УДК 620.193.1:629.036.72

СОПРОТИВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОДОВ РЕЛЬСОТРОНА ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПЕРЕМЫЧКЕ

А. Д. Лебедев, Б. А. Урюков, В. В. Савичев

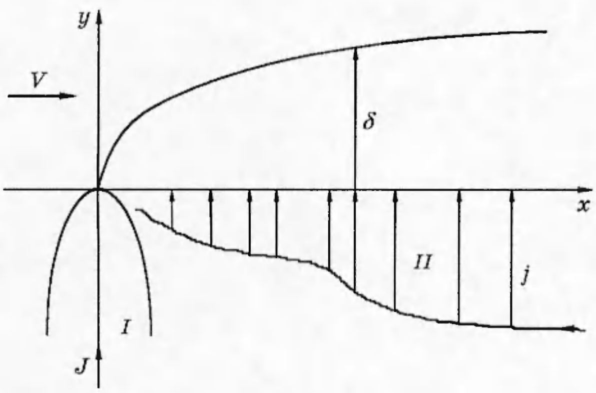
Научно-учебный комплекс фундаментальной науки МГТУ им. Н. Э. Баумана, 107005 Москва

Представлены результаты расчета сопротивления электродов рельсотрона при распределенной и сосредоточенной токовой перемычке. Для решения задачи использовалось квазистационарное уравнение диффузии магнитного поля. Приведены результаты точного и приближенного решений. При сложной картине распределения тока на границе предлагается находить не сопротивление электрода, а перепад напряжений.

Сопротивление протеканию тока по электродам рельсотрона, когда токовая перемычка перемещается вдоль электродов, отличается от сопротивления «неподвижной» конструкции. Это происходит потому, что ток не распределяется по всему сечению электрода, а ограничен узкой областью, прилегающей к рабочей поверхности. Эффект «скоростного» скин-слоя и его проявления рассматривались в ряде работ (см., например, [1, 2]). Электросопротивление, в частности, рассчитывалось в работе [3]. Схема плоской задачи представлена на рисунке: ток протекает по электродам в пределах скин-слоя δ и по перемычке, имеющей точечный контакт I с электродами в плоскости продольного сечения. Для решения использовалось квазистационарное уравнение диффузии магнитного поля в системе координат, связанной с перемычкой. В приближении «пограничного слоя» изменяемость поперечной составляющей плотности тока j_y в направлении x много меньше, чем изменяемость продольной составляющей j_x в направлении y. Это уравнение может быть записано в виде

$$\mu_0\sigma V\,\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где V — скорость перемещения массы электрода относительно контакта; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; σ — проводимость среды; B — индуктивность магнитного поля.



Картина протекания тока между электродами и перемычкой:
I — сосредоточенная перемычка, II — распределенная перемычка

В предположении о том, что индукция магнитного поля зависит лишь от одной автомодельной переменной $\eta \approx y/\sqrt{x}$, удается свести уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, решая которое, можно найти выражение для продольной плотности тока:

$$j_x = \frac{J}{b}\sqrt{\frac{\mu_0\sigma V}{\pi x}}\exp\Big(-\frac{\mu_0\sigma V y^2}{4x}\Big) \tag{2}$$

(b — ширина электрода; J — ток, протекающий по электроду). Отсюда следует, что характерный поперечный размер зоны протекания тока в электроде $\delta = J/bj_x\,(y=0) = \sqrt{\pi x/\mu_0\sigma V}$.

При выводе соотношения (2) использовалось условие, что поперечный размер электрода по высоте значительно больше δ.

Сопротивление R протеканию тока по электроду определяется из выражения для джоулева тепловыделения в сечении электрода:

$$Q = b\int\limits_0^\infty j_x^2\,\frac{dy}{\sigma}, \tag{3}$$

записанного в стандартной электротехнической форме:

$$Q = j_x^2\Big(\frac{dR}{dx}\Big). \tag{4}$$

Отсюда $R = 1/b\sqrt{2\mu_0 Vx/\pi\sigma}$.

Аналогичный подход применим и для случая распределенной перемычки II (см. рисунок). Допустим, что зависимость $B(x,y)$ имеет следующий вид:

$$B = f(x)\beta(\eta), \tag{5}$$

где $\eta = y\mu_0\sigma V/2x$ — автомодельная переменная.

Подстановка выражения (5) в исходное уравнение (1) показывает, что решение в виде (5) может иметь место только, если

$$f(x)_- = ax^\alpha, \tag{6}$$

где a, α — постоянные. При этом уравнение для β имеет вид

$$\ddot\beta + \eta\dot\beta - 2\alpha\beta = 0. \tag{7}$$

Частный случай $\alpha = 0$ отвечает решению, описанному выше (см. формулу (2)). Общее решение уравнения (7) может быть представлено в элементарных функциях, если 2α — целое число ($2\alpha = n$) [4]:

$$\beta = \mathrm{e}^{-(\eta^2/2)}\,\frac{d^n}{d\eta^n}\Big[\mathrm{e}^{\eta^2/2}\Big(c_1 + c_2\int \mathrm{e}^{\eta^2/2}d\eta\Big)\Big],$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Полагая, как и ранее, что поперечный размер электрода значительно больше характерного поперечного размера зоны концентрации магнитного поля, можно получить граничное условие

$$\beta \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

Отсюда следует, что $c_1 = 0$, а c_2 можно объединить с постоянной a. Таким образом, выражение для β примет вид

$$\beta = \mathrm{e}^{-(\eta^2/2)}\,\frac{d^n}{d\eta^n}\Big[\mathrm{e}^{\eta^2/2}\int\limits_\eta^\infty \mathrm{e}^{-(\eta^2/2)}d\eta\Big].$$

Из уравнения Максвелла

$$j_x = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial y}, \qquad j_y = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x} \tag{8}$$

получаем

$$j_x = -\sqrt{\frac{\sigma V}{2\mu_0 x}}\, f(x)\,\frac{d\beta}{d\eta}, \qquad j_y = -\frac{f(x)}{\mu_0 x}\left(\beta - \frac{\eta}{2}\frac{d\beta}{d\eta}\right). \tag{9}$$

Используя (3) и (4) и учитывая, что на поверхности электрода ($y = 0$)

$$B = B_0 = -\frac{\mu_0 J}{b} \tag{10}$$

(J — локальное значение силы тока в сечении электрода), находим

$$R = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{2\mu_0 V x}{\pi\sigma}}\,\gamma(n), \tag{11}$$

где множитель $\gamma(n)$ зависит от закона переноса тока через границу раздела электрода и перемычки

$$\gamma(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta^2(0)}\int\limits_0^\infty \left(\frac{d\beta}{d\eta}\right)^2 d\eta.$$

В таблице представлены результаты точного и приближенного расчетов γ для нескольких значений n, а также относительная погрешность приближенного расчета ε. Видно, что при распределенной перемычке ($n \neq 0$) сопротивление электрода увеличивается в сравнении с сосредоточенной ($n = 0$).

n	$\gamma_{\text{точн}}$	$\gamma_{\text{пр}}$	ε, %
0	1	0,8862	11,4
1	1,3013	1,2533	3,69
2	1,5621	1,5350	1,73
3	1,7902	1,7724	1,00
4	1,9941	1,9817	0,62

Приведенное точное решение применимо в ограниченном классе закономерностей токопереноса через границу, когда на всем протяжении рабочей поверхности электрода нормальная плотность тока имеет единую степенную зависимость от длины.

В реальных ситуациях перемычек может быть несколько и ток по-разному может переноситься в зонах контакта с ними.

Рассмотрим приближенное решение задачи, основанное на методе, аналогичном методу «интеграла теплового баланса» Гудмена [5], который успешно применяется в решении сложных задач теплопереноса (см., например, [6, 7]). Проинтегрируем уравнение (1) по координате y, используя уже упоминавшиеся условия о том, что поперечный размер электрода значительно больше δ:

$$\mu_0\sigma V\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty B\,dy = -\left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{y=0}. \tag{12}$$

Пусть распределение индукции магнитного поля задано в виде

$$B = B_0 \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right), \tag{13}$$

где B_0 — известная величина, определенная зависимостью (10), а δ — неизвестная функции координаты x.

Подставив (13) в (12), получим

$$\frac{d}{dx} B_0\delta = \frac{B_0}{\mu_0 \sigma V \delta}. \tag{14}$$

В данном случае в соответствии с (8) $j_x = -(B_0/\mu_0\delta)\exp(-y/\delta)$, поэтому из (3), (4), используя (10), получим

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{2b\sigma\delta}. \tag{15}$$

Зависимость $\delta(x)$ находится из (14):

$$\frac{d}{dx}(J\delta)^2 = \frac{2J^2}{\mu_0\sigma V}. \tag{16}$$

Погрешность данного расчета можно определить, сопоставляя его с точной моделью. В рамках точного решения в соответствии с (6), (9) имеем $j_y(0) \approx x^{\alpha-1}$, $j_y \approx x^{\alpha}$. Тогда из (16) следует

$$\delta^2 = \frac{2}{n+1}\,\frac{x}{\mu_0\sigma V},$$

а из (15)

$$R = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{n+1}{2}\,\frac{\mu_0 V x}{\sigma}}.$$

Используя (11), получим, что в приближенной модели $\gamma(n) = \sqrt{(\pi/4)(n+1)}$. С ростом n различие между приближенным и точным расчетами уменьшается. В частности, при равномерном переносе тока ($n = 2$) разница составляет около 2 %.

При сложной картине распределения перетекания тока на границе удобно находить не сопротивление того или иного участка электрода, а перепад напряжений. Для этого соотношение (4) следует записать в виде $Q = -J(dU/dx)$, где U — потенциал в объеме электрода. Тогда с помощью (3), (10) и (13) получаем $dU/dx = B_0/(2\mu_0\sigma\delta)$. Используя (14), находим

$$U = U_0 + \frac{V}{2} B_0\delta \tag{17}$$

(U_0 — потенциал при $\delta = 0$, т. е. на переднем фронте первой перемычки).

Зависимость $B_0\delta$ от координаты x определяется из (14):

$$(B_0\delta)^2 = \frac{2\mu_0}{\sigma V b^2}\int\limits_0^x j_x^2\,dx. \tag{18}$$

Объединяя (17) и (18), находим искомое решение для перепада напряжения на участке электрода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-02-16842).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лебедев А. Д., Урюков Б. А.** Импульсные ускорители плазмы высокого давления. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1990.
2. **Материалы** II Всесоюз. семин. по динамике сильноточного дугового разряда в магнитном поле. Новосибирск, 1991.
3. **Гороховский В. И., Урюков Б. А.** О явлении скин-эффекта в рельсотронах и импульсных плазменных ускорителях // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1980. № 13, вып. 3. С. 13–15.
4. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.
5. **Goodman T. R.** The heat-balance integral and its application to problems involving a change of phase // Trans. ASME. 1958. V. 80, N 2. P. 335–342.
6. **Чунг Б. Т. Ф., Сяо Дж. С.** Задача о распространении тепла в пластине конечной толщины при наличии абляции // Аэрокосм. техника. 1985. Т. 3, № 11. С. 128–134.
7. **Клейн К. А., Джентилмен Р. Л.** Использование интегрального метода теплового баланса для определения формы кратеров, возникающих в графите под действием излучения лазера // Аэрокосм. техника. 1987. № 11. С. 76–85.

Поступила в редакцию 11/XII 1996 г.