также соответствующими динамическими условиями и условием равенства концентрации c_1 на поверхностях капель [3]. Процесс растворения считаем изотермичным, а концентрацию вещества внутри и на поверхностях капель постоянной величиной, не зависящей от времени и номера капель.

Кинетика простого (физического) растворения определяется процессом конвективной диффузии вещества к поверхностям сфер [3] и задается законом сохранения массы $dm_k/dt = I_k$, где dm_k/dt — полное изменение массы k-й капли в единицу времени; I_k — полный диффузионный поток на ее поверхность. Подстановка в закон сохранения стационарного значения I_0 для одиночной сферы (которое ввиду больших чисел Пекле определяется из решения соответствующей задачи диффузионного пограничного слоя [3]) показывает, что характерное время изменения радиуса капель велико и порядка $aU^{-1}\sqrt{\mathrm{Pe}}$. Поэтому процесс конвективного обтекания и конвективной диффузии цепочки капель квазистационарен и радиусы капель $a_k^* = a_k^*(t)$ медленно меняются во времени. Это означает, что процедура решения задачи может быть сведена к трем последовательным этапам: 1) построение стационарного решения уравнений Стокса и конвективной диффузии для цепочки капель с радиусами a_k^*; здесь a_k^* не фиксированы и играют роль параметров; 2) вычисление полных диффузионных потоков на поверхности капель по решению предыдущей задачи $I_k = I_k(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_k^*)$; 3) подстановка полученных потоков I_k в уравнения сохранения массы, что дает автономную нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения радиусов капель с начальным условием $a_k^*(0) = a$.

Первый этап решения полной задачи является самым сложным, и его решение в общем случае неизвестно. Следует отметить, однако, что поле скоростей жидкости для цепочки, состоящей из двух капель произвольного радиуса (M = 2), получено в [4—6], а с помощью [1, 2] может быть построено и поле концентраций.

Для простоты в дальнейшем считаем, что начальные расстояния $l_k = l$ между каплями удовлетворяют неравенству

$$aO(1) < l < aO(\sqrt{\mathrm{Pe}}). \tag{1}$$

Левая часть неравенства позволяет с точностью до младших членов для определения поля скоростей в окрестности k-й капли воспользоваться решением Стокса для одиночной капли

$$\psi_k = \frac{1}{2}U\left(r_k - a_k^*\right)\left[r_k - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta+1}a_k^*\left(1 + \frac{a_k^*}{r_k}\right)\right]\sin^2\theta_k, \tag{2}$$

где β — отношение вязкостей капли ($\beta_k = \beta$) и окружающей жидкости; r_k, θ_k — сферическая система координат, связанная с центром k-й капли; полярный угол θ_k отсчитывается от направления потока (задней критической точки).

Для вычисления полного диффузионного потока на k-ю каплю

$$I_k = I_\Sigma^{(k)} - I_\Sigma^{(k-1)} = 2\pi a_k^{*2} D \int\limits_0^\pi \left[\frac{\partial c_k}{\partial r_k}\right]_{r_k = a_k^*} \sin\theta_k d\theta_k, \tag{3}$$

где $I_\Sigma^{(k)} = I_\Sigma^{(k)}(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_k^*)$ — суммарный диффузионный поток на k первых капель цепочки, нужно получить распределение концентрации c_k в диффузионном пограничном слое k-й капли, которое определяется из решения стационарного уравнения

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial\theta_k}\frac{\partial c_k}{\partial r_k} - \frac{\partial\psi_k}{\partial r_k}\frac{\partial c_k}{\partial\theta_k} = D\sin\theta_k\frac{\partial}{\partial r_k}\left(r_k^2\frac{\partial c_k}{\partial r_k}\right) \tag{4}$$

с граничными условиями постоянства концентраций вещества вдали $c = c_0$ и на поверхности $c = c_1$ капли и условия натекания (граничное условие для концентрации, приходящей в диффузионный пограничный слой k-й капли).

Правая часть неравенства (1) указывает на то, что рассматриваемый случай соответствует расположению k-й капли в конвективно-погранслойной области диффузионного следа предыдущей $(k-1)$-й капли [1, 2].

Это в свою очередь означает, что в окрестности передней критической точки k-й капли концентрацию следует положить равной концентрации «на выходе» из диффузионного пограничного слоя $(k-1)$-й [1, 2].

Решение задачи (2), (4) с указанными граничными условиями и произвольными значениями радиусов капель получено в [2] и для суммарных диффузионных потоков приводит к равенству

$$I_\Sigma^{(k)} = 4(c_1 - c_0)\sqrt{\frac{2\pi}{3(\beta+1)}}\,U^{1/2}D^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{k}(a_i^*)^3\right]^{1/2}. \tag{5}$$

Используя закон сохранения массы и выражения (3), (5), а также учитывая, что $m_k = {}^4/_3\pi a_k^{*3}$, получаем следующую задачу, определяющую кинетику растворения капель цепочки:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(a_k^3) = -\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^3\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i^3\right)^{1/2}, \quad a_k(0) = 1, \tag{6}$$

$$\tau = \lambda\frac{t}{T}, \quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{\pi}}(\beta+1)^{-1/2}.$$

Уравнение (6) записано в безразмерных переменных, где в качестве масштабов радиусов частиц, концентрации, скорости и времени выбраны величины a, $(c_0 - c_1)$, U, $T = aU^{-1}\sqrt{\mathrm{Pe}}$ соответственно.

Суммируем от 1 до k уравнения (6)

$$dJ_k/d\tau = -2\sqrt{J_k}, \quad J_k(0) = k, \quad J_k = \sum_{i=1}^{k} a_i^3(\tau) \tag{7}$$

и после интегрирования получаем

$$J_k(\tau) = (\sqrt{k} - \tau)^2. \tag{8}$$

Используя (8), определяем закон изменения радиусов капель от времени

$$a_1(\tau) = (1-\tau)^{2/3}, \quad k = 1, \tag{9}$$

$$a_k(\tau) = [J_k(\tau) - J_{k-1}(\tau)]^{1/3} = [1 - 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})\tau]^{1/3}, \quad k \geqslant 2.$$

С момента растворения первой капли ($\tau_1 = 1$, $a_1(\tau_1) = 0$) вторая капля становится первой каплей цепочки, и, как следует из (9), в это время ее радиус почти в два раза меньше исходного $a_2(\tau_1) = (\sqrt{2} - 1)^{2/3} = 0{,}554$. Формула (8) дает начальное условие для $J_k(\tau)$ при $\tau = \tau_1$, поэтому кинетика растворения цепочки при $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $a_2(\tau_2) = 0$ определяется системой

$$dJ_k/d\tau = -2\sqrt{J_k}, \quad J_k(\tau_1) = (\sqrt{k} - 1)^2, \quad J_k = \sum_{i=2}^{k} a_i^3(\tau). \tag{10}$$

Аналогичным образом можно, получив решение (10) и определив τ_2 и $J_k(\tau_2)$, написать уравнения, определяющие кинетику системы после растворения второй капли и т. д.

Опуская промежуточные выкладки, приведем здесь лишь окончательные наиболее важные результаты, а именно момент времени растворения k-й капли τ_k и радиус следующей $(k+1)$-й капли в этот момент $a_{k+1}(\tau_k)$

$$\tau_k = \sqrt{k}, \quad a_{k+1}(\tau_k) = (\Delta\tau_{k+1})^{2/3} = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^{2/3}. \tag{11}$$

Отсюда видно, что промежуток времени между двумя последовательными растворениями стремится к нулю $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \cong 0{,}5\,k^{-1/2}$ при больших k.

Как видно из (11), наличие диффузионного взаимодействия в цепочках приводит к существенному замедлению процесса растворения капель, в частности, вторая капля растворяется почти в полтора раза дольше первой, и в момент растворения первой ее радиус всего в два раза меньше начального.

Укажем область применимости полученных результатов: 1) результаты теряют пригодность, когда становится несправедливым приближение диффузионного пограничного слоя (4), т. е. когда размеры капель уменьшаются настолько, что выполняется $a_k(\tau)\sqrt{\mathrm{Pe}} = O(1)$ ($a_k(\tau)$ — отношение текущего радиуса к начальному); 2) уравнение (6) справедливо лишь до тех пор, пока выполняется условие

$$a^{-1}l < a_k(\tau)O(\sqrt{\mathrm{Pe}_k}), \quad \mathrm{Pe}_k = a_k(\tau)\,\mathrm{Pe},$$

т. е. пока k-я капля находится в конвективно-погранслойной области диффузионного следа предыдущей ($k-1$)-й капли [1, 2]. Нарушение последнего условия означает, что капля стала попадать в область смешения диффузионного следа предыдущей, а это, как следует из [1—2], приведет к появлению множителя $\gamma_k(\tau) < 1$ при a_k в уравнениях (6).

Оба ограничения связаны с тем, что радиус какой-либо капли становится достаточно малым. Однако ввиду того, что начальное число Пекле велико, система (6) хорошо описывает зависимость радиуса произвольной k-й капли от времени до тех пор, пока $a_k(\tau)$ не становится слишком малым, при этом малость предыдущих капель (радиусов) $a_1(\tau), \ldots, a_{k-1}(\tau)$ слабо сказывается на поведении $a_k(\tau)$. Например, при $\mathrm{Pe} \sim 10^5$—10^6 (при $al^{-1} \simeq 0{,}2$) для того чтобы стали выполняться указанные ограничения, радиус первой капли должен уменьшиться в несколько десятков раз по сравнению с исходным. Однако в это же время радиусы последующих более чем на порядок превосходят радиус первой, поэтому при $k \geqslant 2$ в уравнениях системы (6) членом $a_1(\tau)$ можно пренебречь как малым. То же самое можно сказать при исследовании поведения системы вблизи $\tau \approx \tau_2$ и т. д. до не слишком больших k (ошибка накапливается пропорционально k). Это говорит о том, что ограничения достаточно слабо отражаются на окончательных результатах для радиусов $a_{k+1}(\tau_k)$, где τ_k определяется по формуле (11).

Авторы выражают благодарность Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцеву за полезные замечания.

Поступила 20 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.** О диффузии к цепочке капель (пузырей) при больших числах Пекле.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 1.
2. **Полянин А. Д.** О диффузионном взаимодействии капель в жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2.
3. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
4. **Wacholder E., Weihs D.** Slow motion of a fluid sphere in the vicinity of another sphere or a plane boundary.— Chem. Engng Sci., 1972, vol. 27, N 10.
5. **Ruston E., Davies G. A.** The slow motion of two fluid spheres along their line of centers.— Appl. Sci. Res., 1973, vol. 28, N 1—2.
6. **Reed L. D., Morrison F. A.** The slow motion of two touching fluid spheres along their line of centers.— Intern. J.Multiphase Flow, 1974, vol. 1, N 4.