ПМТФ, № 5, 1974

УДК 534.113

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ И СТРУН ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В. М. Смотров, В. М. Чернышев

(*Волгоград*)

Формулируется обратная задача для продольных, крутильных и поперечных колебаний стержней и поперечных колебаний струн переменной массы. Показано, что при некоторых предположениях относительно плотностей присоединяющихся и отделяющихся частиц задача сводится к интегрированию независимых дифференциальных уравнений в частных производных и системы независимых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

§ 1. Присоединяющиеся и отделяющиеся частицы могут быть трех типов. К первому типу относятся частицы, присоединяющиеся и отделяющиеся в каждой точке поверхности стержня или струны и образующие с ними единую сплошную среду. Ко второму типу относятся присоединяющиеся и отделяющиеся в каждой точке поверхности упругого тела частицы, которые связаны со стержнем (струной), взаимодействуют с ним и не взаимодействуют между собой. Частицы третьего типа присоединяются и отделяются в некоторых дискретных точках стержня или струны.

Присоединение и отделение частиц не влияет на признаки упругого тела, по которым его характеризуют как стержень или струну. Ось стержня не меняет своего положения относительно стержня. В момент присоединения и отделения частицы движутся параллельно смещениям точек стержня (струны). Ось x направлена вдоль оси недеформированного стержня (струны) от левого его конца к правому. Длина стержня (струны) l, поперечные смещения их точек $z(x, t)$.

Стержень разбивается на участки точками $M_i(x_i)$ ($x_i < x_{i+1}$; $x_1 = 0$; $x_n = l$; $i = 1, 2, \ldots, n$), в которых находятся частицы третьего типа. Если в концевых точках $M_1(0)$ и $M_n(l)$ таких частиц нет, будем считать, что они есть, но имеют нулевую массу.

Для частиц первого типа введены обозначения: $\rho_1^\circ(x)$ — начальная линейная плотность в точке $M(x)$; $\rho_1^k(x, t)$ и $v_{1a}^k(x, t)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) — линейные плотности и абсолютные скорости присоединяющихся и отделяющихся частиц в момент t. Верхний индекс 1 указывает на присоединение частиц и их движение в сторону возрастания z. Индекс 2 также соответствует присоединению частиц, но их движение происходит в сторону убывания z. Индекс 3 указывает на отделение частиц и их движение в положительном направлении z. Верхний индекс 4 означает, что частицы отделяются и движутся в сторону убывания z. При этом

$$\rho_1^k(x, 0) = 0, \frac{\partial \rho_1^1}{\partial t} \geqslant 0, \quad \frac{\partial \rho_1^2}{\partial t} \geqslant 0, \quad \frac{\partial \rho_1^3}{\partial t} \leqslant 0, \ \frac{\partial \rho_1^4}{\partial t} \leqslant 0,$$

$$\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_1^1 + \rho_1^2 + \rho_1^3 + \rho_1^4$$

$$R_{1r} = \sum_{k=1}^{4} (\partial \rho_1^k / \partial t)\, v_{1r}^k$$

где R_{1r} — интенсивность реактивных сил от присоединяющихся и отделяющихся частиц в их относительном движении; $v_{1r} = v_{1a}{}^k - \partial z/\partial t$ — относительные скорости частиц.

Эти обозначения, кроме нижнего индекса, сохраняются для соответствующих величин частиц остальных типов. Нижним индексом у величин второго типа будет 2, а у частиц третьего типа — M_i. В выражениях величин частиц третьего типа частные производные следует заменить на обычные. Для частиц первого и второго типов плотность масс и интенсивность реактивных сил есть масса и сила, отнесенные к единице длины. У частиц третьего типа — это масса и сила, сосредоточенные в точке. В дальнейшем удобно рассматривать плотность масс и интенсивность силы для частиц третьего типа как линейные. Тогда плотность масс и интенсивность реактивных сил будет иметь вид

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \sum_{i=1}^{n} \rho_{M_i} \sigma_1 (x - x_i), \tag{1.1}$$

$$R_r = R_{1r} + R_{2r} + \sum_{i=1}^{n} R_{M_i r} \sigma_1 (x - x_i)$$

где σ_1 — импульсивная функция первого порядка.

Обратную задачу колебаний упругих тел переменной массы сформулируем по аналогии с механикой дискретных систем переменной массы [1]: по заданной внешней нагрузке $Q(x, t)$ и закону колебаний $z(x, t)$ найти плотность тела в любой момент времени в каждой его точке. Абсолютные или относительные скорости присоединяющихся и отделяющихся частиц являются заданными функциями координат и времени. Известны также ρ_1°, ρ_2°, $\rho_{M_i}^\circ$. В дальнейшем постановка обратной задачи будет уточнена введением дополнительных условий.

Для граничных точек постановка обратной задачи такова. Если неизвестны реакции внешней среды на концевые точки, то массы ρ_{M_1} и ρ_{M_n} суть заданные величины. В этом случае надо определить неизвестные реакции, действующие на концы тела. Если реакции известны, то определению подлежат массы концевых точек.

Между линейной плотностью и перемещениями точек стержня существует связь, выражаемая дифференциальным уравнением колебаний стержня переменной массы [2]. В это дифференциальное уравнение входят $\rho_1{}^k$, $\rho_2{}^k$, $\rho_{M_i}{}^k$ и их производные по времени. Поэтому сначала надо определить эти величины, а затем плотность тела. Дифференциального уравнения колебаний недостаточно для нахождения $\rho_1{}^k$, $\rho_2{}^k$, $\rho_{M_i}{}^k$. Надо знать еще дополнительные условия, связывающие эти величины. Они могут быть разнообразными. Ограничимся случаем, когда эти условия даны в виде алгебраических соотношений между $\rho_1{}^k$, $\rho_2{}^k$, $\rho_{M_i}{}^k$, т. е. плотности присоединяющихся и отделяющихся частиц связаны соотношениями

$$f_\alpha (\rho_1{}^1, \rho_1{}^2, \ldots, \rho_2{}^4, x, t) = 0, \qquad f_{i\beta} (\rho_{M_i}{}^1, \ldots, \rho_{M_i}{}^4, t) = 0 \tag{1.2}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, 7; \ \beta = 1, 2, 3; \ i = 1, 2, \ldots, n$$

К этим условиям добавим равенства

$$f_8 (\rho_1{}^1, \rho_1{}^2, \ldots, \rho_2{}^4, x, t) = \mu, \qquad f_{i4} (\rho_{M_i}{}^1, \ldots, \rho_{M_i}{}^4, t) = m_i \tag{1.3}$$

Соотношения (1.2) и (1.3) таковы, что после разрешения их относительно ρ_1^k, ρ_2^k, $\rho_{M_i}^k$ получим непрерывные вместе со своими производными по μ и t функции

$$(1.4)\qquad \rho_1^k = \varphi_1^k(\mu, x, t), \quad \rho_2^k = \varphi_2^k(\mu, x, t), \quad \rho_{M_i}^k = \varphi_{M_i}^k(m_i, t)$$

$$\varphi_1 = \varphi_1^\circ + \sum_{k=1}^{4} \varphi_1^k, \quad \varphi_2 = \rho_2^\circ + \sum_{k=1}^{4} \varphi_2^k, \quad \varphi_{M_i} = \rho_{M_i}^\circ + \sum_{k=1}^{4} \varphi_{M_i}^k$$

$$k = 1, 2, 3, 4; \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

После дифференцирования φ_1^k, φ_2^k, $\varphi_{M_i}^k$ по t и подстановки их в выражение для интенсивности реактивных сил имеем

$$(1.5)\qquad R_r = a\frac{\partial\mu}{\partial t} + g + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\frac{dm_i}{dt} + g_i\right)\sigma_1(x - x_i)$$

$$(1.6)\qquad a = \sum_{k=1}^{4}\left(v_{1r}^k\frac{\partial\varphi_1^k}{\partial\mu} + v_{2r}^k\frac{\partial\varphi_2^k}{\partial\mu}\right), \quad g = \sum_{k=1}^{4}\left(v_{1r}^k\frac{\partial\varphi_1^k}{\partial t} + v_{2r}^k\frac{\partial\varphi_2^k}{\partial t}\right)$$

$$a_i = \sum_{k=1}^{4} v_{M_i r}^k\frac{\partial\varphi_{M_i}^k}{\partial m_i}, \quad g_i = \sum_{k=1}^{4} v_{M_i r}^k\frac{\partial\varphi_{M_i}^k}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

2. Уравнение продольных колебаний стержня переменной массы запишем в виде

$$(2.1)\qquad (\rho_1 + \rho_2)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n}\rho_{M_i}\frac{d^2 z(x_i, t)}{dt^2}\sigma_1(x - x_i) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

$$= R_{1r} + R_{2r} + \sum_{i=1}^{n} R_{M_i r}\sigma_1(x - x_i) + Q$$

где $\varkappa$ — жесткость стержня при продольных колебаниях.

При крутильных колебаниях стержня в (2.1) следует заменить величины, соответствующие поступательному движению, аналогичными величинами во вращательном движении. Физические соображения позволяют заключить, что при продольных и крутильных колебаниях стержня $\varkappa$ может быть функцией ρ_1, x, t. С учетом равенств (1.4) жесткость стержня $\varkappa = \psi(\mu, x, t)$.

Предполагается, что все функции, входящие в уравнение (2.1), непрерывны по t, за исключением $\varkappa(\partial z / \partial x)$. Все они непрерывны по x. Функция $\varkappa(\partial z/\partial x)$ в точках M_i имеет разрывы первого рода, а в остальных точках непрерывна. Если бы в точках M_i $\varkappa(\partial t/\partial x)$ была бы непрерывной, то колебания стержня не влияли бы на движение массы ρ_{M_i}. Проинтегрируем уравнение (2.1) по x в пределах от $x_i - \varepsilon$ до $x_i + \varepsilon$, а затем устремим ε к нулю. Получим дифференциальное уравнение колебаний массы ρ_{M_i}.

$$(2.2)\qquad \rho_{M_i}\frac{d^2 z(x_i, t)}{dt^2} = \omega_i + R_{M_i r} + F_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

где $\omega_i = [\psi(\partial z / \partial x)]_{x_i+0} - [\psi(\partial z / \partial x)]_{x_i-0}$ — скачок $\varkappa(\partial z/\partial x)$ в точке M_i; ω_i учитывает влияние стержня на движение массы ρ_{M_i}; для левого конца $\omega_1 = (\psi\, \partial z / \partial x)_{x=0}$, для правого $\omega_n = -(\psi\, \partial z / \partial x)_{x=l}$, поскольку жесткость вне стержня равна нулю, F_i — сосредоточенная внешняя сила, приложенная к массе ρ_{M_i}.

Заменяя в (2.2) ρ_{M_i} и $R_{M_i r}$ выражениями из (1.4) и (1.6), приходим к системе из n независимых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для определения m_i

$$a_i \frac{dm_i}{dt} = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

В этих формулах

$$c_i = \varphi_{M_i} \frac{d^2 z\,(x_i,\ t)}{dt^2} - \omega_i - \sum_{k=1}^{4} v^k_{M_i r} \frac{\partial \varphi^k_{M_i}}{\partial t} - F_i$$

Для каждого из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ справедливо уравнение с частными производными для определения μ, получаемое из уравнения (2.1)

$$a \frac{\partial \mu}{\partial t} + b \frac{\partial \mu}{\partial x} = c \tag{2.4}$$

$$b = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \qquad c = (\varphi_1 + \varphi_2) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \dot{\psi} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{4} \left(v_{1r}{}^k \frac{\partial \varphi_1{}^k}{\partial t} + v_{2r}{}^k \frac{\partial \varphi_2{}^k}{\partial t} \right) - Q$$

Это уравнение представляет собой квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка. Теория и методы решения таких уравнений известны [3]. В дальнейшем предполагается, что коэффициенты a, b, c удовлетворяют требованиям, при которых для всех $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, $0 \leqslant t \leqslant T_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ решение существует и единственно. Необходимо задать начальное и граничное условия. Начальное условие получается из (1.3) при $t = 0$. Для задания граничного условия необходимо знать $\mu = f_8$ из (1.3) как функцию от t на одном из концов отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Если f_8 известна для левого конца отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, то это надо понимать как значение μ в точке x_i справа. Если же f_8 известна для правого конца отрезка, то значение μ задано в точке x_{i+1} слева. Граничное условие задается так (на том из концов отрезка $[x_i, x_{i+1}]$), чтобы характеристики уравнения (2.4) в плоскости переменных x и t не пересекались между собой и имели бы не более одной общей точки с линией, на которой заданы начальное и граничное условия.

Задание f_8 как функции времени на одном из концов отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ является дополнением, которое нужно внести в формулировку обратной задачи.

Последовательность решения обратной задачи такова. Из уравнения (2.4) следует найти μ, затем из (1.4) определить ρ_1 и ρ_2 и выразить $\varkappa$ через x и t. После этого решаются уравнения (2.3) относительно m_i и из (1.4) находятся ρ_{M_i}. По формуле (1.1) определяется линейная плотность. В случае, когда требуется найти реакцию, действующую на какой-либо из концов, следует использовать соответствующее уравнение (2.3). Это уравнение будет алгебраическим относительно неизвестной реакции.

Уравнения (2.3) и (2.4) могут быть алгебраическими, если a_i, a, b тождественно равны нулю. Это может, например, иметь место, если относительные скорости присоединяющихся и отделяющихся частиц равны нулю, а ψ не зависит явно от μ. В случае, когда тождественно равен нулю только один из коэффициентов a и b, уравнение (2.4) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, считая параметром ту переменную, частная производная по которой не входит в уравнение. Если $a \equiv 0$, то лишним будет начальное условие, если $b \equiv 0$, то не нужно граничное условие.

Рассмотрим пример. Стержень, у которого конец $x = 0$ закреплен, а конец $x = l$ свободен, совершает свободные продольные колебания по закону $z = u \sin t$, где $u = \varepsilon x$ для $0 \leqslant x \leqslant l / 2$ и $u = \varepsilon (l - x)$ для $l / 2 \leqslant x \leqslant l$ (ε — малая положительная постоянная). Происходит присоединение частиц первого типа. При этом $\rho_1^\circ = \text{const}$, $\rho_1^1 = \rho_1^2$, $\rho_2^3 = \rho_1^4 = 0$, $\varkappa = 2\varepsilon^{-2} \rho_1$. Для $x = l/2$ жесткость меняется по закону $\varkappa = 2\varepsilon^{-2}\rho_1^\circ \exp [^1/_2 (\varepsilon l + 2t) t]$. Относительные скорости присоединяющихся частиц таковы, что $^1/_2 (v_{1r}^1 + v_{1r}^2) = -\sin t$.

С серединой стержня и его свободным концом скреплены переменные массы ρ_{M_2} и ρ_{M_3}. Относительные скорости присоединяющихся и отделяющихся частиц для массы ρ_{M_2} равны нулю. От массы ρ_{M_3} отделяются частицы, так что $\rho_{M_3}^1 = \rho_{M_3}^2 = 0$, $\rho_{M_3}^3 = \rho_{M_4}^4$, $^1/_2 (v_{M_3r}^3 + v_{M_3r}^4) = -\varepsilon^{-1} \sin t$.

Полагая $\rho_1 = \mu$, запишем уравнение (2.4)

$$-\frac{\partial \mu}{\partial t} + 2\frac{\partial \mu}{\partial u} + \mu u = 0$$

Решая его, найдем $\rho_1 = \rho_1^\circ \exp [(u + t) t]$. Из первого уравнения системы (2.3), которое является алгебраическим, определяем реакцию закрепления левого конца стержня $F_r = -2\varepsilon^{-1}\rho_1^\circ \sin t \exp t^2$.

Уравнение для определения массы ρ_M является также алгебраическим. Приравнивая c_2 нулю, получим $\rho_{M_2} = 4\varepsilon^{-2} l^{-1} \rho_1^\circ \exp [^1/_2 (\varepsilon l + 2t) t]$.

Третье уравнение системы (2.3) дифференциальное. Полагая в нем $m_3 = \rho_{M_3}$, получим

$$\rho_{M_3} = \overset{\circ}{\rho}_{M_3} - 2\rho_1^\circ \int_0^t \exp(\xi^2)\, d\xi$$

3. Исходя из аналогий между продольными колебаниями стержня и поперечными колебаниями струны, можно утверждать, что дифференциальное уравнение колебаний струны переменной массы совпадает с уравнением (2.1). Натяжение струны, как и жесткость при продольных колебаниях стержня, может зависеть от ρ_1, x и t. Используя равенство (1.4), получим $\varkappa = \psi (\mu, x, t)$. Согласно [4] натяжение в каждый момент времени одинакого для всех точек струны, т. е. $\psi (\mu (x, t), x, t)$ есть функция, зависящая, быть может, только от времени. Следовательно

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

Это соотношение позволяет привести дифференциальное уравнение (2.4) обратной задачи колебаний струны переменной массы на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ к виду

$$a\frac{\partial \mu}{\partial t} = c_1 \tag{3.2}$$

где a определяется по формуле (1.5)

$$c_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \psi\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^{4}\left(v_{1r}{}^k\frac{\partial \varphi_1{}^k}{\partial t} + v_{2r}{}^k\frac{\partial \varphi_2{}^k}{\partial t}\right) - Q$$

Уравнение (3.2) является обыкновенным дифференциальным уравнением, содержащим координату x в качестве параметра, поэтому граничные условия задавать излишне.

Дифференциальные уравнения обратной задачи для масс ρ_{M_i} те же, что и (2.3), но ω_i в них можно представить в виде

$$\omega_i = \psi\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x_i+0} - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x_i-0}\right]$$

Это равенство означает, что при взаимодействии масс ρ_{M_i} и струны в точках M_i $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ гладкость струны нарушается, т. е. в этих точках струна имеет излом.

Случаю, когда ψ не зависит явно от x, соответствует решение уравнения (3.2), являющееся функцией t. Это означает, что c_1 и a также являются функциями времени. Это условие накладывает определенные ограничения на относительные скорости присоединяющихся и отделяющихся частиц и их плотности.

Если хотя бы один из концов струны свободен, то $\psi(\mu, x, t) \equiv 0$. Можно считать, что вид функции ψ неизвестен. После определения из (3.2) μ как некоторой функции $f(x, t)$ достаточно положить $\psi = \mu - f(x, t)$. Если вид функции ψ известен, из равенства $\psi = 0$ находим μ как функцию от x и t. Эта функция должна удовлетворять двум требованиям. Во-первых, после ее подстановки в уравнение (3.2) оно обращается в тождество, и, во-вторых, эта функция должна удовлетворять начальным условиям.

Порядок решения обратной задачи колебаний струны переменной массы тот же, что и порядок решения аналогичной задачи продольных колебаний стержня переменной массы.

Рассмотрим пример. Струна, концы которой закреплены, совершает свободные колебания по закону $z = \varepsilon \sin(\pi x / l) \sin t$, где ε — малая постоянная величина. Имеет место присоединение частиц первого типа $\rho = \rho_1$, $\rho_1{}^\circ = \text{const}$, $\rho_1{}^1 = \rho_1{}^2$, $\rho_1{}^3 = \rho_1{}^4 = 0$, ${}^1/_2\,(v_{1r}{}^1 + v_{1r}{}^2) = z$, $\varkappa = 2\pi^{-2}l^2\rho$. Положив $\mu = \rho$, уравнение (3.2) запишем в виде $d\mu / dt = \mu$. Из него найдем $\rho = \rho_1{}^\circ e^t$. Уравнения (2.3) позволяют найти реакции закреплений концов. Эти реакции равны $2\varepsilon l\pi^{-1}\rho_1{}^\circ e^t \sin t$.

4. Запишем дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня переменной массы [2]

$$(\rho_1 + \rho_2)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n}\rho_{M_i}\frac{d^2 z(x_i, t)}{dt^2}\sigma_1(x - x_i) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varkappa\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = R_{1r} + R_{2r} + \sum_{i=1}^{n} R_{M_i r}\sigma_1(x - x_i) + Q \tag{4.1}$$

где $\varkappa(\rho_1, x, t)$ — жесткость стержня при изгибе.

Все функции, входящие в уравнение (4.1), непрерывны по t и μ. Все они, за исключением $(\partial / \partial x)\,[\varkappa\,(\partial^2 z / \partial x^2)]$, непрерывны по x. Функция $(\partial / \partial x)\,[\varkappa\,(\partial^2 z / \partial x^2)]$ в точках x_i имеет разрывы первого рода, а в остальных точках непрерывна. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ справедливо дифференциальное уравнение с частными производными для определения μ, получаемое из уравнения (3.1)

$$a\frac{\partial\mu}{\partial t}=p\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+q\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+r\frac{\partial\mu}{\partial x}+c \tag{4.2}$$

Коэффициент a определяется по формуле (1.5). Остальные коэффициенты имеют вид

$$p=\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad q=\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad r=2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\mu}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$$

$$c=(\varphi_1+\varphi_2)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\psi\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}-$$
$$-\sum_{k=1}^{4}\left(v_{1r}{}^k\frac{\partial\varphi_1{}^k}{\partial t}+v_{2r}{}^k\frac{\partial\varphi_2{}^k}{\partial t}\right)-Q$$

Уравнение (4.2) — нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка [5]. Его коэффициенты a, p, q, r, c предполагаются такими, что выполняются условия теоремы существования и единственности смешанной задачи для $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$, $0\leqslant t\leqslant T$. Кроме начального условия, получаемого из (1.3), зададим граничные условия следующим образом. Будем считать, что в (1.3) f_8 — заданная функция времени в точке x_i справа и в точке x_{i+1} слева. Это и есть то дополнительное условие, которое надо ввести в формулировку обратной задачи о поперечных колебаниях стержня переменной массы.

Дифференциальные уравнения движения масс ρ_{M_i} по виду совпадают с уравнениями (2.3), но в них ω_i иные, чем при продольных колебаниях. При поперечных колебаниях ω_i заданы формулой

$$\omega_i=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right]_{x_i-0}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right]_{x_i+0},\qquad i=1,2,\ldots,n$$

Уравнения (4.2) и (2.3) можно решать в любой последовательности, поскольку ω_0 могут быть найдены с помощью граничных условий.

Рассмотрим пример. Стержень, концы которого $x=0$ и $x=l$ свободны, совершает свободные поперечные колебания по закону $z=\varepsilon x(l-x)\times\sin t$, $\varepsilon=\mathrm{const}>0$. Происходит отделение частиц первого типа $\rho_1{}^1=\rho_1{}^2=0$, $\rho_1{}^3=\rho_1{}^4$, $\rho_1{}^\circ=\rho x$, $\beta=\mathrm{const}>0$, $\rho(0,t)=0$, $\rho(l,t)=\beta le^{-\varepsilon t}$. Жесткость стержня меняется по закону $\varkappa=\alpha\rho_1$, $\alpha=\mathrm{const}>0$. Относительные скорости отделяющихся частиц таковы, что $^1/_2\,(v_{1r}{}^3+v_{1r}{}^4)=x(l-x)\sin t$. Полагая $\mu=\rho=\rho_1$, запишем уравнение (3.2) в виде

$$x(l-x)\frac{\partial\mu}{\partial t}+2\alpha\varepsilon\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\varepsilon x(l-x)\mu=0$$

Его решением, которое получается разделением переменных, является $\rho=\beta xe^{-\varepsilon t}$.

5. Подразделение присоединяющихся и отделяющихся частиц первого и второго типов, введенное выше, вызвано тем, что частицы первого типа составляют со стержнем или струной единую сплошную среду, в то время как у частиц второго типа внутренние напряжения столь малы, что ими можно пренебречь.

Обратные задачи, в которых нет присоединения и отделения частиц первого типа, не представляют интереса, поскольку уравнения (2.4) и

(4.2) превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с координатой x в качестве параметра. Задание граничных условий излишне. Это объясняется тем, что присоединение и отделение частиц первого типа влияет на изменение жесткости стержня и ведет к появлению в уравнениях (2.4) и (4.2) производных от μ по x. Поэтому в качестве граничных условий можно задавать на концах отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ жесткость в виде функции времени. Иными словами, в качестве функции f_8 в (1.3) следует брать подходящую функцию от $\varkappa$, x и t. В частности, если f_8 будет линейной по $\varkappa$, то в уравнении (4.2) коэффициент q обратится в нуль.

При решении обратных задач продольных и поперечных колебаний стержней начальные и граничные условия для уравнений (2.4) и (3.2) должны удовлетворять условиям согласования. Эти условия определяют степень гладкости решения.

Поступила 1 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Космодемьянский А. А.* Курс теоретической механики. М., Учпедгиз, 1955.
2. *Смотров В. М., Чернышев В. М.* Уравнения колебаний стержней переменного состава. ПМТФ, 1972, № 1.
3. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
4. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
5. *Олейник О. А., Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными. Усп. матем. н., 1961, т. 16, вып. 5.