

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ НАПРЯЖЕНИЯ-ДЕФОРМАЦИИ

Г. И. Быковцев

(Воронеж)

Задача о распространении возмущений в стержне с нелинейной связью напряжения-деформации рассматривалась в работах [1-5] и др. Обзор исследований в этом направлении содержится в [6]. Отметим также статьи [7,8], в которых в отличие от работ других авторов рассматривается материал с «жесткой» связью напряжения-деформации $d^2\sigma/d^2\varepsilon \geq 0$. Ниже рассмотрена задача о распространении возмущений в среде с нелинейной связью напряжения-деформации. При рассмотрении привлекается представление Эйлера для сплошной среды, поэтому постановка задачи в данной работе близка к постановке, использованной Тейлором, но в отличие от работы Тейлора основное внимание здесь уделено теории распространения ударных волн.

1. Рассмотрим полупространство $x \geq 0$, материал которого подчинен связи напряжения-деформации в виде

$$\varepsilon = \varphi(\sigma) \quad (1.1)$$

Здесь ε — деформация элемента в направлении оси x , σ — напряжение в этом же направлении.

К плоскости $x = 0$ прикладывается равномерно распределенная нагрузка, изменяющаяся со временем по произвольному закону. Уравнение равновесия в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь u — скорость перемещений, ρ — плотность материала. Связь между деформациями и скоростями перемещений имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} u + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi' \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} u + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \quad (1.3)$$

К соотношениям (1.2), (1.3) необходимо присоединить условие сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Если предположить, что ρ — функция только σ , т. е. материал полупространства баротропный, то получим

$$\rho' \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

Используя (1.3), можно преобразовать это выражение к виду

$$\left(\frac{\rho'}{\varphi'} + \rho \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Отсюда, если $\partial u / \partial x \neq 0$, имеем

$$\rho = \rho_0 e^{-\varphi(\sigma)}, \quad (\rho = \rho_0 \text{ при } \sigma = 0)$$

Рассмотрим систему уравнений (1.2), (1.4). Характеристический определитель ее имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\rho u & -\rho \\ -\varphi'(\sigma) u & -\varphi'(\sigma) & 1 & 0 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим уравнение характеристик в виде

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = -a + u, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = a + u \quad \left(a = [\rho\Phi'(\sigma)]^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (1.5)$$

Семейства линий в плоскости xt , удовлетворяющие уравнениям (1.5), назовем соответственно α и β линиями. Уравнения (1.2) и (1.3) вдоль этих линий преобразуются к виду

$$d\sigma + \rho a du = 0 \quad \text{вдоль } \alpha\text{-линий}, \quad d\sigma - \rho a du = 0 \quad \text{вдоль } \beta\text{-линий} \quad (1.6)$$

Интегрируя эти соотношения, получим

$$\Phi(\sigma) + u = \text{const} \quad \text{вдоль } \alpha\text{-линий}, \quad \left(\Phi(\sigma) = \int_0^\sigma \left(\frac{\Phi'e^\varphi}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma\right) \quad (1.7)$$

$$\Phi(\sigma) - u = \text{const} \quad \text{вдоль } \beta\text{-линий}, \quad (1.8)$$

Легко показать простые свойства соотношений вдоль характеристик, аналогичные первой теореме Генки теории идеально пластических тел [9]

$$u_{11} - u_{21} = u_{12} - u_{22}, \quad \Phi(\sigma_{11}) - \Phi(\sigma_{21}) = \Phi(\sigma_{12}) - \Phi(\sigma_{22})$$

Здесь индексы 1 и 2 обозначают соответствующую величину в точках пересечения характеристик (фиг. 1).

2. Пусть плоскость $x = 0$ нагружается по закону $\sigma = \sigma(t)$. Рассмотрим первый этап нагружения, когда $\partial/\partial t \sigma \geq 0$. В работе [7] доказано, что при нагружении полупространства импульсом при «жесткой» связи напряжения-деформации невозможно построить непрерывного решения. Поэтому прежде чем перейти к построению решений, установим, в каких случаях решение будет непрерывным и в каких случаях оно будет сопровождаться образованием ударных волн.

Пусть решение непрерывно, тогда α -линии заходят в область покоя плоскости xt , и, следовательно, вдоль этих характеристик должно выполняться соотношение

$$\Phi(\sigma) + u = 0 \quad (2.1)$$

Но α -линию можно провести через любую точку плоскости xt , следовательно, (2.1) имеет место в любой точке этой плоскости. Тогда из соотношения (1.8) получаем, что вдоль β -линий $\sigma = \text{const}$ и $u = \text{const}$; при этом β -линии будут прямыми

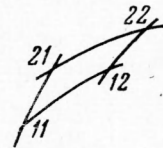
$$(a + u)t - x = \text{const}$$

Плоскость $x = 0$ при $t = 0$ перемещается в процессе нагружения со скоростью

$$u = - \int_0^{\sigma(t)} \left(\frac{\Phi'e^\varphi}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma$$

Координата x в момент времени t частиц этой плоскости будет

$$x = - \int_0^t \int_0^{\sigma(t)} \left(\frac{\Phi'e^\varphi}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma dt$$



Фиг. 1

Теперь, выполняя краевые условия, получаем уравнения характеристик в виде

$$\left[\left(\frac{e^\varphi}{\rho_0\Phi'}\right)^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\sigma(\alpha)} \left(\frac{\Phi'e^\varphi}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma\right](t - \alpha) - x = \int_0^\alpha \int_0^{\sigma(\alpha)} \left(\frac{\Phi'e^\varphi}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma dt \quad (2.2)$$

Вдоль этих линий $\sigma = \sigma(\alpha)$, а u определяется из (2.1). Но это решение имеет смысл только до тех пор, пока две линии (2.2), соответ-

ствующие двум различным параметрам α , не пересекутся при $x \geq 0$ и $t \geq 0$. Чтобы узнать, возможно пересечение характеристик или нет, достаточно рассмотреть коэффициент перед t в уравнении (2.2)

$$F(\sigma) = \left(\frac{e^\varphi}{\rho_0 \varphi'} \right)^{\frac{1}{2}} - \int_0^\sigma \sqrt{\frac{\varphi' e^\varphi}{\rho_0}} d\sigma$$

Если $F(\sigma)$ убывает, то угол наклона характеристик к оси x не убывает, и решение будет непрерывным; если $F(\sigma)$ возрастает, то решение будет сопровождаться образованием ударных волн. Дифференцируя $F(\sigma)$ по σ , получим

$$F'(\sigma) = - \left(\frac{\varphi' e^\varphi}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi'^2 + \varphi''}{2}$$

Отсюда следует, что в случае $\sigma > 0$ имеем разрывное решение при $\varphi'^2 + \varphi'' < 0$ и непрерывное решение при $\varphi'^2 + \varphi'' \geq 0$; в случае $\sigma < 0$ имеем разрывное решение при $\varphi'^2 + \varphi'' > 0$ и непрерывное решение при $\varphi'^2 + \varphi'' \leq 0$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением связей (1.1), в которых $\varphi'^2 + \varphi''$ не меняет знака.

Если непрерывное решение невозможно, то будем предполагать, что u и σ удовлетворяют уравнениям (1.2) и (1.4) всюду, за исключением некоторых линий, скачка, на которых u , ρ , σ терпят разрыв. На этих линиях должны выполняться соотношения, общие для всей механики сплошных сред

$$\rho_1(c - u_1) = \rho_2(c - u_2) \quad (2.3)$$

$$\rho_1 u_1(c - u_1) - \rho_2 u_2(c - u_2) = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (2.4)$$

Здесь 1 и 2 обозначают соответствующие величины до скачка и после него, c — скорость фронта скачка. Уравнение (2.3) выражает условие сохранения массы, уравнение (2.4) — условие сохранения импульса.

Используя соотношения (2.3) и (2.4), докажем, что скорость распространения возмущений до скачка меньше скорости фронта скачка, а скорость распространения возмущений после скачка больше скорости фронта скачка.

Для этого, исключая из (2.3) и (2.4) u_2 и u_1 , разрешая полученные уравнения относительно c , получим

$$c = \sqrt{\frac{\rho_2(\sigma_2 - \sigma_1)}{\rho_1^2 - \rho_1 \rho_2}} + u_1, \quad c = \sqrt{\frac{\rho_1(\sigma_1 - \sigma_2)}{\rho_2^2 - \rho_1 \rho_2}} + u_2$$

Скорости распространения возмущений до скачка и после него соответственно равны

$$a_1 + u_1 = [\rho_1 \varphi'(\sigma_1)]^{-\frac{1}{2}} + u_1, \quad a_2 + u_2 = [\rho_2 \varphi'(\sigma_2)]^{-\frac{1}{2}} + u_2$$

Таким образом, нужно доказать неравенства

$$\frac{\rho_2(\sigma_2 - \sigma_1)}{\rho_1^2 - \rho_1 \rho_2} \geq \frac{1}{\rho_1 \varphi'(\sigma_1)}, \quad \frac{\rho_1(\sigma_1 - \sigma_2)}{\rho_2^2 - \rho_1 \rho_2} \leq \frac{1}{\rho_2 \varphi'(\sigma_2)}$$

Для определенности положим, что $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ (для $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$ рассмотрение проводится аналогично). Рассматриваемые неравенства можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi'(\sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_1) &\geq e^{\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)} - 1 \\ \varphi'(\sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2) &\geq e^{\varphi(\sigma_1) - \varphi(\sigma_2)} - 1 \end{aligned}$$

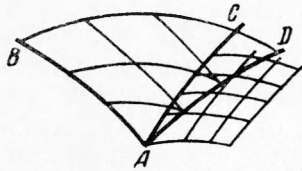
Разлагая правые части в ряд Тэйлора в окрестности точек σ_1 и σ_2 соответственно и взяв дополнительный член в форме Лагранжа, получим

$$0 \geq \frac{1}{2!} e^{\varphi(\sigma^\circ) - \varphi(\sigma_2)} [\varphi''(\sigma^\circ) + \varphi'^2(\sigma^\circ)] (\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

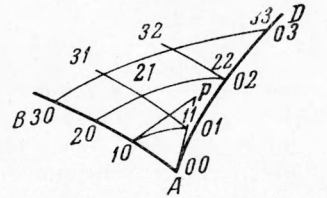
Здесь σ° — некоторое значение σ из интервала $\sigma_2 \geq \sigma^\circ \geq \sigma_1$. Так как непрерывного решения построить нельзя, то $\varphi''(\sigma^\circ) + \varphi'^2(\sigma^\circ) < 0$, что и доказывает неравенство.

Отметим, что аналогичное свойство имеет место в одномерных задачах гидродинамики сжимаемых жидкостей, где при доказательстве этих свойств привлекаются термодинамические соображения.

Прежде чем строить решение, рассмотрим следующие краевые задачи.



Фиг. 2



Фиг. 3

Задача 1. Пусть задана α -линия AB и вдоль нее известны σ , u (фиг. 2). Справа от точки A до β -линии AC известно распределение σ , u . В точке A решения не совпадают, но выполнено условие на линии скачка. Надо построить линию скачка AD и решение в области CAD . Заметим, что если в точке A величины σ , u непрерывны, то эта задача переходит в задачу Гурса.

Разобьем AB на малые интервалы точками $10, 20, \dots, n0$ (фиг. 3). Значения с индексами mn относятся к точкам пересечения характеристик, проходящих через nO , с линиями скачка после скачка, а с индексом On к этим же точкам перед скачком. Из точки 10 под углом наклона характеристики проведем прямую, уравнение которой имеет вид

$$(x_{10} - x) = (a_{10} + u_{10})(t_{10} - t) \quad (2.5)$$

В точке A известно направление линии скачка, проводим через A в этом направлении прямую

$$(x_{00} - x) = c_{00}(t_{00} - t) \quad (2.6)$$

Разрешая эти уравнения, определим координаты точки P . В этой точке определяем значения u'_{01} и σ'_{01} . Для точек $10, 11, 01$ записываем соотношения (1.7), (2.3), (2.4)

$$\Phi(\sigma_{11}) + u_{11} = \Phi(\sigma_{10}) - u_{01}$$

$$\rho_{11}(c_{11} - u_{11}) = \rho'_{01}(c_{11} - u'_{01})$$

$$\rho_{11}u_{11}(c_{11} - u_{11}) - \rho_{01}u_{01}(c_{11} - u_{01}) = \sigma_{01} - \sigma_{11}$$

Из этих уравнений определяем u_{11} , σ_{11} , c_{11} . Теперь, вычислив средние значения углов наклона характеристики $01-11$ и линии скачка, подставим их вместо $a_{10} + u_{10}$ и c_{00} в уравнения (2.5), (2.6) и повторим весь процесс снова и т. д., пока разность между последовательными приближениями не станет порядка ошибки вычислений. Для определения решений в точках $21, 31, \dots, n1$ имеем задачу Гурса, в точке 22 решение строится так же, как и в точке 11 . Таким образом, решение полностью определяется в треугольнике ABD , ограниченном двумя характеристиками и линией скачка.

Задача 2. Вдоль известной характеристики AB заданы u и σ (фиг. 4). Вдоль неизвестной линии AC задана σ , как функция времени, и известно дифференциальное уравнение этой линии

$$dx/dt = u \quad (2.7)$$

где u — скорость частиц на этой линии.

Из точки A проводим прямую с углом наклона к оси t , равным u_{00} ; уравнение ее имеет вид

$$x - x_0 = u_{00}(t - t_{00}) \quad (2.7)$$

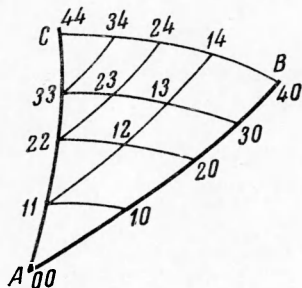
Из точки 10 проводим прямую, угол наклона которой совпадает с углом наклона характеристики в точке 10

$$x - x_{10} = (u_{10} - u_{10})(t - t_{10}) \quad (2.8)$$

Определяя из системы уравнений (2.7) и (2.8) координаты x и t , находим давление в точке пересечения. Используя соотношение (1.8), определяем скорость в точке пересечения. Заменяя в уравнениях (2.7) и (2.8) углы наклона их средними значениями, будем повторять эти вычисления

до тех пор, пока разность между последовательными приближениями не будет достаточно мала. Для определения решения в точках $12, 13, \dots, 1n$ имеем задачу Гурса. Определение решения в точке 22 проводится так же, как и в точке 11 . Таким образом, решение определяется в криволинейном треугольнике ACB .

Перейдем к построению решения. Для этого найдем огибающую семейства характеристик (2.2), параметрическое уравнение ее задается уравнениями (2.2) и



Фиг. 4

$$t = \alpha - \frac{2\varphi'}{(\varphi'' + \varphi'^2)\sigma'} \quad (2.9)$$

Для определения решения надо знать поведение только первой ветви огибающей, соответствующей значениям $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, где α_0 значение, соответствующее первой точке ветвления. В зависимости от вида функции $\sigma = \sigma(t)$ могут представиться различные случаи.

При нагружении импульсом, $d\sigma/dt = \infty$ при $t = 0$ первая ветвь огибающей проходит через точку $x = 0, t = 0$, т. е. линия скачка проходит через начало координат.

Если $d\sigma/dt \neq \infty$ при $t = 0$, то возможны следующие два случая. Если t , вычисленное по формуле (2.9), при увеличении α возрастает, то линия скачка начинается с точки огибающей, соответствующей $\alpha = 0$, координаты этой точки

$$t_0 = - \frac{2\varphi'(0)}{(\varphi''(0) + \varphi'^2(0))\sigma'(0)}, \quad x_0 = \left(\frac{1}{\rho_0\varphi'} \right)^{\frac{1}{2}} t_0$$

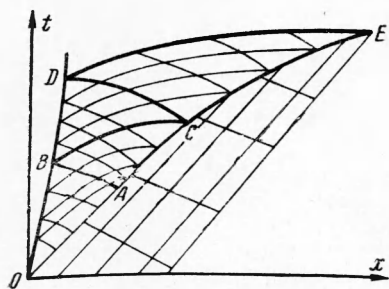
Через точку A с координатами x_0, t_0 проходит β -линия AB (фиг. 5). Для простоты положим, что в треугольнике OAB характеристики не пересекаются, тогда в этой области решение полностью определено на характеристиках (2.2) и известна линия AB . Теперь для определения линии скачка и решения в области ABC имеем задачу 1, для определения решения в области BCD имеем задачу 2, в области CDE — снова задачу 1 и т. д.

Заметим, что при решении задачи 1 или 2 не гарантируется непрерывного решения. Может оказаться, что внутри области $ABDC$ характеристики пересекутся. Тогда из точки пересечения надо провести линию скачка, для определения которой надо решить задачу 1.

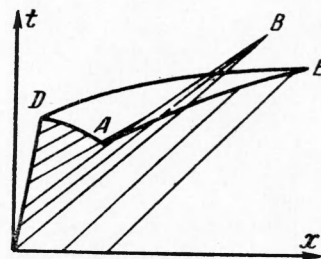
Если t , вычисленное по формуле (2.9), с увеличением α уменьшается, то для определения точки ветвления надо найти наименьшее значение α , при котором t принимает экстремальное значение. Для этого надо найти наименьший корень уравнения

$$\left(\frac{2\varphi'(\alpha)}{(\varphi''(\alpha) + \varphi'^2(\alpha)) \sigma'(\alpha)} \right)' = 1$$

Определив этот корень, из (2.2) и (2.9) найдем координаты точки ветвления A (фиг. 6). В области $OBADC$ известно аналитическое решение на характеристиках (2.2). Для определения линии скачка CD и решения в области ADE надо решить задачу 1, далее задачу 2 и т. д.



Фиг. 5



Фиг. 6

3. Ниже обсуждаются основные уравнения при разгрузке полупространства. Предполагается, что связь между напряжениями и деформациями при разгрузке линейная. В случае «мягкой» характеристики материала линия, интерпретирующая связь напряжения-деформации при разгрузке, обычно принимается параллельной касательной к кривой, интерпретирующей эту связь при нагружении в точке $\sigma = 0$, $\epsilon = 0$. В случае жесткой характеристики материала из термодинамических соображений прямая, интерпретирующая связь между напряжениями и деформациями при разгрузке, должна иметь больший угол наклона к оси ϵ , чем угол наклона касательной к этой кривой при нагружении в любой точке. Таким образом, в любой точке имеем

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{1}{E} (\sigma - \sigma_0), \quad \epsilon_0 = \varphi(\sigma_0)$$

Здесь ϵ_0 — максимальная деформация, которую в процессе нагружения имела данная физическая точка. Вообще говоря, ϵ_0, σ_0 зависят от x и t , но эта зависимость такова, что для любой физической точки $\epsilon_0 = \text{const}$, т. е. $\epsilon_0 = \epsilon_0(x - w)$, где w — перемещение точки от положения, в котором она начала разгружаться. При разгрузке должны выполняться следующие равенства:

уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \dot{u} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.1)$$

условие, связывающее деформации со скоростями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} u + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (3.2)$$

Подставляя значения ϵ в уравнение (3.2), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{u} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + \left(\epsilon_0' - \frac{\sigma_0'}{E} \right) \left(\dot{u} - \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (3.3)$$

Между перемещениями и скоростями должна выполняться связь

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.4)$$

Учитывая (3.4), уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} u + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \quad (3.5)$$

Система уравнений (3.1) и (3.5) по виду похожа на систему уравнений (1.2) и (1.3), но здесь ρ зависит не только от σ , но и от ε_0 и σ_0 .

$$\rho = \rho_0 \exp \left(- \left[\varepsilon_0 + \frac{1}{E} (\sigma - \sigma_0) \right] \right)$$

а для определения ε_0 необходимо знать w и положение волны разгрузки. Характеристики этой системы выражаются уравнениями (1.5) и (1.7), и вдоль характеристик выполняются соотношения

$$d\sigma + \rho a du = 0, \quad d\sigma - \rho a du = 0$$

Теперь эти соотношения не интегрируются, так как ρ — функция не только σ , но и x и t . Характеристики уравнения (3.4) имеют вид

$$dx/dt = u$$

а вдоль характеристик выполняется соотношение

$$w = x + \text{const}$$

В общем случае определение волны разгрузки при конечных деформациях с учетом изменения плотности связано со значительными трудностями. Необходимо отметить, что эти трудности возникают только при учете изменения плотности, при постоянной плотности уравнения (3.1) и (3.5) можно решать отдельно от уравнения (3.4), но в этом случае аппарат ударных волн не пригоден для приложений к исследованию.

Поступила 7 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ, 1945, т. IX, вып. 1.
2. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ, 1946, т. X, вып. 5, 6.
3. Карман и Дюве. Распространение пластических деформаций в телах. Сб. пер. и реф., Механика, 1951, № 2 (Journ. of Appl. Physics, 1950, No. 10).
4. Lee E. A. Boundary Value Problem in the Theory of Plastic Wave propagation. Quart. Appl. Math. 10, 1953, No. 4.
5. Taylor G. The Use of Flat — Ended Projectiles of Determining Dynamic Field Stress. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1948, 194.
6. Рахматулин Х. А. и Шапиро Г. С. Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде. Изв. АН СССР, ОН, 1955, № 2.
7. Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций. ПММ, 1953, т. VII, вып. 4.
8. Бидерман В. Л. О распространении волн продольной деформации при нелинейной «жесткой» зависимости между напряжениями и деформациями. Сб. Расчеты на прочность. Гостехиздат, 1960, вып. 6.
9. Непскы Н. Über einige statisch bestimmten Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. ZAMM, 1923, Bd. 3. (Русск. пер. в сб. Теория пластичности. ИИЛ, 1948).