УДК 536. 2(075)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕНА В ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

И. В. Кудинов, А. В. Еремин, Р. М. Клеблеев, В. К. Ткачев

Самарский государственный технический университет, 443100 Самара, Россия
E-mails: igor-kudinov@bk.ru, a.v.eremin@list.ru, uio1123@list.ru, tvk93@yandex.ru

С использованием дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса и с учетом диссипации энергии при изменяющемся по продольной координате граничном условии первого рода получено приближенное аналитическое решение задачи о теплообмене для движущейся в цилиндрическом канале жидкости. Показано, что применение дополнительной искомой функции, определяющей изменение температуры по продольной переменной в центре канала, позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Дополнительные граничные условия найдены таким образом, чтобы при их выполнении для искомого решения удовлетворялось дифференциальное уравнение в граничных точках.

Ключевые слова: теплообмен в движущейся жидкости, переменные граничные условия, диссипация энергии, дополнительная искомая функция, дополнительные граничные условия, интегральный метод теплового баланса.

DOI: 10.15372/PMTF20200409

Получение точных аналитических решений задач о теплообмене для движущихся в круглых каналах жидкостей с учетом диссипации энергии при переменной по продольной координате температуре стенки, ввиду нелинейности этих задач, не представляется возможным. Практический интерес представляет получение их приближенных аналитических решений с точностью, достаточной для инженерных приложений. В теории теплопроводности используются методы, основанные на определении фронта температурного возмущения (глубины прогретого слоя) [1–6]. К их числу относится интегральный метод теплового баланса, при использовании которого процесс теплопроводности разделяется на две стадии по времени (для движущихся жидкостей — по продольной переменной), первая из которых характеризуется постепенным продвижением фронта температурного возмущения от поверхности тела к его центру, вторая — изменением температуры во всей области изменения пространственной переменной (для движущихся жидкостей — поперечной координаты). При использовании интегрального метода получаемые решения недостаточно точны. Для получения более точного решения в работах [7–10] использовались дополнительные граничные условия. Показано, что с увеличением числа приближений n время перемещения фронта температурного возмущения от поверхности тела до

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-38-70021).

центра уменьшается. В пределе, при $n \to \infty$, скорость перемещения фронта возмущения также стремится к бесконечному значению, что свидетельствует о распространении тепла с бесконечной скоростью. Отсюда следует, что с увеличением числа приближений время первой стадии процесса уменьшается, а время второй стадии увеличивается. Поэтому решения, полученные для первой стадии, можно использовать лишь при малых и сверхмалых значениях времени (для движущихся жидкостей — продольной пространственной переменной). С учетом сказанного выше в настоящей работе рассматривается метод получения решения, позволяющий избежать рассмотрения первой стадии процесса.

1. Постановка задачи. Метод решения задачи основан на использовании дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий. С помощью этого метода будем решать квазистационарную задачу о теплообмене при ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале в случае, когда температура стенки является линейной функцией продольной переменной. Примем следующие допущения: течение жидкости является установившимся (профиль скорости не меняется по длине канала); жидкость является несжимаемой, с постоянными физическими свойствами; внутренние источники тепла, не связанные с диссипацией энергии, отсутствуют [11, 12]. С учетом принятых допущений задача имеет вид (рис. 1)

$$\omega_\xi \frac{\partial t(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{a}{\xi}\frac{\partial t(\xi,\eta)}{\partial \xi} + a\frac{\partial^2 t(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\mu}{c\rho}\Big(\frac{d\omega_\xi}{d\xi}\Big)^2 \qquad (\eta > 0, \quad 0 < \xi < r_0); \tag{1.1}$$

$$t(\xi,0) = t_0; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial t(0,\eta)}{\partial \xi} = 0; \tag{1.3}$$

$$t(r_0,\eta) = t_0 + B\eta, \tag{1.4}$$

где t — температура; η — продольная координата; ξ — поперечная координата; a — температуропроводность жидкости; μ — динамическая вязкость; c — теплоемкость; ρ — плотность; $\omega_\xi = 2\omega_{\text{ср}}(1 - \xi^2/r_0^2)$ — распределение скорости по координате ξ; r_0 — радиус трубы; t_0 — температура жидкости на входе в участок трубы с установившимся профилем скорости; $B = dt_{\text{ст}}/d\eta$ — коэффициент интенсивности изменения температуры стенки по длине участка трубы, на котором происходит теплообмен; $t_{\text{ст}}$ — температура стенки; $\omega_{\text{ср}} = 0{,}5\omega_{\max}$ — средняя скорость; $\omega_{\max} = \Delta p r_0^2/(8\mu l)$ — максимальная скорость; Δp — перепад давления по длине рассматриваемого участка трубы; l — длина трубы.

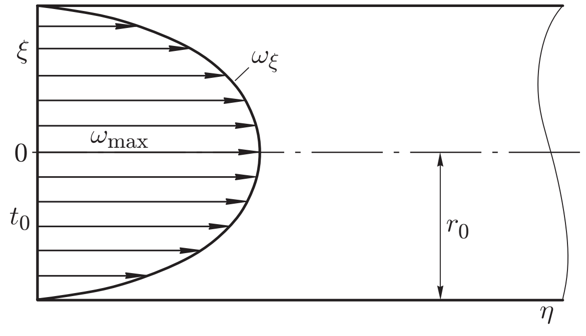

Рис. 1. Схема установившегося ламинарного течения жидкости в круглой трубе

Введем следующие обозначения:

$$\Theta = \frac{t - t_0}{t_0}, \qquad y = \frac{\xi}{r_0}, \qquad x = \frac{\eta a}{2\omega_{\text{ср}} r_0^2} \tag{1.5}$$

(Θ — безразмерная температура; y, x — безразмерные поперечная и продольная координаты).

С учетом (1.5) задача (1.1)–(1.4) принимает вид

$$y(1-y^2)\,\frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial x} = \frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial y} + y\,\frac{\partial^2\Theta(y,x)}{\partial y^2} + Dy^3 \qquad (x > 0, \quad 0 < y < 1); \tag{1.6}$$

$$\Theta(y,0) = 0; \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,x)}{\partial y} = 0; \tag{1.8}$$

$$\Theta(1,x) = Ax \tag{1.9}$$

($A = 2B\omega_{\text{ср}} r_0^2/(at_0)$, $D = 16\mu\omega_{\text{ср}}^2/(\lambda t_0)$ — безразмерные комплексы).

2. Построение аналитического решения. Введем дополнительную искомую функцию

$$q(x) = \Theta(0,x), \tag{2.1}$$

характеризующую изменение температуры по продольной переменной на оси трубы (в точке $y = 0$). Вследствие того что тепло распространяется с бесконечной скоростью, температура на оси трубы изменяется непосредственно после задания граничного условия на ее внутренней поверхности. Следовательно, аргумент функции $q(x)$ изменяется во всем диапазоне значений пространственной переменной x. Поскольку температура в центре трубы является искомой величиной задачи (1.6)–(1.9), введение функции $q(x)$ не меняет постановку задачи, но позволяет упростить получение ее приближенного аналитического решения.

Решение задачи (1.6)–(1.9) запишем в виде

$$\Theta(y,x) = A\Big(x - \frac{1}{2}\,(1-y^2) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(y)\Big), \tag{2.2}$$

где $b_k(q)$ $(k = \overline{1,n}\,)$ — неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(y) = 1 - y^{2k}$ — координатные функции.

Для введенной системы координатных функций φ_k соотношение (2.2) удовлетворяет граничным условиям (1.8), (1.9). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ $(k = \overline{1,n})$ находятся из соотношения (2.1) и некоторых дополнительных граничных условий, определяемых таким образом, чтобы при их выполнении для искомого решения в граничных точках $y = 0$, $y = 1$ в этих точках удовлетворялось уравнение (1.6). Заметим, что методы решения, для которых уравнение выполняется в граничных точках, рассматривались также в работах [13, 14].

В точке $y = 0$ уравнение (1.6) приводится к граничному условию (1.8). Следовательно, при выполнении этого граничного условия для решения (2.2) в этой точке удовлетворяется уравнение (1.6). В работах [7–10, 13, 14] показано, что при выполнении уравнения в граничных точках оно также выполняется внутри рассматриваемой области. Точность выполнения зависит от числа приближений (числа используемых в данном приближении дополнительных граничных условий). В работах [7, 14] приводятся доказательства теорем, согласно которым выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению внутри области.

Для получения дополнительного граничного условия в точке $y = 1$ продифференцируем условие (1.9) по переменной x: $\partial\Theta(1, x)/\partial x = A$. Подставляя полученное соотношение в уравнение (1.6), получаем дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial\Theta(1, x)}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta(1, x)}{\partial y^2} + D = 0. \tag{2.3}$$

В точке $y = 0$ необходимо также использовать дополнительные граничные условия, полученные из соотношения (2.1). Продифференцируем соотношение (2.1) по переменной x:

$$\frac{\partial q(x)}{\partial x} = \frac{\partial\Theta(0, x)}{\partial x}. \tag{2.4}$$

С учетом уравнения (1.6) соотношение (2.4) принимает вид

$$\frac{\partial q(x)}{\partial x} = \frac{1}{y}\,\frac{\partial\Theta(0, x)}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta(0, x)}{\partial x^2}. \tag{2.5}$$

Раскрывая неопределенность в первом члене правой части соотношения (2.5) по правилу Лопиталя, получаем дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial q(x)}{\partial x} = 2\,\frac{\partial^2\Theta(0, x)}{\partial y^2}. \tag{2.6}$$

Продифференцируем соотношение (2.6) по переменной x:

$$\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial\Theta(0, x)}{\partial x}\Big). \tag{2.7}$$

С учетом (2.4), (2.6) соотношение (2.7) сводится к дополнительному граничному условию

$$\frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} = 4\,\frac{\partial^4\Theta(0, x)}{\partial y^4}.$$

Аналогичным образом можно получить остальные дополнительные граничные условия [7–10].

Для получения решения в первом приближении подставим (2.2) в соотношение (2.1), ограничиваясь одним членом ряда. Для неизвестного коэффициента $b_1(q)$ имеем алгебраическое линейное уравнение, из решения которого находим $b_1(q) = q(x)/A - x + 0{,}5$. С учетом найденного значения $b_1(q)$ соотношение (2.2) принимает вид

$$\Theta(y, x) = Ax - (Ax - q(x))(1 - y^2). \tag{2.8}$$

Потребуем, чтобы соотношение (2.8) удовлетворяло не уравнению (1.6), а некоторому осредненному в диапазоне $0 \leqslant y \leqslant 1$ уравнению, т. е. интегралу теплового баланса

$$\int\limits_0^1 y(1 - y^2)\,\frac{\partial\Theta(y, x)}{\partial x}\,dy = \int\limits_0^1 \Big(\frac{\partial\Theta(y, x)}{\partial y} + y\,\frac{\partial^2\Theta(y, x)}{\partial y^2} + Dy^3\Big)\,dy. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) в (2.9), после определения интегралов относительно неизвестной функции $q(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dq(x)}{dx} + 12q(x) - (12x - 0{,}5)A - 1{,}5D = 0. \tag{2.10}$$

Интегрируя уравнение (2.10), находим

$$q(x) = Ax + 0{,}125(D - A) + C\,\mathrm{e}^{-12x}, \tag{2.11}$$

где C — постоянная интегрирования. Подставляя (2.11) в (2.8), получаем

$$\Theta(y,x) = Ax - (1-y^2)((A-D)/8 - C\,\mathrm{e}^{-12x}). \tag{2.12}$$

Для определения постоянной интегрирования составим невязку условия (1.7) и потребуем выполнения условия ортогональности невязки координатной функции $\varphi_1(y) = 1-y^2$:

$$\int\limits_0^1 \Theta(y,0)(1-y^2)\,dy = 0. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.12) в (2.13), после определения интегралов относительно постоянной интегрирования получаем алгебраическое линейное уравнение, из решения которого находим

$$C = 0{,}125(A-D). \tag{2.14}$$

Соотношение (2.12) с учетом (2.14) представляет собой решение задачи (1.6)–(1.9) в первом приближении. Сравнение результатов расчетов по формуле (2.12) с решением задачи (1.6)–(1.9) с помощью метода конечных разностей показывает, что при $0{,}1 \leqslant x \leqslant 1{,}0$ их различие не превышает 8 %.

Для проверки аналитического решения задачи (1.6)–(1.9) в отсутствие точного решения этой задачи с использованием метода прогонки было найдено ее численное решение. При этом в рассматриваемой области вводилась пространственная сетка с шагами Δy, Δx по переменным x и y соответственно:

$$y_i = i\,\Delta y, \quad i=\overline{0,I}, \qquad x_j = j\,\Delta x, \quad j=\overline{0,J}$$

(I, J — число шагов по координатам y и x). Использовалась пространственная сетка с шагами $\Delta y = 0{,}02$, $\Delta x = 10^{-5}$.

Используя явную схему аппроксимации дифференциальных операторов, задачу (1.6)–(1.9) запишем в виде

$$y_i(1-y_i^2)\,\frac{\Theta_i^{j+1}-\Theta_i^j}{\Delta x} = \frac{\Theta_{i+1}^j-\Theta_i^j}{\Delta y} + y_i\,\frac{\Theta_{i+1}^j - 2\Theta_i^j + \Theta_{i-1}^j}{\Delta y} + Dy_i^3,$$

$$\Theta_i^0 = 0, \qquad \frac{\Theta_1^j - \Theta_0^j}{\Delta y} = 0, \qquad \Theta_I^j = Ax_j.$$

Повышение точности решения обусловлено увеличением числа членов ряда (2.2). При получении решения во втором приближении подставим (2.2) (ограничиваясь двумя членами ряда) в соотношение (2.1) и дополнительное граничное условие (2.6). Для определения неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ $(k=1,2)$ получаем систему двух алгебраических уравнений, из решения которой находим $b_1(q) = 0{,}5 - q'(x)/(4A)$; $b_2(q) = (0{,}25q'(x) + q(x) - Ax)/A$. С учетом найденных значений коэффициентов $b_k(q)$ $(k=1,2)$ соотношение (2.2) принимает вид

$$\Theta(y,x) = Ax - \frac{A}{2}\,(1-y^2) + \frac{1}{4}\,(2A-q')(1-y^2) + \frac{1}{4}\,(q' + 4(q-Ax))(1-y^4) \tag{2.15}$$

$(q' = dq(x)/dx)$. Подставляя (2.15) в интеграл теплового баланса (2.9), получаем

$$\frac{1}{96}\,q'' + \frac{17}{24}\,q' + 4q + A\Big(\frac{1}{24} - 4x\Big) - \frac{D}{4} = 0 \tag{2.16}$$

$(q'' = d^2q(x)/dx^2)$. Интегрируя уравнение (2.16), находим

$$q(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2x(17+\sqrt{193}\,)} + C_2\,\mathrm{e}^{2x(-17+\sqrt{193}\,)} + A\Big(x - \frac{3}{16}\Big) + \frac{D}{16}, \tag{2.17}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничного условия (1.7). Составляя невязку (1.7) и требуя выполнения условия ее ортогональности координатным функциям $\varphi_j(y)$ ($j = 1, 2$), получаем

$$\int\limits_0^1 \Theta(y,0)\varphi_j(y)\,dy = 0 \qquad (j = 1, 2). \tag{2.18}$$

Подставляя (2.15) в (2.18) с учетом (2.17), для определения постоянных интегрирования C_1, C_2 получаем систему двух алгебраических линейных уравнений

$$-(\sqrt{193} + 1)C_1 + (\sqrt{193} - 1)C_2 - \frac{105}{42}\,A + D = 0,$$

$$\frac{16}{315}\sqrt{193}\,(C_2 - C_1) - \frac{16}{105}\,(C_2 + C_1) - \frac{34}{315}\,A + \frac{2}{45}\,D = 0,$$

из решения которой следует $C_1 = 0{,}0069D - 0{,}0029A$, $C_2 = 0{,}1904A - 0{,}069D$.

С учетом (2.17) и найденных значений постоянных интегрирования соотношение (2.15) представляет собой решение задачи (1.6)–(1.9) во втором приближении. Сравнение результатов расчетов по формуле (2.15) с решением задачи (1.6)–(1.9) с помощью численного метода показывает, что при $0{,}01 \leqslant x \leqslant 1{,}00$ их различие не превышает 4 % (рис. 2, 3).

Для получения решения задачи (1.6)–(1.9) в третьем приближении подставим (2.2) (ограничиваясь тремя членами ряда) в соотношение (2.1) и дополнительные граничные условия (2.3), (2.6). Для неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ ($k = 1, 2, 3$) имеем систему трех линейных алгебраических уравнений. После определения $b_k(q)$ соотношение (2.2) принимает вид

$$\Theta(y,x) = Ax - \frac{q'}{4}\,(1 - y^2) - \frac{D + 36(Ax - q) - 8q'}{20}\,(1 - y^4) + {} \\ {} + \frac{D + 16(Ax - q) - 3q'}{20}\,(1 - y^6). \tag{2.19}$$

Подставляя (2.19) в (2.9), находим

$$\frac{19}{480}\,q'' + \frac{79}{40}\,q' + 12q + \Big(\frac{11}{40} - 12x\Big)A - \frac{3}{4}\,D = 0. \tag{2.20}$$

Интегрируя уравнение (2.20), получаем

$$q(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\mu_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\mu_2 x} + \Big(x - \frac{3}{16}\Big)A + \frac{D}{16}, \tag{2.21}$$

где $\mu_{1,2} = \mp 6(\sqrt{3201} \pm 79)/19$.

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2 составим невязку граничного условия (1.7) и потребуем выполнения условия ее ортогональности координатным функциям $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$:

$$\int\limits_0^1 \Theta(y,0)\varphi_j(y)\,dy = 0 \qquad (j = 1, 2). \tag{2.22}$$

Подставляя (2.19) в (2.22) с учетом (2.21) и определяя интегралы относительно C_1, C_2, получаем систему двух алгебраических уравнений, из решения которой находим $C_1 = -0{,}01A + 0{,}017D$, $C_2 = 0{,}196A - 0{,}0769D$.

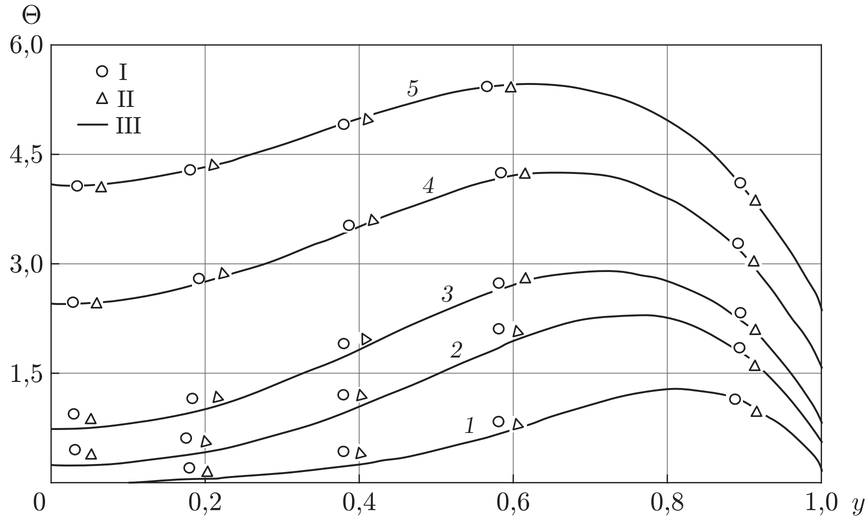

Рис. 2. Распределения температуры, полученные по формулам (2.15) (I), (2.19) (II) и при численном решении задачи (III) при $A = 15$, $D = 100$ и различных значениях x:
1 — $x = 0{,}007$, *2* — $x = 0{,}030$, *3* — $x = 0{,}050$, *4* — $x = 0{,}100$, *5* — $x = 0{,}150$

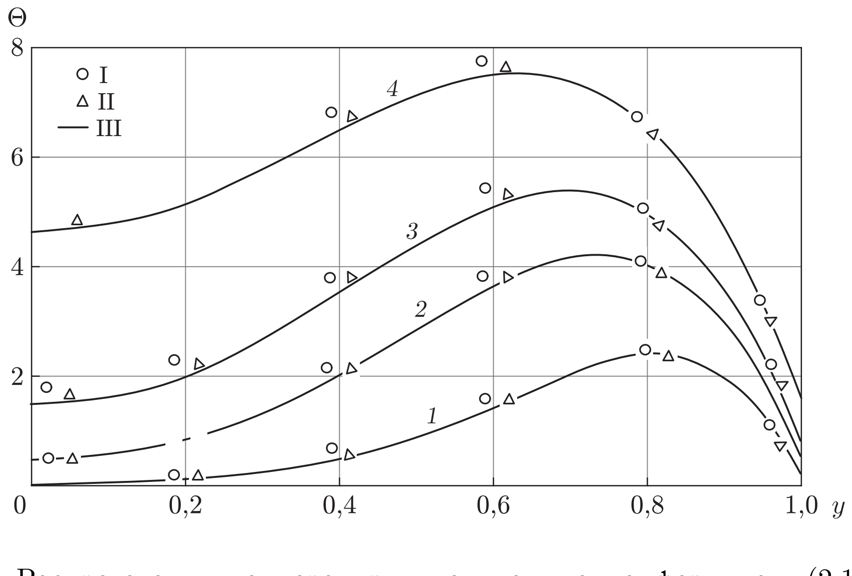

Рис. 3. Распределения температуры, полученные по формулам (2.15) (I), (2.19) (II) и при численном решении задачи (III) при $A = 15$, $D = 200$ и различных значениях x:
1 — $x = 0{,}012$, *2* — $x = 0{,}030$, *3* — $x = 0{,}050$, *4* — $x = 0{,}100$

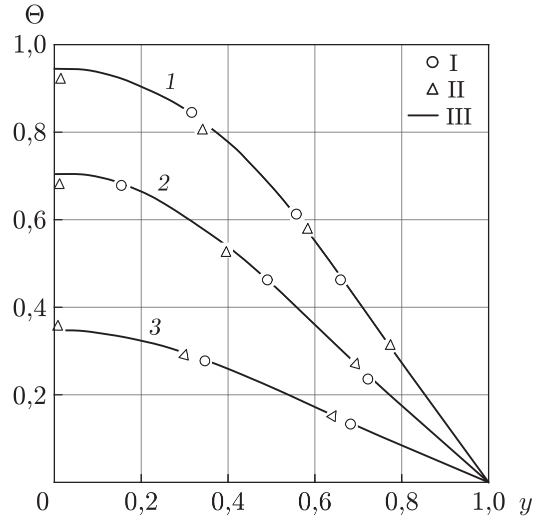

Рис. 4. Распределения температуры, полученные с использованием метода Л. В. Канторовича (I) и по формуле (3.1) при $n = 3$ (II), а также точное решение [11] (III) при различных значениях x:
1 — $x = 0{,}05$, *2* — $x = 0{,}10$, *3* — $x = 0{,}20$

3. Анализ результатов решения. Соотношение (2.19) с учетом (2.21) и найденных значений постоянных интегрирования представляет собой решение задачи (1.6)–(1.9) в третьем приближении. Сравнение результатов расчетов по формуле (2.19) с решением, полученным численным методом, показывает, что в диапазоне $0{,}01 \leqslant x \leqslant 1{,}00$ их различие не превышает 2 % (см. рис. 2, 3). Следует отметить, что с увеличением D температура и температурные градиенты внутри движущейся жидкости увеличиваются. Это обусловлено увеличением диссипативного слагаемого в уравнении (1.6), принимающего наибольшие значения в областях максимального изменения скорости (см. рис. 1). Следует отметить, что с увеличением скорости область максимальной температуры в жидкости смещается к стенке канала (см. рис. 2, 3). Этот результат имеет большое практическое значение.

На рис. 4 приведены результаты решения задачи (1.6)–(1.9) при $D = 0$ (без учета диссипации энергии) и следующих граничных условиях:

$$\Theta(y, 0) = 1, \qquad \Theta(1, x) = 0.$$

В данном случае решение принималось в виде

$$\Theta(y, x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q)(1 - \xi^{2k}). \tag{3.1}$$

Сравнение результатов расчетов по формуле (3.1) в третьем приближении ($n = 3$) с решением данной задачи с использованием метода Л. В. Канторовича в шестом приближении [15], а также с точным аналитическим решением [11] показывает, что при $0{,}05 \leqslant x \leqslant \infty$ их различие не превышает 2,5 %. Заметим, что решение, полученное с использованием метода Л. В. Канторовича, и точное аналитическое решение в указанном диапазоне значений продольной переменной практически совпадают.

Ввиду простоты аналитических решений можно исследовать теплообмен по изотермам с определением скоростей их движения. На рис. 5 приведены изотермы $\Theta(y, x) = \mathrm{const}$ в координатах x, y, полученные из решения (2.15) (второе приближение) при $A = 15$, $D = 100$. Видно, что, возникая на стенке трубопровода ($y = 1$), изотермы движутся в на-

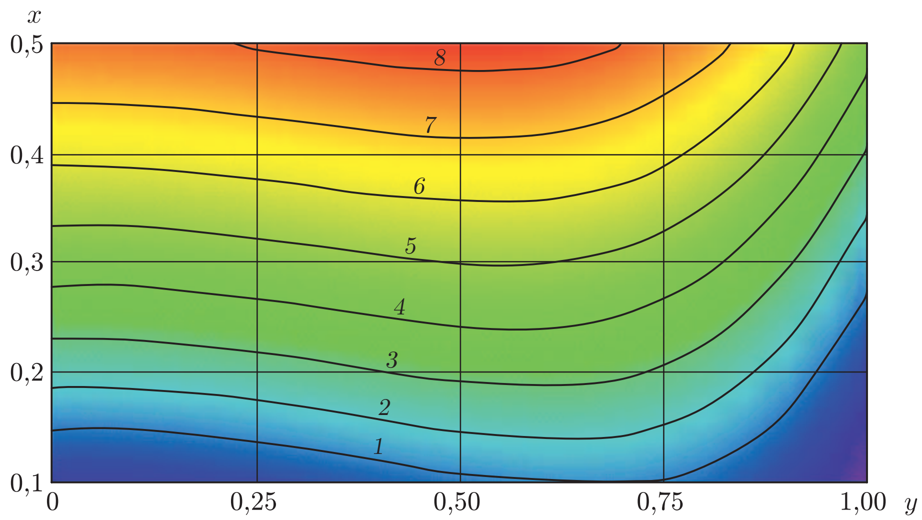

Рис. 5. Изотермы, полученные по формуле (2.15) при $A = 15$, $D = 100$: *1* — $\Theta = 4$, *2* — $\Theta = 5$, *3* — $\Theta = 6$, *4* — $\Theta = 7$, *5* — $\Theta = 8$, *6* — $\Theta = 9$, *7* — $\Theta = 10$, *8* — $\Theta = 11$

правлении центра канала ($y = 0$) и перпендикулярны его осевой линии. Это свидетельствует о бесконечно большой скорости их перемещения вблизи оси канала, так как скорость движения изотерм равна $v = \Delta y/\Delta x$.

Заметим, что в случае нестационарных задач теплопроводности для бесконечной пластины с переменными начальными и граничными условиями или с неоднородными граничными условиями, а также при наличии источников тепла в работах [8–10] с использованием рассмотренного выше метода получены точные аналитические решения в форме бесконечных рядов.

Заключение. С использованием дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий получено приближенное аналитическое решение краевой задачи о теплообмене в жидкости при переменной по продольной координате температуре стенки, а также с учетом тепла, выделяемого при трении жидкости о стенки. Применение дополнительной искомой функции обусловлено тем, что скорость распространения тепла бесконечна. Это следует из свойства параболического уравнения, описывающего теплообмен.

Дополнительные граничные условия найдены в таком виде, чтобы при их выполнении для искомого решения удовлетворялось исходное дифференциальное уравнение в граничных точках. Выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению внутри рассматриваемой области с точностью, определяемой числом приближений (числом используемых дополнительных граничных условий), что подтверждается большей точностью решения при увеличении числа приближений.

Поскольку отсутствует необходимость интегрирования уравнения в частных производных по радиальной пространственной переменной и проводится лишь интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции, данный метод можно использовать для решения краевых задач со сложными дифференциальными операторами в уравнениях, не допускающими разделения переменных (нелинейных, с переменными физическими свойствами среды, с учетом диссипации энергии и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лыков А. В.** Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Энергетика и транспорт. 1970. № 5. С. 109–150.
2. **Гудмен Т.** Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена: Сб. науч. тр. М.: Атомиздат, 1967. С. 41–96.
3. **Тимошпольский В. И.** Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии / В. И. Тимошпольский, Ю. С. Постольник, Д. Н. Андрианов. Минск: Белорус. наука, 2005.
4. **Глазунов Ю. Т.** Вариационные методы. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2006.
5. **Беляев Н. М.** Методы нестационарной теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. М.: Высш. шк., 1978.
6. **Кудряшов Л. И.** Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности / Л. И. Кудряшов, Н. Л. Меньших. М.: Машиностроение, 1979.
7. **Кудинов И. В., Котова Е. В., Кудинов В. А.** Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций // Сиб. журн. вычисл. математики. 2019. Т. 22, № 2. С. 153–165.
8. **Кудинов И. В.** Получение точных аналитических решений задач теплопроводности с переменными во времени граничными условиями // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. 2016. № 4. С. 108–117.
9. **Кудинов И. В., Стефанюк Е. В., Скворцова М. П., Максименко Г. Н.** Об одном методе получения точных аналитических решений задач теплопроводности с источником теплоты // Изв. вузов. Чер. металлургия. 2017. Т. 60, № 11. С. 877–882.
10. **Кудинов И. В., Кудинов В. А., Котова Е. В., Еремин А. В.** Об одном методе решения нестационарных краевых задач // Инж.-физ. журн. 2017. Т. 90, № 6. С. 1387–1397.
11. **Петухов Б. С.** Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967.
12. **Цой П. В.** Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. М.: Изд-во Моск. энерг. ин-та, 2005.
13. **Канторович Л. В.** Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1934. Т. 2, № 9. С. 532–534.
14. **Федоров Ф. М.** Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2000.
15. **Карташов Э. М.** Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций / Э. М. Карташов, В. А. Кудинов, В. В. Калашников. М.: Юрайт, 2018.

Поступила в редакцию 25/X 2019 г.,
после доработки — 25/XII 2019 г.
Принята к публикации 27/I 2020 г.