

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ФОКУСИРОВКИ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. А. Сыровой

(Москва)

Проблема определения электродов для формирования интенсивных пучков заряженных частиц в математической постановке сводится к решению задачи Коши для уравнения Лапласа. Известно, что здесь можно действовать, либо разделяя переменные [1], либо основываясь на теории аналитического продолжения [2-5]. Такой подход позволяет рассматривать плоские или осесимметричные течения. Ниже приводится алгоритм построения аналитического решения, который может быть применен и в трехмерном случае. Предполагается, что граница пучка совпадает с координатной поверхностью $x^1 = 0$ некоторой ортогональной системы x^i ($i = 1, 2, 3$). Решение представлено в виде ряда по x^1 с коэффициентами, зависящими от x^2, x^3 , определяемыми из рекуррентных соотношений. При эмиссии, ограниченной пространственным зарядом и температурой, вообще говоря, возникают трудности, связанные с расходимостью рядов и приводящие к невозможности расчета нулевой эквипотенциали указанным методом.

В качестве примера рассмотрены задачи о формировании пучков с эллиптическим поперечным сечением: (1) при периодической вариации z -компоненты скорости; (2) случай немонотонного изменения потенциала в одномерном течении между плоскостями $z = \text{const}$; (3) пучок, ускоряемый в соответствии с законом $3/2$.

При построении разложений условия на границе точно удовлетворяются уже двумя первыми членами ряда.

§ 1. Построение решения в общем случае. Свяжем поверхность пучка с некоторой ортогональной¹ системой координат x^i ($i = 1, 2, 3$), считая, что $x^1 = 0$ — ее уравнение в этой системе. Задача состоит в построении решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) = 0 \quad (1.1)$$

удовлетворяющего следующим условиям при $x^1 = 0$:

$$\varphi = \Phi(x^2, x^3), \quad \sqrt{g^{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} = \varepsilon(x^2, x^3) \quad (1.2)$$

Так как решение предполагается искать в виде ряда по x^1 с коэффициентами, зависящими от x^2, x^3

$$\varphi = \varphi_k (x^1)^k \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.3)$$

представим в виде аналогичных рядов элементы метрического тензора g_{ik} , а также комбинации $\sqrt{g} g^{ik}$

$$g_{11} = a_k (x^1)^k, \quad \sqrt{g} g^{11} = \alpha_k (x^1)^k, \quad \sqrt{g} g^{22} = \beta_k (x^1)^k, \quad \sqrt{g} g^{33} = \gamma_k (x^1)^k \quad (1.4) \\ (k = 0, 1, \dots)$$

Здесь индексы k имеют обычный смысл порядкового номера членов ряда и степеней.

¹ Система x^i предполагается ортогональной для простоты; неортогональность приводит лишь к усложнению выкладок.

Подставляя (1.3), (1.4) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^1 , приходим к рекуррентным соотношениям для определения φ_k

$$s \sum_{k=0}^s (s-k+1) \alpha_k \varphi_{s-k+1} + \sum_{k=0}^{s-1} \{ [\beta_k (\varphi_{s-k-1})_2']_2' + [\gamma_k (\varphi_{s-k-1})_3']_3' \} = 0 \quad (1.5)$$

($s=1, 2, \dots$)

Здесь штрих означает дифференцирование, нижний индекс указывает на координату, по которой оно производится.

Выпишем несколько членов разложения потенциала

$$\varphi_0 = \Phi, \quad \varphi_1 = \varepsilon a_0^{1/2} \quad (1.6)$$

$$\varphi_2 = [(1/4) a_1/a_0^{3/2} + 1/2 T_1] \varepsilon + 1/2 T_2 \Phi_P' + 1/2 T_3 \Phi_Q' - 1/2 (\Phi_P'' + \Phi_Q'') a_0$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & \{ 1/6 \varepsilon a_2/a_0^2 - 1/24 \varepsilon a_1^2/a_0^3 + 1/4 (a_1/a_0^{3/2}) (T_1 \varepsilon + T_2 \Phi_P' + T_3 \Phi_Q' - \\ & - \Phi_P'' - \Phi_Q'') + 1/6 \varepsilon T_{1S}' + 1/3 T_1 (1/2 T_1 \varepsilon + T_2 \Phi_P' + T_3 \Phi_Q' - \\ & - \Phi_P'' - \Phi_Q'') + 1/6 [(2k_1 + k_2) (\varepsilon_P' - k_1 \varepsilon) + (2\delta_1 + \delta_2) (\varepsilon_Q' - \delta_1 \varepsilon) - \\ & - (\varepsilon_P' - k_1 \varepsilon)_P' - (\varepsilon_Q' - \delta_1 \varepsilon)_Q'] + 1/6 [\kappa_1 T_2 - \kappa_2 (2k_1 + k_2) - \\ & - \kappa_{1P}' + \kappa_{2P}' + k_{1S}'] \Phi_P' + 1/6 [\kappa_2 T_3 - \kappa_1 (2\delta_1 + \delta_2) + \kappa_{1Q}' - \\ & - \kappa_{2Q}' + \delta_{1S}'] \Phi_Q' - 1/6 (\kappa_1 - \kappa_2) (\Phi_P'' - \Phi_Q'') \} a_0^{3/2} \end{aligned}$$

Начиная с φ_2 , коэффициенты в (1.3) зависят не только от производных функций Φ , ε по дугам P , Q криволинейных осей x^2 , x^3

$$P = \int \sqrt{g_{22}} dx^2, \quad Q = \int \sqrt{g_{33}} dx^3$$

но и от геометрии поверхности. Здесь κ_1 и κ_2 — главные кривизны поверхности $x^1 = 0$; $T_1 = \kappa_1 + \kappa_2$ — ее полная кривизна; k_1 , k_2 и T_2 , δ_1 , δ_2 и T_3 — главные и полные кривизны координатных поверхностей $x^2 = \text{const}$, $x^3 = \text{const}$, вычисленные при $x^1 = 0$

$$\begin{aligned} \kappa_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{22}}{\sqrt{g_{11}} \partial x^1}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{33}}{\sqrt{g_{11}} \partial x^1}, \quad k_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{11}}{\sqrt{g_{22}} \partial x^2}, \\ k_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{33}}{\sqrt{g_{22}} \partial x^2}, \quad \delta_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{11}}{\sqrt{g_{33}} \partial x^3}, \quad \delta_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{22}}{\sqrt{g_{33}} \partial x^3} \end{aligned}$$

Далее, S — длина дуги криволинейной оси x^1 , ортогональной к поверхности пучка

$$S = \int \sqrt{g_{11}} dx^1$$

так что T_{1S}' , например, означает скорость изменения полной кривизны поверхностей $x^1 = \text{const}$, вычисленную при $x^1 = 0$. Значение коэффициентов определяется не только геометрией задачи, но и смыслом параметра, по которому производится разложение. При этом имеется в виду возможность построения решения в системах, получающихся одна из другой преобразованиями типа $(x^1)' = f(x^1)$, не меняющими геометрии координатных поверхностей $x^1 = \text{const}$; элементы метрического тензора, однако, становятся другими. Например, для цилиндрического пучка $R = \text{const}$ при рассмотрении в полярных координатах (1) R , ψ , z и координатах (2) $\ln R$, ψ , z имеем

$$\begin{aligned} (1) \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = (x^1)^2, \quad a_0 = 1, \quad a_2 = a_3 = \dots = 0 \\ (2) \quad g_{11} = \exp(2x^1), \quad g_{22} = \exp(2x^1), \quad a_k = 2^k/k! \end{aligned}$$

Преобразования $(x^1)' = f(x^1)$ могут быть полезны для упрощения формул, определяющих φ_k в (1.3); кроме того, область сходимости (1.3) зависит от смысла x^1 .

Выражения (1.6) принимают универсальный вид, если перейти к разложению по дуге S криволинейной оси x^1 при помощи соотношения

$$s = a_0^{1/2} x^1 = S - \frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} S^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2} \right) S^3 + \dots$$

Выполняя это преобразование, получаем

$$\begin{aligned} \varphi = & \Phi + \varepsilon S + \frac{1}{2} (T_1 \varepsilon + T_2 \Phi_{P'} + T_3 \Phi_{Q'} - \Phi_{P''} - \Phi_{Q''}) S^2 + \\ & + \frac{1}{6} \{ 2T_1 (\frac{1}{2} T_1 \varepsilon + T_2 \Phi_{P'} + T_3 \Phi_{Q'} - \Phi_{P''} - \Phi_{Q''}) + \varepsilon T_{1S'} + \\ & + (2k_1 + k_2) (\varepsilon_{P'} - k_1 \varepsilon) + (2\delta_1 + \delta_2) (\varepsilon_{Q'} - \delta_1 \varepsilon) - (\varepsilon_{P'} - k_1 \varepsilon)_{P'} - \\ & - (\varepsilon_{Q'} - \delta_1 \varepsilon)_{Q'} + [\kappa_1 T_2 - \kappa_2 (2k_1 + k_2) - \kappa_{1P'} + \kappa_{2P'} + k_{1S'}] \Phi_{P'} + \\ & + [\kappa_2 T_3 - \kappa_1 (2\delta_1 + \delta_2) + \kappa_{1Q'} - \kappa_{2Q'} + \delta_{1S'}] \Phi_{Q'} - \\ & - (\kappa_1 - \kappa_2) (\Phi_{P''} - \Phi_{Q''}) \} S^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

§ 2. Некоторые замечания. Предложенный алгоритм построения решения позволяет рассматривать трехмерные задачи. Вместе с тем, в общем случае вопрос о сходимости выражения (1.3) остается открытым. Ниже на конкретных примерах продемонстрированы трудности, с которыми можно столкнуться при формальном применении метода, а также сделана попытка обрисовать границы его пригодности.

2.1. *Формирование ленточного пучка.* Рассмотрим задачу о формировании ленточного пучка при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом. Она, как известно [6], имеет аналитическое решение, выражаемое формулами

$$\varphi = (x^2 + y^2)^{2/3} \cos^{4/3} \psi \arctg(y/x) = R^{4/3} \cos^{4/3} \psi \quad (2.1)$$

Построение разложения (1.3) в декартовых координатах приводит к следующему результату:

$$s^2 \varphi_{s+1} + \varphi_{s-1}'' = 0, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{d^{2k} \Phi}{dx^{2k}} y^{2k}, \quad \Phi = x^{4/3} \quad (2.2)$$

Видно, что (2.2) сходится при $|y/x| < 1$, хотя выражение (2.1) имеет смысл для любых x, y . Формула (2.2) пригодна для построения поверхностей $\varphi = \text{const}$, достаточно удаленных от эмиттера, но ничего не дает для определения нулевой эквипотенциали.

Интересно, что при переходе к полярным координатам $x^1 = \psi$, $x^2 = R$ имеем

$$\begin{aligned} g_{11} = R^2, \quad g_{22} = 1, \quad \alpha_0 = R^{-1}, \quad \beta_0 = R, \quad \alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k > 0) \\ s(s+1)R^{-1} \varphi_{s+1} + (R \varphi_{s-1}')' = 0, \quad \Phi = R^{4/3}, \quad \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Нетрудно убедиться, что все $\varphi_{2k+1} = 0$, $\varphi_{2k} = c_{2k} R^{4/3}$, где c_{2k} — коэффициенты разложения $\cos^{4/3} \psi$ в ряд, сходящийся при всех ψ .

Такая же трудность возникает и в задаче о формировании цилиндрического пучка [7], ускоряемого в соответствии с законом $3/2$, причем преодолеть ее можно совершенно аналогично, переходя от системы $x^1 = R$, $x^2 = z$, $x^3 = \psi$ к координатам

$$x^1 = [(R-1)^2 + z^2]^{1/2}, \quad x^2 = \arctg[(R-1)/z], \quad x^3 = \psi$$

Таким образом, при рассмотрении течений с особыми точками на границе пучка (например, эмиссия, ограниченная пространственным зарядом и температурой), вообще говоря, не удастся получить полной картины эквипотенциальных поверхностей без специальных ухищрений. В противном случае (везде ненулевая скорость) можно ожидать, что область и скорость сходимости определяются лишь геометрией границы, удалением от нее и видом функций Φ , ε .

2.2. *Формирование кольцевого пучка.* Пользуясь методом § 1, определим фокусирующие электроды для кольцевого электростатического пучка, рассмотренного в [8]. Частицы движутся по окружностям, а потенциал в области, заполненной зарядами, задается выражением

$$\varphi = R^{-2} (\sin^3 \frac{1}{2} \psi)^{4/3}$$

Пусть $x^1 = \ln R$, $x^2 = \psi$. Тогда

$$g_{11} = g_{22} = \sqrt{g} = \exp(2x^1), \quad \sqrt{g} g^{11} = \sqrt{g} g^{22} = 1, \quad \alpha_0 = \beta_0 = 1 \\ \alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k > 0)$$

Соотношения (1.5) принимают вид

$$s(s+1)\varphi_{s+1} + \varphi_{s-1}'' = 0$$

Условия на границе пучка $R = 1$ при этом

$$\varphi_0 = \Phi = (\sin^3 \frac{1}{2} \psi)^{4/3}, \quad \varphi_1 = -2\Phi$$

Решение задачи определяется рядом

$$\varphi_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \Phi^{(2k)}, \quad \varphi_{2k+1} = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} \Phi^{(2k)} \\ \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{d^{2k} \Phi}{d\psi^{2k}} \left(1 - \frac{2}{2k+1} \ln R\right) (\ln R)^{2k} \quad (2.4)$$

абсолютно сходящимся при всех R и $\psi \neq \frac{2}{3}\pi k$ ($k = 0, 1, 2$). Выражение (2.4) позволяет построить полный набор поверхностей $\varphi = \text{const}$ и представляет собой еще одну новую форму решения [1, 2].

2.3. *Периодическая фокусировка ленточного пучка.* В теории периодической фокусировки известны приближенные решения проблемы формирования, основывающиеся на аппроксимации немонотонного изменения потенциала на границе пучка квадратной параболой или косинусом

$$\varphi_0 = \alpha + (1 - \alpha)(x/\sigma - 1)^2, \quad \varphi_0 = 1 - (1 - \alpha) \cos(\pi x / 2\sigma), \quad \varepsilon = 0 \quad (2.5)$$

Здесь α , σ — константы, определяющие минимальное значение потенциала и положение минимума. Применение соотношений (1.5) в декартовых координатах приводит к выражениям (2.2) при Φ , определяемом формулами (2.5). В результате получаем

$$\varphi = \alpha + (1 - \alpha)[(x/\sigma - 1)^2 - y^2] \\ \varphi = 1 - (1 - \alpha) \cos \frac{\pi x}{2\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{\pi y}{2\sigma}\right)^{2k} = 1 - (1 - \alpha) \cos \frac{\pi x}{2\sigma} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2\sigma}$$

Еще один пример, когда ряды (1.3) удастся просуммировать, сведя их к элементарным функциям, будет приведен ниже.

§ 3. *Формирование пучков с эллиптическим поперечным сечением.* В качестве иллюстрации общего метода приведем решение нескольких задач о формировании пучков с эллиптическим поперечным сечением. Рассмотрение будем вести в эллиптических цилиндрических координатах ξ , η , z , связанных с декартовыми координатами x , y , z формулами

$$x = a \sqrt{\beta - 1} \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad y = a \sqrt{\beta - 1} \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad z = z \quad (3.1)$$

Пусть $\xi_2 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta \leq 2\pi$ — лапласовская область, a — меньшая полуось эллипса-границы $\xi = \xi_0$, $\beta = (b/a)^2$. Метрика в (3.1) определяется выражениями

$$g_{11} = g_{22} = \sqrt{g} = a^2 (\beta - 1) (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta), \quad g_{33} = 1 \quad (3.2)$$

Тогда $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\alpha_k = \beta_k = 0$ при $k > 0$ и

$$\gamma_0 = \gamma_0(\eta) = a^2 (\beta - 1) (\operatorname{sh}^2 \xi_0 + \sin^2 \eta)$$

$$\gamma_{2k-1} = a^2 (\beta - 1) \operatorname{sh} 2\xi_0 \frac{2^{2k-2}}{(2k-1)!} = \text{const}, \quad \gamma_{2k} = a^2 (\beta - 1) \operatorname{ch} 2\xi_0 \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} = \text{const}$$

Рекуррентные соотношения (1.5) принимают вид

$$s(s+1) \Phi_{s+1} + (\Phi_{s-1})_{\eta''} + \sum_{k=0}^{s-1} \gamma_k (\Phi_{s-k-1})_{z''} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

Учитывая, что $\operatorname{th}^2 \xi_0 = 1/\beta$, приходим к окончательным формулам для γ_k

$$\gamma_0 = a^2 H(\eta) = \frac{1}{2} a^2 [(\beta + 1) - (\beta - 1) \cos 2\eta]$$

$$\gamma_{2k-1} = a^2 \sqrt{\beta} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \gamma_{2k} = a^2 (\beta + 1) \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \quad (3.4)$$

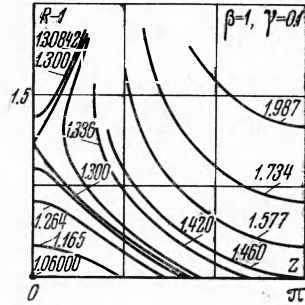
В дальнейшем будем считать, что потенциал на границе пучка состоит из суммы функций $P(\eta)$ и $W(z)$, а нормальная производная зависит только от η .

3.1. Коэффициенты разложения в общем случае. Применяя рекуррентные соотношения (3.3) и ограничиваясь первыми двенадцатью членами разложения, получим

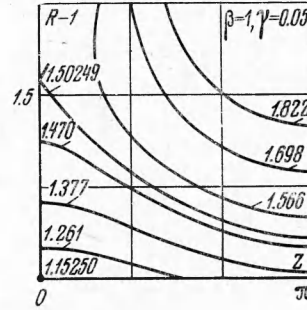
$$\begin{aligned} \Phi_0 &= P(\eta) + W(z), & \Phi_1 &= \varepsilon(\eta) \\ \Phi_2 &= -\frac{1}{2!} P'' - \frac{1}{2!} a^2 H(\eta) W'', & \Phi_3 &= -\frac{1}{3!} \varepsilon'' - \frac{1}{3} abW'' \\ \Phi_4 &= \frac{1}{4!} P^{IV} + \frac{1}{4!} a^4 H^2(\eta) W^{IV} - \frac{1}{6} a^2 H(\eta) W'' \\ \Phi_5 &= \frac{1}{5!} \varepsilon^{IV} + \frac{1}{15} a^3 b H(\eta) W^{IV} - \frac{1}{15} abW'' \\ \Phi_6 &= -\frac{1}{6!} P^{VI} - \frac{1}{6!} a^6 H^3(\eta) W^{VI} + \frac{1}{36} a^4 \left[H^2(\eta) + \frac{6}{5} \beta \right] W^{IV} - \frac{1}{45} a^2 H(\eta) W'' \\ \Phi_7 &= -\frac{1}{7!} \varepsilon^{VI} - \frac{1}{280} a^5 b H^2(\eta) W^{VI} + \frac{2}{63} a^3 b \left[H(\eta) + \frac{3}{20} (\beta + 1) \right] W^{IV} - \frac{2}{315} abW'' \\ \Phi_8 &= \frac{1}{8!} P^{VIII} + \frac{1}{8!} a^8 H^4(\eta) W^{VIII} - \frac{1}{720} a^6 H(\eta) \left[H^2(\eta) + \frac{18}{7} \beta \right] W^{VI} + \\ &\quad + \frac{1}{120} a^4 \left[H^2(\eta) + \frac{12}{7} \beta \right] W^{IV} - \frac{1}{630} a^2 H(\eta) W'' \\ \Phi_9 &= \frac{1}{9!} \varepsilon^{VIII} + \frac{1}{11340} a^7 b H^3(\eta) W^{VIII} - \frac{1}{360} a^5 b \left[H^2(\eta) + \frac{\beta+1}{7} H(\eta) + \frac{10}{21} \beta \right] W^{VI} + \\ &\quad + \frac{1}{135} a^3 b \left[H(\eta) + \frac{3}{14} (\beta + 1) \right] W^{IV} - \frac{1}{2835} abW'' \\ \Phi_{10} &= -\frac{1}{10!} P^X - \frac{1}{10!} a^{10} H^5(\eta) W^X + \frac{1}{30240} a^8 H^2(\eta) [H^2(\eta) + 4\beta] W^{VIII} - \\ &\quad - \frac{7}{10800} a^6 \left[H^3(\eta) - \frac{180}{49} \beta H(\eta) + \frac{30}{7} \beta (\beta + 1) \right] W^{VI} + \frac{17}{11340} a^4 \left[H^2(\eta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{162}{85} \beta \right] W^{IV} - \frac{1}{14175} a^2 H(\eta) W'' \\ \Phi_{11} &= -\frac{1}{11!} \varepsilon^X - \frac{1}{798336} a^9 b H^4(\eta) W^X + \frac{1}{10395} a^7 b H(\eta) \left[H^2(\eta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta+1}{8} H(\eta) + \beta \right] W^{VIII} - \frac{1}{110} a^5 b \left[\frac{7}{60} H^2(\eta) + \frac{\beta+1}{42} H(\eta) + \frac{1}{252} (\beta^2 + \right. \\ &\quad \left. + 26\beta + 1) \right] W^{VI} + \frac{1}{110} a^3 b \left[\frac{68}{567} H(\eta) + \frac{\beta+1}{35} \right] W^{IV} - \frac{2}{155925} abW'' \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты разложения потенциала для цилиндрического пучка получаются из (3.5) при $a = b = \beta = H = 1$. В дальнейшем в качестве характерного размера в плоскости ξ, η выберем меньшую полуось эллипса-границы; для этого положим $a = 1$ в формулах (3.5).

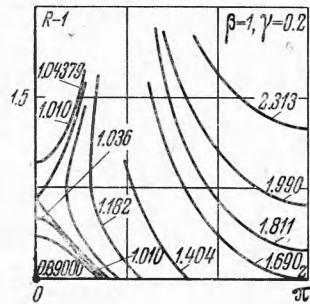
3.2. Пучок с периодической вариацией z -компоненты скорости. Определим формирующие электроды для течения с периодическим изменением z -компоненты скорости, которое было исследовано в [9]. Частицы при этом движутся по поверхности эллип-



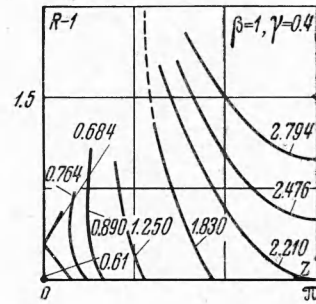
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

тических цилиндров $\xi = \text{const}$ в однородном магнитном поле $H = H_z$. Условия на границе пучка определяются формулами

$$\varphi_0 = \frac{\alpha}{2} \frac{\beta + 1}{\beta} - \frac{\alpha}{2} \frac{\beta - 1}{\beta} \cos 2\eta + W(z), \quad \alpha = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \left(\frac{a}{d} \right)^2, \quad \beta = \frac{\omega_L + \Omega}{\omega_L - \Omega} \quad (3.6)$$

$$\varphi_1 = \frac{\alpha(\beta^2 + 1)}{\beta^{3/2}} \left(1 - \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 + 1} \cos 2\eta \right), \quad d = \frac{\sqrt{2} \pi e J_0}{m \omega^3}, \quad \omega^2 = \omega_L^2 + \Omega^2$$

Здесь e/m — удельный заряд частицы, J_0 — плотность тока в z -направлении, ω_L — ларморовская частота, $\Omega = \text{const}$, причем $\omega_L > \Omega$. Формулы (3.6) записаны в безразмерных переменных (символ безразмерной величины опущен), которые будут приняты для дальнейшего рассмотрения

$$x^0 = \frac{x}{a}, \quad y^0 = \frac{y}{a}, \quad z^0 = \frac{z}{d}, \quad \varphi^0 = -\frac{e\varphi}{m\omega^2 d^2} \quad (3.7)$$

Функция $W = W(z)$ задается параметрически

$$W = (1 - \gamma \cos t)^2, \quad z = t - \gamma \sin t \quad (3.8)$$

Часть членов ряда для φ , содержащих $P(\eta)$, $\varepsilon(\eta)$ и их производные, удается просуммировать. В результате получаем

$$\varphi = \alpha \left[\frac{\beta + 1}{2\beta} + \frac{\beta^2 + 1}{\beta^{3/2}} \Xi - \frac{\beta - 1}{2\beta} \cos 2\eta \left(\text{ch } 2\Xi + \frac{\beta + 1}{\beta^{1/2}} \text{sh } 2\Xi \right) \right] +$$

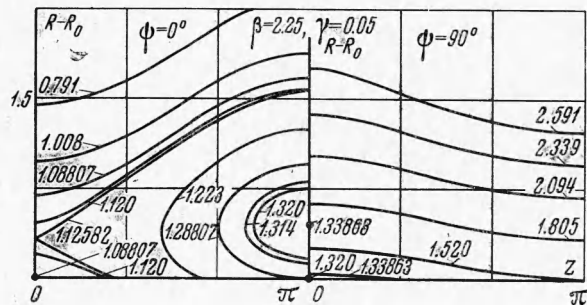
$$\begin{aligned}
& + W + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} H^k W^{(2k)} \Xi^{2k} - \frac{1}{3} \sqrt{\beta} W'' \Xi^3 - \frac{1}{6} H W'' \Xi^4 + \\
& + \frac{1}{15} \sqrt{\beta} (H W^{IV} - W'') \Xi^5 + \left[\frac{1}{36} \left(H^2 + \frac{6}{5} \beta \right) W^{IV} - \frac{1}{45} H W'' \right] \Xi^6 + \\
& + \sqrt{\beta} \left\{ -\frac{1}{280} H^2 W^{VI} + \frac{2}{63} \left[H + \frac{3}{20} (\beta + 1) \right] W^{IV} - \frac{2}{315} W'' \right\} \Xi^7 + \\
& + \left[-\frac{1}{720} H \left(H^2 + \frac{18}{7} \beta \right) W^{VI} + \frac{1}{120} \left(H^2 + \frac{12}{7} \beta \right) W^{IV} - \frac{1}{630} H W'' \right] \Xi^8 + \\
& + \sqrt{\beta} \left\{ \frac{1}{11340} H^3 W^{VIII} - \frac{1}{360} \left(H^2 + \frac{\beta+1}{7} H + \frac{10}{24} \beta \right) W^{VI} + \frac{1}{135} \left[H + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{14} (\beta + 1) \right] W^{IV} - \frac{1}{2835} W'' \right\} \Xi^9 + \left\{ \frac{1}{30240} H^2 (H^2 + 4\beta) W^{VIII} - \right. \\
& \left. - \frac{7}{10800} \left[H^3 - \frac{180}{49} \beta H + \frac{30}{7} \beta (\beta + 1) \right] W^{VI} + \frac{17}{11340} \left(H^2 + \frac{162}{85} \beta \right) W^{IV} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{14175} H W'' \right\} \Xi^{10} + \sqrt{\beta} \left\{ -\frac{1}{798336} H^4 W^{X} + \frac{1}{10395} H \left(H^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\beta+1}{8} H + \beta \right) W^{VIII} - \frac{1}{110} \left[\frac{7}{60} H^2 + \frac{\beta+1}{42} H + \frac{1}{252} (\beta^2 + 26\beta + 1) \right] W^{VI} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{110} \left(\frac{68}{567} H + \frac{\beta+1}{35} \right) W^{IV} - \frac{2}{155925} W'' \right\} \Xi^{11} + \dots = \Psi + W + \Sigma + Q, \\
& \Xi = \xi - \xi_0
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Конечное выражение в квадратных скобках, с которого начинается формула (3.9), является гармонической функцией и определяет фокусирующие электроды, поддерживающие эллиптический пучок [9] ($W = 0$). Обозначим его через Ψ . На фиг. 1—10 представлены результаты расчета эквипотенциальных поверхностей для ряда значений β и $\gamma < 1$, когда изменение z -компоненты скорости описывается укороченной циклоидой. При этом $d/a = \sqrt{2}$, $0 \leq z \leq \pi$, картина симметрична относительно $z = 0$ и $z = \pi$. Фиг. 1—4 соответствуют цилиндрическим пучкам. Напомним, что величина γ определяет область изменения потенциала на границе при движении вдоль оси z . Критерием точности являлась величина модуля невязки $N(\xi, \eta, z; n) = \Delta\phi(\xi, \eta, z; n)$. В каждой точке число членов ряда (3.9) в пределах $n = 0, \dots, 11$

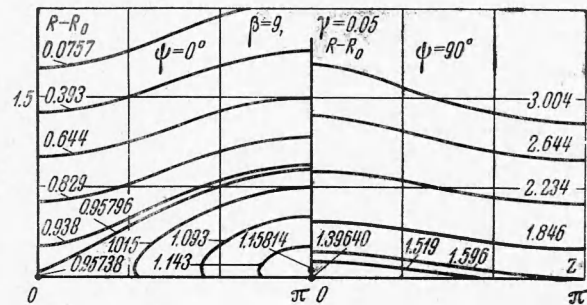
$$\Phi(n) = \sum_{k=0}^n \Phi_k \Xi^k$$

$$\Phi_0 = \Psi + W, \quad \Phi_1 = 0 \quad (3.10)$$

автоматически выбиралось таким образом, чтобы невязка была минимальной. Наибольшее удаление от границы пучка определялось требованием $|N| = 0.2$. Функция $n(R; z)$ для $\beta = 1$, $\gamma = 0.4$ приведена в табл. 1. Здесь $l = R_f / \Delta R$ — число шагов, отсчитываемое от $R = 1$, вплоть до которого следует пользоваться $n(R_f / \Delta R)$ членами разложения. Так, для $t = 20^\circ$ при $l = 1$ имеем $n = 8$, при $l = 2, \dots, 10$ надо брать одиннадцать, а при $l = 11, \dots$



Фиг. 5



Фиг. 6

Таблица 2

 $\beta = 1, \gamma = 0.4$

$ N(n) $	$\varphi(n)$	$ N(n) $	$\varphi(n)$
$t = 0, R = 1.15$		$t = 180^\circ, R = 1.6$	
1.76	0.679880970	1.46	2.44500181
0.510	0.666858704	0.950	2.50811707
0.144	0.665645360	0.432	2.52789334
$0.354 \cdot 10^{-1}$	0.665462433	0.159	2.53296422
$0.869 \cdot 10^{-2}$	0.665435748	$0.516 \cdot 10^{-1}$	2.53415636
$0.213 \cdot 10^{-2}$	0.665431355	$0.146 \cdot 10^{-1}$	2.53442748
$0.536 \cdot 10^{-3}$	0.665430592	$0.340 \cdot 10^{-2}$	2.53448583
$0.137 \cdot 10^{-3}$	0.665430448	$0.580 \cdot 10^{-3}$	2.53449690
$0.354 \cdot 10^{-4}$	0.665430420	$0.411 \cdot 10^{-4}$	2.53449856
$0.980 \cdot 10^{-5}$	0.665430414	$0.143 \cdot 10^{-4}$	2.53449869
$0.336 \cdot 10^{-5}$	0.665430413	$0.589 \cdot 10^{-5}$	2.53449868
$t = 100^\circ, R = 1.6$		$t = 180^\circ, R = 1.9$	
0.332	1.62874487	2.06	2.53092694
0.421	1.64309211	1.65	2.64863449
0.367	1.64758761	0.979	2.69900185
0.235	1.65021314	0.482	2.71663879
0.108	1.65159170	0.207	2.72230122
$0.353 \cdot 10^{-1}$	1.65211406	$0.771 \cdot 10^{-1}$	2.72405981
$0.640 \cdot 10^{-2}$	1.65225890	$0.236 \cdot 10^{-1}$	2.72457672
$0.114 \cdot 10^{-2}$	0.65228643	$0.514 \cdot 10^{-2}$	2.72471065
$0.163 \cdot 10^{-2}$	1.65228767	$0.359 \cdot 10^{-3}$	2.72473796
$0.792 \cdot 10^{-3}$	1.65228576	$0.291 \cdot 10^{-3}$	2.72474109
$0.193 \cdot 10^{-3}$	1.65228467	$0.130 \cdot 10^{-3}$	2.72474062

Таблица 3

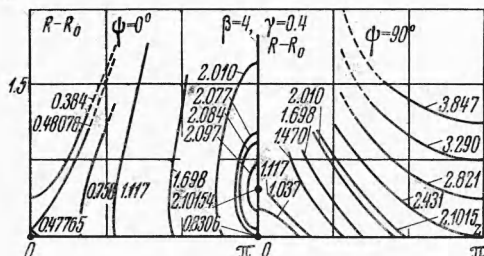
$ N(n) $	$\varphi(n)$	$ N(n) $	$\varphi(n)$
$\beta = 1, \alpha = 0.2$			
$Z = 0, R = 1.2$		$Z = 1.602, R = 2$	
1.43	0.200000000	1.62	1.20000000
0.496	0.183482339	1.05	1.10253520
0.141	0.181474656	0.409	1.05749690
$0.388 \cdot 10^{-1}$	0.181177953	$0.488 \cdot 10^{-1}$	1.04357033
$0.120 \cdot 10^{-1}$	0.181131443	$0.449 \cdot 10^{-1}$	1.04110855
$0.399 \cdot 10^{-2}$	0.181121960	$0.285 \cdot 10^{-1}$	1.04123565
$0.139 \cdot 10^{-2}$	0.181119768	$0.228 \cdot 10^{-2}$	1.04148818
$0.494 \cdot 10^{-3}$	0.181119197	$0.785 \cdot 10^{-2}$	1.04156454
$0.178 \cdot 10^{-3}$	0.181119041	$0.691 \cdot 10^{-2}$	1.04155977
$0.650 \cdot 10^{-4}$	0.181118996	$0.305 \cdot 10^{-2}$	1.04154283
$0.239 \cdot 10^{-4}$	0.181118983	$0.242 \cdot 10^{-3}$	1.04153294

 $\beta = 25, \psi = 0, \alpha = 0.2$

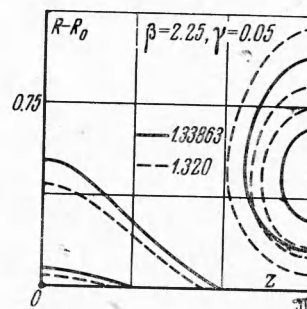
$Z = 0, R = 5.2$		$Z = 1.602, R = 5.6$	
3.02	0.200000000	2.99	1.20000000
1.60	0.189400000	1.48	1.17843383
0.186	0.184239388	$0.795 \cdot 10^{-1}$	1.15499479
0.113	0.184117198	$0.273 \cdot 10^{-1}$	1.15431293
$0.431 \cdot 10^{-1}$	0.184040478	$0.684 \cdot 10^{-1}$	1.15402944
$0.142 \cdot 10^{-1}$	0.184018797	$0.178 \cdot 10^{-1}$	1.15419896
$0.600 \cdot 10^{-2}$	0.184014476	$0.126 \cdot 10^{-2}$	1.15424456
$0.264 \cdot 10^{-2}$	0.184013115	$0.310 \cdot 10^{-2}$	1.15424824
$0.104 \cdot 10^{-2}$	0.184012612	$0.177 \cdot 10^{-2}$	1.15424633
$0.111 \cdot 10^{-2}$	0.184012074	$0.576 \cdot 10^{-2}$	1.15423750
$0.136 \cdot 10^{-2}$	0.184012023	$0.619 \cdot 10^{-2}$	1.15423710

верхняя — ветвь не изображена на фигуре); R_0 меняется в соответствии с формулой (3.12).

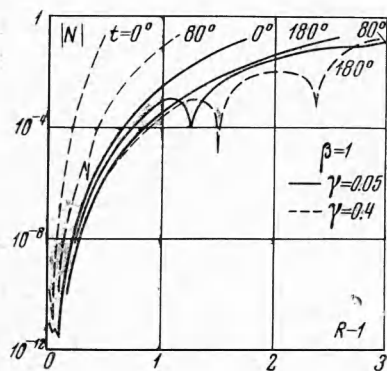
Фиг. 11 дает представление о характере изменения невязки для $\beta = 1$, $\gamma = 0.05$ и $\gamma = 0.4$, $t = 0, 80$ и 180° ; при этом для $|N|$ использован логарифмический масштаб.



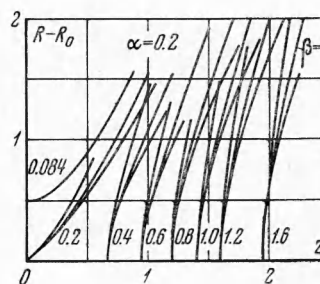
Фиг. 9



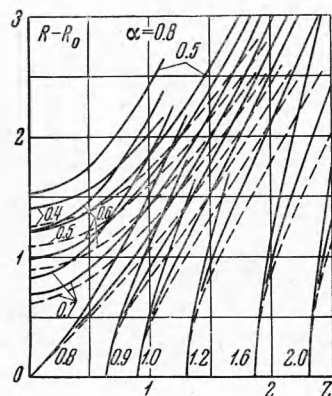
Фиг. 10



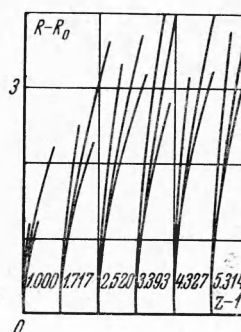
Фиг. 11



Фиг. 12



Фиг. 13



Фиг. 14

Заметим, что течение с периодической вариацией v_z не может быть реализовано при помощи двухэлектродной системы, по крайней мере, с потенциалами, указанными на фигурах. Такой же особенностью, впрочем, обладает и кольцевой пучок [*] на участке ускорения $0 \leq \psi \leq 60^\circ$.

3.3. *Случай немонотонного изменения потенциала при течении между параллельными плоскостями.* В принятых в [10] безразмерных переменных условия Коши на границе пучка запишутся следующим образом:

$$Z = z - \sigma = \mp (\varphi_0^{1/2} + 2\alpha^{1/2}) \sqrt{\varphi_0^{1/2} - \alpha^{1/2}}, \quad \sigma = (1 + 2\alpha^{1/2}) \sqrt{1 - \alpha^{1/2}}, \quad \varphi_1 = 0 \quad (3.13)$$

Зависимость $\varphi_0 = \varphi_0(z)$ задается неявно; $\alpha = \varphi_0(\sigma)$ — минимальное значение потенциала $\alpha \leq \varphi_0$. Решение определяется формулами (3.5) без каких-либо изменений. Вышние производные находились дифференцированием уравнения для φ_0 с использованием его первого интеграла

$$\varphi_0'' = 4/9 \varphi_0^{-1/2}, \quad \varphi_0'^2 = 16/9 (\varphi_0^{1/2} - \alpha^{1/2})$$

Потенциал вычислялся так же, как и в предыдущем случае. Результаты приведены на фиг. 12, 13. В каждой связке из трех кривых, которым приписано некоторое значение потенциала, средняя соответствует значению $\beta = 1$ (цилиндрический пучок), две другие — $\beta = 25$. При этом кривая с большим наклоном отвечает сечению $\psi = 0$, а с меньшим — $\psi = 90^\circ$. Последние на фиг. 13 изображены пунктиром. Представленные результаты могут быть использованы для построения периодических фокусирующих систем для пучков с круглым и эллиптическим поперечными сечениями.

В табл. 3 приведены значения $\varphi(n)$ и $|N(n)|$ при $\alpha = 0.2$ и разных R, z . Заметим, что уменьшение значения параметра α затрудняет сходимость рядов.

3.4. *Ускоряющие электроды при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом.* На границе пучка $\xi = \xi_0$ имеем

$$\varphi_0 = z^{4/3}, \quad \varphi_1 = 0 \quad (3.14)$$

Часть членов в разложении (3.5) удастся просуммировать. В результате получаем

$$\varphi = (z^2 + H\xi^2)^{2/3} \cos 4/3 \arctg[(\sqrt{H\xi})/z] + Q$$

где Q — полином в (3.9).

Результаты расчета ускоряющих электродов приведены на фиг. 14. Как и на двух предыдущих фигурах, здесь представлены эквипотенциальные кривые, соответствующие цилиндрическому ($\beta=1$) и эллиптическому пучкам ($\beta=25$, $\psi=0$ и $\psi=90^\circ$), причем случаю $\beta=25$, $\psi=0$ отвечают кривые с наибольшим наклоном.

Поступила 4 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. R a d l e y D. E. The Theory of the Pierce Type Electron Gun. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 2.
2. L o m a x R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space-Charge Beam. J. Electr. Contr., 1957, vol. 3, No. 4.
3. L o m a x R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space-Charge Beam. J. Electr. Contr., 1959, vol. 7, No. 6.
4. K i r s t e i n P. T. On the Determination of the Electrodes Required to Produce a Given Electric Field Distribution Along a Prescribed Curve. Proc. IRE, 1958, vol. 46, No. 10.
5. H a r k e r K. J. Solution of Cauchy Problem for Laplace's Equation in Axially Symmetric Systems. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, No. 7.
6. P i e r c e J. R. Rectilinear Electron Flow in Beams. J. Appl. Phys., 1940, vol. 11, No. 8.
7. D a y k i n P. N. Electrode Shapes for Cylindrical Electron Beam. Brit. J. Appl. Phys., 1955, vol. 6, No. 7.
8. M e l t z e r B. Single-Component Stationary Electron Flow Under Space Charge Conditions. J. Electr., 1956, vol. 2, No. 2.
9. K e n t G. Generalized Brillouin Flow. Commun. and Electronics, 1960, vol. 79, No. 48.
10. С ы р о в о й В. А. Периодическая электростатическая фокусировка ленточного пучка. ПМТФ, 1965, № 4.