ПМТФ, № 2, 1966

ОДНОМЕРНЫЙ РАЗЛЕТ КОНЕЧНОЙ МАССЫ ОДНОИМЕННО ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НА ПЛОСКОСТИ

В. А. Рыков

(Москва)

При помощи кинетической теории в работе дано решение задачи одномерного разлета в вакуум массы заряженных частиц, сосредоточенных в начальный момент времени на плоскости $x = 0$. Задача решается в приближении бесстолкновительных уравнений с учетом самосогласованного электрического поля.

Найдена единая асимптотика одномерного разлета. Показана связь между задачей разлета слоя заряженного газа и задачей разлета из точки.

§ 1. Пусть в момент времени $t = 0$ на плоскости $x = 0$ сосредоточены N одноименно заряженных частиц, имеющих заданную функцию распределения по скоростям $f = f_0(u)\delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, нормированная условием $\int \delta(x)dx = 1$, если область интегрирования включает начало координат [1].

Конкретный вид функции $f_0(u)$ должен выбираться из соображений, связанных с реальной физической задачей, приводящей путем абстрагирования к задаче о разлете из точки. Для описания движения заряженных частиц, которые при $t > 0$ начинают свободный разлет в вакуум, будем пользоваться схемой бесстолкновительного движения частиц в самосогласованном электрическом поле.

Система уравнений Власова, обычно используемая при рассмотрении таких движений, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{m}E(t, x)\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x, u)\,du \tag{1.1}$$

Здесь f — функция распределения частиц, E — напряженность электрического поля, ε — заряд частицы, m — масса частицы, u — скорость частицы, t — время, x — декартова координата. Внешние электрические и магнитные поля отсутствуют. Вне области рассмотрения разлета, на достаточно большом удалении от начала координат, всегда можно распределить симметричным образом заряды противоположного знака, так как это не повлияет на движение частиц. При достижении области с противоположным зарядом разлетающиеся частицы нейтрализуются.

Система уравнений (1.1) является существенно нелинейной, и отыскание решения поставленной задачи с прямым использованием системы уравнений (1.1) затруднительно. Далее будет проведено рассмотрение, позволяющее дать решение поставленной задачи иным путем, хотя в конечном итоге должно получиться решение системы уравнений (1.1).

Рассмотрим уравнение для напряженности электрического поля

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} f\,du \qquad \left(\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} f\,du = \rho(t, x)\right) \tag{1.2}$$

[1] При рассмотрении одномерных движений следует помнить, что все величины отнесены к единичной площадке плоскости, перпендикулярной оси x.

Величина $\rho(t, x)$ — плотность заряда, распределенного вдоль оси x в момент времени t. Вследствие симметрии задачи $E(0, t) = 0$, поэтому уравнению (1.2) можно придать следующий вид:

$$E(t, x) = 4\pi q \qquad \left(q = \int_0^x \rho(t, x)\, dx\right) \tag{1.3}$$

Отсюда видно, что величина напряженности электрического поля в точке x равна величине суммарного заряда q, распределенного на отрезке $[0, x]$, умноженной на 4π.

Рассмотрим теперь произвольную частицу, которая стартовала из точки $x = 0$ в момент времени $t = 0$ со скоростью u_0.

Смещение частицы за малое время Δt определяется формулой $\Delta x = u_0 \Delta t$, поэтому все частицы, которые при $t = 0$ имели скорости, большие u_0, в первый момент разлета вырвутся вперед выделенной частицы, а те, которые имели скорости, меньшие u_0, останутся позади.

Такая последовательность положения частиц, зависящая от величин начальных скоростей, сохранится и в дальнейшем.

Действительно, частицы, находящиеся впереди выделенной частицы, имеют начальные скорости, большие u_0, и на них будет ускоряюще действовать электрическое поле большей напряженности, так как находящийся позади них суммарный заряд q больше, чем суммарный заряд позади выделенной частицы, поэтому они будут все дальше уходить вперед от частицы, имевшей начальную скорость u_0.

По тем же самым причинам не могут перегнать выделенную частицу те частицы, которые имели начальные скорости, меньшие u_0.

Из этого следует, что позади частицы с начальной скоростью u_0 будет находиться одно и то же число частиц, т. е. напряженность электрического поля, действующего на эту частицу, будет постоянной величиной.

Уравнение движения частицы можно записать так:

$$m\,du/dt = \varepsilon E(u_0) \qquad (E(u_0) = \mathrm{const}) \tag{1.4}$$

Интегрируя уравнение (1.4) с начальным условием $u = u_0$ при $t = 0$, получим

$$u = \frac{\varepsilon}{m} E(u_0)\, t + u_0 \tag{1.5}$$

Так как $u = dx/dt$, то уравнение (1.5) можно проинтегрировать с начальным условием $x = 0$ при $t = 0$

$$x = \frac{\varepsilon}{2m} E(u_0)\, t^2 + u_0 t \tag{1.6}$$

Определим теперь конкретный вид связи между величиной E и начальной скоростью частицы u_0.

Число частиц, которые находятся позади частицы, стартовавшей со скоростью u_0, равно m_0. Суммарный заряд этих частиц будет $q = \varepsilon m_0$. Поэтому, пользуясь соотношением (1.3), можем записать

$$E(u_0) = 4\pi\varepsilon \int_0^{u_0} f_0(u)\, du \qquad \left(m_0 = \int_0^{u_0} f_0(u)\, du\right) \tag{1.7}$$

Подставляя это выражение в равенство (1.6), получим уравнение движения частицы

$$x = \frac{4\pi\varepsilon^2}{2m} t^2 \int_0^{u_0} f_0(u)\, du + u_0 t \tag{1.8}$$

Подставляя выражение для $E(u_0)$ (1.7) в равенство (1.5), найдем

$$u = \frac{4\pi\varepsilon^2}{m}\int\limits_0^{u_0} f_0(u)\,dut + u_0 \qquad (1.9)$$

Уравнение (1.8) дает неявную зависимость u_0 от x и t, поэтому соотношение (1.9), рассматриваемое совместно с (1.8), будет давать распределение скорости в потоке, т. е. (1.8) и (1.9) позволяют определить u как функцию x и t. Совместное рассмотрение (1.7) и (1.8) позволяет определить E как функцию x и t.

Рассчитаем теперь плотность распределения частиц.

Число частиц, обладающих начальными скоростями в интервале $(u_0, u_0 + \Delta u_0)$, равно $\Delta N = f_0(u_0)\Delta u_0$. Частицы, обладавшие начальной скоростью u_0, в момент времени t будут находиться в точке

$$x = \frac{4\pi\varepsilon^2}{2m} t^2 \int\limits_0^{u_0} f_0(u)\,du + u_0 t$$

Частицы, обладавшие начальной скоростью $u_0 + \Delta u_0$, в момент времени t будут находиться в точке

$$x_1 = \frac{4\pi\varepsilon^2}{2m} t^2 \int\limits_0^{u_0+\Delta u_0} f_0(u)\,du + (u_0 + \Delta u_0)\,t$$

Следовательно, ΔN частиц будут заполнять отрезок $\Delta x = x_1 - x$. Поэтому плотность числа частиц n в точке x в момент времени t можно вычислить как предел отношения ΔN к Δx при Δu_0, стремящемся к нулю,

$$n = \lim_{\Delta u_0 \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{f_0(u_0)}{2\pi\varepsilon^2 m^{-1} f_0(u_0)\, t^2 + t} \qquad (1.10)$$

Уравнения (1.10) и (1.8) дают зависимость n от x и t. Таким образом, определены все макроскопические характеристики разлета. Из соотношения (1.9) видно, что при $t = \infty$ скорость частиц газа становится бесконечно большой. Уравнение (1.10) позволяет сделать вывод, что при достаточно больших t плотность частиц n имеет асимптотику

$$n \approx \frac{2m}{4\pi\varepsilon^2}\frac{1}{t^2}$$

которая не зависит от распределения частиц по скоростям в начальный момент времени.

Следует заметить, что это асимптотическое выражение для плотности перестает быть верным лишь для небольшого числа частиц, начальные скорости которых принадлежат окрестности точки $u_0 = \infty$, так как $f_0(\infty) = 0$ и в знаменателе выражения (1.10) первый член становится меньше второго. Поэтому асимптотику нельзя распространять при конечном значении t до точки $x = \infty$. Асимптотическое представление для скорости имеет вид $u = 2x / t$.

В отличие от разлета заряженных частиц, асимптотика бесстолкновительного разлета нейтральных частиц определяется видом начальной функции распределения и плотность частиц убывает с течением времени по закону $1 / t$ [1, 2].

Заметим, что качественная картина данной задачи является очевидной и до проделанных количественных рассмотрений. Одноименно заряженные частицы расталкиваются и испытывают постоянное ускорение, поэтому плотность убывает как $n \sim 1 / t^2$.

§ 2. Посмотрим теперь, в какой связи находится рассмотренная задача разлета частиц из точки с задачей разлета слоя заряженных частиц газа.

Пусть между непроницаемыми плоскостями $x = -{}^1/_2 s$ и $x = {}^1/_2 s$ в состоянии равновесия находится газ из одноименно заряженных частиц. Выражение для функции распределения f будет иметь вид

$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m(2\psi + u^2)}{2kT_0}\right)$$

Здесь T_0 — температура слоя газа, ψ — электрический потенциал, который определяется из уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + 4\pi\varepsilon n_0 \exp\left(-\frac{m\psi}{kT_0}\right) = 0 \qquad \left(\psi = \frac{d\psi}{dx} = 0, \quad x = 0\right)$$

Будем, далее, предполагать газ горячим, т. е., что потенциальная энергия, приобретаемая на длине пробега s, мала по сравнению с kT_0. Это условие можно записать в виде

$$\frac{\varepsilon E s}{kT_0} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{4\pi\varepsilon q s}{kT_0} \ll 1 \tag{2.1}$$

Разлет холодного слоя заряженного газа ($T_0 = 0$) был рассмотрен в работе [3], в которой принималось, что в слое газа нет распределения частиц по тепловым скоростям.

Пусть средняя длина свободного пробега в газе будет больше размера слоя s.

Тогда после мгновенного удаления ограничивающих плоскостей газ будет разлетаться в бесстолкновительном режиме под действием самосогласованного электрического поля. Условие (2.1) означает, что в начальный период разлета действие электрического поля еще не успевает существенно повлиять на движение частиц и разделение частиц по скоростям произойдет так, как если бы происходил бесстолкновительный разлет нейтральных частиц. В дальнейшем движение частиц будет уже существенно зависеть от действующего на них электрического поля, но их последовательность движения друг за другом уже не может быть нарушена.

На достаточно большом удалении от начала координат ($|x| > s$) разлет слоя будет осуществляться так же, как разлет газа из точки, причем функцию распределения частиц газа по скоростям в точке $x = 0$ следует взять в виде $f = f_0(u)\delta(x)$, где

$$f_0(u) = \int_{-{}^1/_2 s}^{+{}^1/_2 s} n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m(2\psi + u^2)}{2kT_0}\right) dx = N_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT_0}\right)$$

Здесь N_0 — число частиц в слое газа толщины s. При помощи выражений (1.8), (1.9), (1.7) и (1.10) можно рассчитать макроскопические характеристики потока.

Поступила 6 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Нарасимха Р. Расширение газов в пустоту без столкновений. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1963, № 2 (78).
2. Шидловский В. П. Задача о разлете точечной массы газа и ее решение при помощи кинетической теории. ПМТФ, 1963, № 4.
3. Левин В. А. Одномерные неустановившиеся движения газа, несущего электрический заряд, при нулевом давлении. ПМТФ, 1962, № 3.